

# Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.\*)

Von

HERMANN MINKOWSKI.

## Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung: Theorie von Lorentz; Theorem, Postulat, Prinzip der Relativität .	473
§ 1. Bezeichnungen. . . . .	475

### Erster Teil.

#### Betrachtung des Grenzfalles Äther.

§ 2. Die Grundgleichungen für den Äther . . . . .	476
§ 3. Das Theorem der Relativität von Lorentz . . . . .	477
§ 4. Spezielle Lorentz-Transformationen . . . . .	480
§ 5. Raum-Zeit-Vektoren I. und II. Art . . . . .	483
§ 6. Begriff der Zeit . . . . .	486

### Zweiter Teil.

#### Die elektromagnetischen Vorgänge.

§ 7. Die Grundgleichungen für ruhende Körper . . . . .	487
§ 8. Die Grundgleichungen für bewegte Körper . . . . .	489
§ 9. Die Grundgleichungen in der Theorie von Lorentz . . . . .	493
§ 10. Die Grundgleichungen nach E. Cohn. . . . .	494
§ 11. Typische Darstellung der Grundgleichungen . . . . .	495
§ 12. Der Differentialoperator $\text{lor}$ . . . . .	508
§ 13. Das Produkt der Feldvektoren $f F$ . . . . .	507
§ 14. Die ponderomotorischen Kräfte . . . . .	512

### Anhang.

#### Mechanik und Relativitätspostulat.

Raum-Zeit-Linien, Eigenzeit, Anpassung des Hamiltonschen Prinzipes, Energiesatz und Bewegungsgleichungen, Gravitation . . . . .	513
--	-----

\*) Abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl., Sitzung vom 21. Dezember 1907.

## Einleitung.

Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper herrschen zur Zeit noch Meinungsverschiedenheiten. Die Ansätze von Hertz\*) (1890) mußten verlassen werden, weil sich herausgestellt hat, daß sie mit verschiedenen experimentellen Ergebnissen in Widerspruch geraten.

1895 publizierte H. A. Lorentz\*\*) seine Theorie der optischen und elektrischen Erscheinungen in bewegten Körpern, die, auf atomistischer Vorstellung von der Elektrizität fußend, durch ihre großen Erfolge die kühnen Hypothesen, von denen sie getragen und durchsetzt wird, zu rechtfertigen scheint. Die Lorentzsche Theorie\*\*\*) geht aus von gewissen ursprünglichen Gleichungen, die an jedem Punkte des „Äthers“ gelten sollen, und gelangt daraus durch Mittelwertbildungen über „physikalisch unendlich kleine“ Bereiche, die schon zahlreiche „Elektronen“ enthalten, zu den Gleichungen für die Vorgänge in ponderablen Körpern.

Insbesondere gibt sich die Lorentzsche Theorie Rechenschaft von der Nichtexistenz einer Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther; sie bringt diese Tatsache in Zusammenhang mit einer Kovarianz jener ursprünglichen Gleichungen bei gewissen gleichzeitigen Transformationen der Raum- und Zeitparameter, die von H. Poincaré†) den Namen *Lorentz-Transformationen* erhalten haben. Für jene ursprünglichen Gleichungen ist die Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen eine rein mathematische Tatsache, die ich das *Theorem der Relativität* nennen will; dieses Theorem beruht wesentlich auf der Gestalt der Differentialgleichung für die Fortpflanzung von Wellen mit Lichtgeschwindigkeit.

Nun kann man, ohne noch zu bestimmten Hypothesen über den Zusammenhang von Elektrizität und Materie sich zu bekennen, erwarten, jenes mathematisch evidente Theorem werde seine Konsequenzen so weit erstrecken, daß dadurch auch die noch nicht erkannten Gesetze in bezug auf ponderable Körper irgendwie eine Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen übernehmen werden. Man äußert damit mehr eine Zuversicht, als bereits eine fertige Einsicht, und diese Zuversicht will ich das *Postulat der Relativität* nennen. Die Sachlage ist erst ungefähr eine solche, als wenn man die Erhaltung der Energie postuliert in Fällen, wo die auftretenden Formen der Energie noch nicht erkannt sind.

\*) Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Wiedemanns Ann. 41, p. 369. 1890 (auch in: Ges. Werke Bd. I, p. 256. Leipzig 1892).

\*\*) Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

\*\*\*) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. V 2, Art. 14. Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronentheorie.

†) Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129.

Gelangt man hernach dazu, die erwartete Kovarianz als einen bestimmten Zusammenhang zwischen lauter beobachtbaren Größen bei bewegten Körpern zu behaupten, so mag alsdann dieser bestimmte Zusammenhang das *Prinzip der Relativität* heißen.

Diese Unterscheidungen scheinen mir nützlich, um den gegenwärtigen Stand der Elektrodynamik bewegter Körper charakterisieren zu können.

H. A. Lorentz hat das Relativitätstheorem gefunden und das Relativitätspostulat geschaffen, als eine Hypothese, daß Elektronen und Materie infolge von Bewegung Kontraktionen nach einem gewissen Gesetze erfahren.

A. Einstein\*) hat es bisher am schärfsten zum Ausdruck gebracht, daß dieses *Postulat* nicht eine künstliche Hypothese ist, sondern vielmehr eine durch die Erscheinungen sich aufzwingende neuartige Auffassung des Zeitbegriffs.

Das *Prinzip der Relativität* jedoch in dem von mir gekennzeichneten Sinne ist für die Elektrodynamik bewegter Körper bisher noch gar nicht formuliert worden. *In der gegenwärtigen Abhandlung erhalte ich, indem ich dieses Prinzip formuliere, die Grundgleichungen für bewegte Körper in einer durch dieses Prinzip völlig eindeutig bestimmten Fassung. Dabei wird sich zeigen, daß keine der bisher für diese Gleichungen angenommenen Formen sich diesem Prinzip genau fügt.*

Man sollte vor allem erwarten, daß die von Lorentz angenommenen Grundgleichungen für bewegte Körper dem Relativitätspostulate entsprächen. Es zeigt sich indes, daß dieses nicht der Fall ist für die allgemeinen Gleichungen, die Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper hat, daß es aber allerdings *approximativ* (unter Vernachlässigung der Quadrate der Geschwindigkeiten der Materie gegen das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) der Fall ist für diejenigen Gleichungen, die Lorentz hernach für nichtmagnetisierte Körper erschließt; es kommt aber diese spätere Anpassung an das Relativitätspostulat wieder nur dadurch zustande, daß die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins ihrerseits in einer dem Relativitätspostulate nicht entsprechenden Weise angesetzt wird, also durch eine zufällige Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätspostulat. Indessen bedeutet diese Feststellung keinerlei Einwand gegen die molekulartheoretischen Hypothesen von Lorentz, sondern es wird nur klar, daß die Annahme der Kontraktion der Elektronen bei Bewegung in der Lorentzchen Theorie schon an einer früheren Stelle, als dieses durch Lorentz geschieht, eingeführt werden müßte.

---

\*) Ann. d. Phys. 17, p. 891, 1905.

In einem Anhang gehe ich noch auf die Stellung der klassischen Mechanik zum Relativitätspostulate ein. Eine leicht vorzunehmende Anpassung der Mechanik an das Relativitätspostulat würde für die beobachtbaren Erscheinungen kaum merkliche Differenzen ergeben, würde aber zu einem sehr überraschenden Erfolge führen: *Mit der Voranstellung des Relativitätspostulates schafft man sich genau das hinreichende Mittel, um hernach die vollständigen Gesetze der Mechanik allein aus dem Satze von der Erhaltung der Energie (und Aussagen über die Formen der Energie) zu entnehmen.*

## § 1.

### Bezeichnungen.

Ein Bezugssystem  $x, y, z, t$  rechtwinkliger Koordinaten im Raume und der Zeit sei gegeben. Die Zeiteinheit soll in solcher Beziehung zur Längeneinheit gewählt sein, daß die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume 1 ist.

Obwohl ich an sich vorziehen würde, die von Lorentz gebrauchten Bezeichnungen nicht zu ändern, scheint es mir doch wichtig, gewisse Zusammengehörigkeiten durch eine andere Wahl der Zeichen von vornherein hervortreten zu lassen. Ich werde den Vektor

der *elektrischen Kraft*  $\mathfrak{E}$ , der *magnetischen Erregung*  $\mathfrak{M}$ , der *elektrischen Erregung*  $\epsilon$ , der *magnetischen Kraft*  $m$

nennen, so daß also  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\epsilon$ ,  $m$  an die Stelle von  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{H}$  bei Lorentz treten sollen.

Ich werde mich ferner des Gebrauchs komplexer Größen in einer Weise, wie dies bisher in physikalischen Untersuchungen noch nicht üblich war, bedienen, namentlich statt mit  $t$  mit der Verbindung  $it$  operieren, wobei  $i$  die imaginäre Einheit  $\sqrt{-1}$  bedeute. Andererseits werden ganz wesentliche Umstände in Evidenz treten, indem ich eine Schreibweise mit Indizes benutzen werde, nämlich oft an Stelle von

$$x, y, z, it \qquad x_1, x_2, x_3, x_4$$

setzen und hierauf einen allgemeinen Gebrauch der Indizes 1, 2, 3, 4 gründen werde. Dabei wird es sich, wie ich ausdrücklich hervorhebe, stets nur um eine *übersichtlichere Zusammenfassung rein reeller Beziehungen* handeln, und der Übergang zu reellen Gleichungen wird sich überall sofort vollziehen lassen, indem von den Zeichen mit Indizes solche mit einem Index 4 stets *rein imaginäre* Werte, solche mit *keinem* Index 4 oder mit *zwei* Indizes 4 stets *reelle* Werte bedeuten werden.

Ein einzelnes Wertsystem  $x, y, z, t$  bzw.  $x_1, x_2, x_3, x_4$  soll ein *Raum-Zeitpunkt* heißen.

Ferner bezeichne  $w$  den Vektor *Geschwindigkeit der Materie*,  $\varepsilon$  die *Dielektrizitätskonstante*,  $\mu$  die *magnetische Permeabilität*,  $\sigma$  die *Leitfähigkeit* der Materie, sämtlich als Funktionen von  $x, y, z, t$  (oder  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) gedacht, weiter  $\varrho$  die *elektrische Raumdichte*,  $\mathfrak{s}$  einen Vektor „elektrischer Strom“, zu dessen Definition wir erst in der Folge (in § 7 und 8) kommen werden.

## Erster Teil.

### Betrachtung des Grenzfalles Äther.

#### § 2.

#### Die Grundgleichungen für den Äther.

Die Lorentzsche Theorie führt die Gesetze der Elektrodynamik der ponderablen Körper durch atomistische Vorstellungen von der Elektrizität zurück auf einfachere Gesetze; an diese einfacheren Gesetze knüpfen wir hier ebenfalls an, indem wir fordern, daß sie den Grenzfall  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  der Gesetze für ponderable Körper bilden sollen. In diesem idealen Grenzfalle  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  soll  $\mathfrak{E} = e$ ,  $\mathfrak{M} = m$  sein und sollen an jedem Raum-Zeitpunkte  $x, y, z, t$  die Gleichungen bestehen:

$$(I) \quad \text{curl } m - \frac{\partial e}{\partial t} = \varrho w,$$

$$(II) \quad \text{div } e = \varrho,$$

$$(III) \quad \text{curl } e + \frac{\partial m}{\partial t} = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } m = 0.$$

Ich will nun schreiben  $x_1, x_2, x_3, x_4$  für  $x, y, z, it$  ( $i = \sqrt{-1}$ ), weiter

$$\text{für} \quad \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$$

$$\varrho w_x, \varrho w_y, \varrho w_z, i\varrho,$$

d. s. die Komponenten des Konvektionsstromes  $\varrho w$  und die mit  $i$  multiplizierte Raumdichte der Elektrizität, ferner

$$\text{für} \quad f_{23}, f_{31}, f_{12}, \quad f_{14}, \quad f_{24}, \quad f_{34}$$

$$m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z,$$

d. s. die Komponenten von  $m$  bzw.  $-ie$  nach den Achsen, endlich noch allgemein bei zwei der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes  $h, k$

$$f_{kh} = -f_{hk},$$

also

$$\begin{aligned} f_{32} &= -f_{23}, f_{13} = -f_{31}, f_{21} = -f_{12}, \\ f_{41} &= -f_{14}, f_{42} = -f_{24}, f_{43} = -f_{34} \end{aligned}$$

festsetzen.

Als dann schreiben sich die drei in (I) zusammengefaßten Gleichungen und die mit  $i$  multiplizierte Gleichung (II):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = \varrho_1, \\ & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = \varrho_2, \\ & \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = \varrho_3, \\ & \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} = \varrho_4. \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Andererseits verwandeln sich die drei in (III) zusammengefaßten Gleichungen, mit  $-i$  multipliziert, und die Gleichung (IV), mit  $-1$  multipliziert, in

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0, \\ & \frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} = 0, \\ & \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} = 0, \\ & \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Man bemerkt bei dieser Schreibweise sofort die *vollkommene Symmetrie* des ersten wie des zweiten dieser Gleichungssysteme *in bezug auf die Permutationen der Indizes 1, 2, 3, 4.*

### § 3.

#### Das Theorem der Relativität von Lorentz.

Die Schreibweise der Gleichungen (I)–(IV) in der Symbolik des Vektorkalküls dient bekanntermaßen dazu, eine Invarianz (oder besser Kovarianz) des Gleichungssystems (A) wie des Gleichungssystems (B) bei einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt in Evidenz zu setzen. Nehmen wir z. B. eine Drehung um die  $z$ -Achse um einen festen Winkel  $\varphi$  vor unter Festhaltung der Vektoren  $\mathbf{e}, \mathbf{m}, \mathbf{w}$  im Raume, führen also anstatt  $x_1, x_2, x_3, x_4$  neue Variablen  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  ein durch

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, x'_3 = x_3, x'_4 = x_4,$$

dazu neue Größen  $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3, \varrho'_4$  durch

$$\varrho'_1 = \varrho_1 \cos \varphi + \varrho_2 \sin \varphi, \varrho'_2 = -\varrho_1 \sin \varphi + \varrho_2 \cos \varphi, \varrho'_3 = \varrho_3, \varrho'_4 = \varrho_4.$$

neue Größen  $f'_{12}, \dots, f'_{34}$  durch

$$\begin{aligned} f'_{23} &= f_{23} \cos \varphi + f_{31} \sin \varphi, & f'_{31} &= -f_{23} \sin \varphi + f_{31} \cos \varphi, & f'_{12} &= f_{12}, \\ f'_{14} &= f_{14} \cos \varphi + f_{24} \sin \varphi, & f'_{24} &= -f_{14} \sin \varphi + f_{24} \cos \varphi, & f'_{34} &= f_{34}, \\ f'_{kh} &= -f'_{hk} & (h, k &= 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

so wird notwendig aus (A) das genau entsprechende System (A'), aus (B) das genau entsprechende System (B') zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen folgen.

Nun läßt sich auf Grund der Symmetrie des Systems (A) wie des Systems (B) in den Indizes 1, 2, 3, 4 sofort ohne jede Rechnung das von Lorentz gefundene Theorem der Relativität entnehmen.

Ich will unter  $i\psi$  eine rein imaginäre Größe verstehen und die Substitution

$$(1) \quad x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi, \quad x'_4 = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi$$

betrachten. Mittels

$$(2) \quad -i \operatorname{tg} i\psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}} = q, \quad \psi = \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{1+q}{1-q}$$

wird

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}},$$

wobei  $-1 < q < 1$  ausfällt und  $\sqrt{1-q^2}$  mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist. Schreiben wir noch

$$(3) \quad x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z', \quad x'_4 = it',$$

so nimmt daher die Substitution (1) die Gestalt

$$(4) \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}}, \quad t' = \frac{-qz + t}{\sqrt{1-q^2}}$$

mit lauter reellen Koeffizienten an.

Ersetzen wir nun in den oben bei der Drehung um die  $z$ -Achse genannten Gleichungen überall 1, 2, 3, 4 durch 3, 4, 1, 2, und gleichzeitig  $\varphi$  durch  $i\psi$ , so erkennen wir, daß, wenn gleichzeitig mit dieser Substitution (1) neue Größen  $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4$  durch

$$q'_1 = q_1, \quad q'_2 = q_2, \quad q'_3 = q_3 \cos i\psi + q_4 \sin i\psi, \quad q'_4 = -q_3 \sin i\psi + q_4 \cos i\psi,$$

neue Größen  $f'_{12}, \dots, f'_{34}$  durch

$$\begin{aligned} f'_{41} &= f_{41} \cos i\psi + f_{13} \sin i\psi, & f'_{13} &= -f_{41} \sin i\psi + f_{13} \cos i\psi, & f'_{34} &= f_{34}, \\ f'_{32} &= f_{32} \cos i\psi + f_{42} \sin i\psi, & f'_{42} &= -f_{32} \sin i\psi + f_{42} \cos i\psi, & f'_{12} &= f_{12}, \\ f'_{kh} &= -f'_{hk} & (h, k &= 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

eingeführt werden, alsdann ebenfalls das System (A) in das genau entsprechende System (A'), das System (B) in das genau entsprechende

System (B') zwischen den neuen, mit Strichen versehenen Größen übergehen wird.

Alle diese Gleichungen lassen sich sofort in rein reelle Gestalt umschreiben und man kann das letzte Ergebnis so formulieren:

Wird die reelle Transformation (4) vorgenommen und werden hernach  $x', y', z', t'$  als ein Bezugssystem für Raum und Zeit angesprochen, werden zugleich

$$(5) \quad \varphi' = \varphi \left( \frac{-q w_x + 1}{\sqrt{1 - q^2}} \right), \quad \varphi' w'_x = \varphi \left( \frac{w_x - q}{\sqrt{1 - q^2}} \right), \quad \varphi' w'_x = \varphi w_x, \quad \varphi' w'_y = \varphi w_y,$$

ferner

$$(6) \quad e'_{x'} = \frac{e_x - q m_y}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad m'_{y'} = \frac{-q e_x + m_y}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad e'_{z'} = e_z$$

und

$$(7) \quad m'_{x'} = \frac{m_x + q e_y}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad e'_{y'} = \frac{q m_x + e_y}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad m'_{z'} = m_z$$

eingeführt\*), so kommen hernach für die Vektoren  $w', e', m'$  mit den Komponenten  $w'_{x'}, w'_{y'}, w'_{z'}; e'_{x'}, e'_{y'}, e'_{z'}; m'_{x'}, m'_{y'}, m'_{z'}$  in dem neuen Koordinatensystem  $x', y', z'$  und dazu die Größe  $\varphi'$  genau die zu (I)–(IV) analogen Gleichungen (I')–(IV') zustande, und zwar geht für sich das System (I), (II) in (I'), (II'), das System (III), (IV) in (III'), (IV') über.

Wir bemerken, daß hier  $e_x - q m_y, e_y + q m_x, e_z$  die Komponenten des Vektors  $e + [vm]$  sind, wenn  $v$  einen Vektor in Richtung der positiven  $z$ -Achse vom Betrage  $|v| = q$  und  $[vm]$  das vektorielle Produkt der Vektoren  $v$  und  $m$  bedeutet. Analog sind dann  $m_x + q e_y, m_y - q e_x, m_z$  die Komponenten des Vektors  $m - [ve]$ .

Die Gleichungen (6) und (7), wie sie paarweise unter einander stehen, können durch eine andere Verwendung imaginärer Größen in

$$e'_{x'} + i m'_{x'} = (e_x + i m_x) \cos i\psi + (e_y + i m_y) \sin i\psi,$$

$$e'_{y'} + i m'_{y'} = -(e_x + i m_x) \sin i\psi + (e_y + i m_y) \cos i\psi,$$

$$e'_{z'} + i m'_{z'} = e_z + i m_z$$

zusammengefaßt werden, und wir merken noch an, daß, wenn  $\varphi$  irgendeinen reellen Winkel bedeutet, aus diesen letzten Beziehungen ferner die Kombinationen

$$(8) \quad (e'_{x'} + i m'_{x'}) \cos \varphi + (e'_{y'} + i m'_{y'}) \sin \varphi \\ = (e_x + i m_x) \cos (\varphi + i\psi) + (e_y + i m_y) \sin (\varphi + i\psi),$$

\*) Die Gleichungen (5) stehen hier in anderer Folge, die Gleichungen (6) und (7) aber in der nämlichen Folge wie die zuvor genannten Gleichungen, die auf sie hinauskommen.



$$(9) \quad \begin{aligned} & - (e'_x + i m'_x) \sin \varphi + (e'_y + i m'_y) \cos \varphi \\ & = - (e_x + i m_x) \sin (\varphi + i \psi) + (e_y + i m_y) \cos (\varphi + i \psi) \end{aligned}$$

hervorgehen.

#### § 4.

#### Spezielle Lorentz-Transformationen.

Die Rolle, welche die  $z$ -Richtung in der Transformation (4) spielt, kann leicht auf eine beliebige Richtung übertragen werden, indem sowohl das Achsensystem der  $x, y, z$  wie das der  $x', y', z'$ , jedes einer und der nämlichen Drehung in bezug auf sich unterworfen wird. Wir kommen damit zu einem allgemeineren Satze.

Es sei  $v$  mit den Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  ein gegebener Vektor mit einem solchen von Null verschiedenen Betrage  $|v| = q$ , der kleiner als 1 ist, von irgendeiner Richtung. Wir verstehen allgemein unter  $\bar{v}$  eine beliebige auf  $v$  senkrechte Richtung und bezeichnen ferner die Komponente eines Vektors  $r$  nach der Richtung  $v$  oder einer Richtung  $\bar{v}$  mit  $r_v$  bzw.  $r_{\bar{v}}$ .

Anstatt  $x, y, z, t$  sollen nun neue Größen  $x', y', z', t'$  in folgender Weise eingeführt werden. Wird kurz  $r$  für den Vektor mit den Komponenten  $x, y, z$  im ersten, ferner  $r'$  für den Vektor mit den Komponenten  $x', y', z'$  im zweiten Bezugssystem geschrieben, so soll sein für die Richtung von  $v$ :

$$(10) \quad r'_v = \frac{r_v - qt}{\sqrt{1 - q^2}},$$

für jede auf  $v$  senkrechte Richtung  $\bar{v}$ :

$$(11) \quad r'_{\bar{v}} = r_{\bar{v}},$$

und ferner:

$$(12) \quad t' = \frac{-qr_v + t}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Die Bezeichnungen  $r'_v$  und  $r'_{\bar{v}}$  hier sind in dem Sinne zu verstehen, daß der Richtung  $v$  und jeder zu  $v$  senkrechten Richtung  $\bar{v}$  in  $x, y, z$  immer die Richtung mit den nämlichen Richtungskosinus in  $x', y', z'$  zugeordnet wird.

Eine Transformation, wie sie durch (10), (11), (12) mit der Bedingung  $0 < q < 1$  dargestellt wird, will ich eine *spezielle Lorentz-Transformation* nennen, und soll  $v$  der Vektor, die Richtung von  $v$  die Achse, der Betrag von  $v$  das *Moment* dieser speziellen Lorentz-Transformation heißen.

Werden weiter  $\varrho'$  und die Vektoren  $\mathbf{w}'$ ,  $\mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{m}'$  in  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  dadurch definiert, daß

$$(13) \quad \varrho' = \frac{\varrho(-q\mathbf{w}_v + 1)}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$(14) \quad \varrho' \mathbf{w}'_v = \frac{\varrho \mathbf{w}_v - \varrho \mathbf{q}}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \varrho' \mathbf{w}'_v = \varrho \mathbf{w}_v,$$

ferner\*)

$$(15) \quad (\mathbf{e}' + i\mathbf{m})_v = \frac{(\mathbf{e} + i\mathbf{m} - i[\mathbf{w}, \mathbf{e} + i\mathbf{m}]_v)}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$(\mathbf{e}' + i\mathbf{m}')_v = (\mathbf{e} + i\mathbf{m} - i[\mathbf{w}, \mathbf{e} + i\mathbf{m}])_v$$

ist, so folgt der Satz, daß das Gleichungssystem (I), (II) und (III), (IV) jedesmal in das genau entsprechende System zwischen den mit Strichen versehenen Größen übergeht.

Die Auflösung der Gleichungen (10), (11), (12) führt auf:

$$(16) \quad \mathbf{r}_v = \frac{\mathbf{r}'_v + q\mathbf{t}'}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{r}'_v, \quad t = \frac{q\mathbf{r}'_v + \mathbf{t}'}{\sqrt{1-q^2}}. \quad -$$

Wir schließen nun eine in der Folge sehr wichtige Bemerkung über die Beziehung der Vektoren  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{w}'$  an. Es möge wieder die schon mehrfach gebrauchte Bezeichnung mit den Indizes 1, 2, 3, 4 herangezogen werden, so daß wir  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  für  $x', y', z', it'$  und  $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3, \varrho'_4$  für  $\varrho' \mathbf{w}'_x, \varrho' \mathbf{w}'_y, \varrho' \mathbf{w}'_z, i\varrho'$  setzen. Wie eine Drehung um die  $z$ -Achse, so ist offenbar auch die Transformation (4) und allgemeiner die Transformation (10), (11), (12) eine solche *lineare Transformation* von der Determinante +1, wodurch

$$(17) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \text{ d. i. } x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2, \text{ d. i. } x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

übergeht.

Es wird daher auf Grund der Ausdrücke (13), (14) auch

$$-(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \varrho_4^2) = \varrho^2(1 - \mathbf{w}_x^2 - \mathbf{w}_y^2 - \mathbf{w}_z^2) = \varrho^2(1 - \mathbf{w}^2)$$

in  $\varrho'^2(1 - \mathbf{w}'^2)$  übergehen, oder mit andern Worten

$$(18) \quad \varrho \sqrt{1 - \mathbf{w}^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen sei, eine *Invariante* bei Lorentz-Transformationen sein.

\*) Die runden Klammern sollen nur die Ausdrücke zusammenfassen, welche der Index betrifft, und  $[\mathbf{w}, \mathbf{e} + i\mathbf{m}]$  soll das vektorielle Produkt von  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{e} + i\mathbf{m}$  bedeuten.

Indem wir  $q_1, q_2, q_3, q_4$  durch diese GröÙe dividieren, entstehen die 4 Werte

$$w_1 = \frac{w_x}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_2 = \frac{w_y}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_3 = \frac{w_z}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-w^2}},$$

zwischen welchen die Beziehung

$$(19) \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

besteht. Offenbar sind diese 4 Werte eindeutig durch den Vektor  $w$  bestimmt, und umgekehrt folgt aus irgend 4 Werten  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , wobei  $w_1, w_2, w_3$  reell,  $-iw_4$  reell und positiv ist und die Bedingung (19) statthat, rückwärts gemäß diesen Gleichungen eindeutig ein Vektor  $w$  von einem Betrage  $< 1$ .

Die Bedeutung von  $w_1, w_2, w_3, w_4$  hier ist, daß sie die Verhältnisse von  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  zu

$$(20) \quad \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)} = dt \sqrt{1-w^2}$$

für die im Raum-Zeitpunkte  $x_1, x_2, x_3, x_4$  befindliche Materie beim Übergang zu zeitlich benachbarten Zuständen derselben Stelle der Materie sind. Nun übertragen sich die Gleichungen (10), (11), (12) sofort auf die zusammengehörigen Differentiale  $dx, dy, dz, dt$  und  $dx', dy', dz', dt'$  und insbesondere wird daher für sie

$$-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2)$$

sein. Nach Ausführung der Lorentz-Transformation ist im neuen Bezugssystem die Geschwindigkeit der Materie im nämlichen Raum-Zeitpunkte  $x', y', z', t'$  der Vektor  $w'$  mit den Verhältnissen  $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$  als Komponenten auszulegen.

Nunmehr ist ersichtlich, daß das Wertsystem

$$x_1 = w_1, \quad x_2 = w_2, \quad x_3 = w_3, \quad x_4 = w_4$$

vermöge der Lorentz-Transformation (10), (11), (12) eben in dasjenige neue Wertsystem

$$x_1' = w_1', \quad x_2' = w_2', \quad x_3' = w_3', \quad x_4' = w_4'$$

übergeht, das für die Geschwindigkeit  $w'$  nach der Transformation genau die Bedeutung hat wie das erstere Wertsystem für die Geschwindigkeit vor der Transformation.

Ist insbesondere der Vektor  $v$  der speziellen Lorentz-Transformation gleich dem Geschwindigkeitsvektor  $w$  der Materie im Raum-Zeitpunkte  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , so folgt aus (10), (11), (12):

$$w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i.$$

Unter diesen Umständen erhält also der betreffende Raum-Zeitpunkt nach der Transformation die Geschwindigkeit  $w' = 0$ , er wird, wie wir uns ausdrücken können, *auf Ruhe transformiert*. Wir können danach die Invariante  $\varrho\sqrt{1-w^2}$  passend als *Ruh-Dichte* der Elektrizität bezeichnen.

## § 5.

**Raum-Zeit-Vektoren I<sup>ter</sup> und II<sup>ter</sup> Art.**

Indem wir das Hauptergebnis bezüglich der speziellen Lorentz-Transformationen mit der Tatsache zusammennehmen, daß das System (A) wie das System (B) jedenfalls bei einer Drehung des räumlichen Bezugssystems um den Nullpunkt kovariant ist, erhalten wir das allgemeine *Theorem der Relativität*. Um es leicht verständlich zu formulieren, dürfte es zweckmäßig sein, zuvor eine Reihe von abkürzenden Ausdrücken festzulegen, während ich andererseits daran festhalten will, komplexe Größen zu verwenden, um bestimmte Symmetrien in Evidenz zu setzen.

Eine lineare homogene Transformation

$$(21) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 + \alpha_{14}x'_4, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 + \alpha_{24}x'_4, \\ x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 + \alpha_{34}x'_4, \\ x_4 &= \alpha_{41}x'_1 + \alpha_{42}x'_2 + \alpha_{43}x'_3 + \alpha_{44}x'_4 \end{aligned}$$

von der Determinante  $+1$ , in welcher alle Koeffizienten ohne einen Index 4 reell, dagegen  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ ,  $\alpha_{34}$  sowie  $\alpha_{41}$ ,  $\alpha_{42}$ ,  $\alpha_{43}$  rein imaginär (ev. Null), endlich  $\alpha_{44}$  wieder reell und speziell  $> 0$  ist und durch welche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ in } x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

übergeht, will ich allgemein eine *Lorentz-Transformation* nennen.

Wird

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = z', \quad x_4' = it'$$

gesetzt, so entsteht daraus sofort eine homogene lineare Transformation von  $x, y, z, t$  in  $x', y', z', t'$  mit lauter reellen Koeffizienten, wobei das Aggregat

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \text{ in } -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2$$

übergeht und einem jeden solchen Wertesystem  $x, y, z, t$  mit *positivem*  $t$ , wofür dieses Aggregat  $> 0$  ausfällt, stets auch ein *positives*  $t'$  entspricht; letzteres ist aus der Kontinuität des Aggregats in  $x, y, z, t$  leicht ersichtlich.

Die letzte Vertikalreihe des Koeffizientensystems von (21) hat die Bedingung

$$(22) \quad \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1$$

zu erfüllen.

Sind  $\alpha_{14} = 0$ ,  $\alpha_{24} = 0$ ,  $\alpha_{34} = 0$ , so ist  $\alpha_{44} = 1$  und die Lorentz-Transformation reduziert sich auf eine bloße Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Sind  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ ,  $\alpha_{34}$  nicht sämtlich Null und setzt man

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = v_x : v_y : v_z : i,$$

so folgt aus (22) der Betrag

$$q = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} < 1.$$

Andererseits kann man zu jedem Wertesystem  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ ,  $\alpha_{34}$ ,  $\alpha_{44}$ , das in dieser Weise mit reellen  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  die Bedingung (22) erfüllt, die *spezielle* Lorentz-Transformation (16) mit  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ ,  $\alpha_{34}$ ,  $\alpha_{44}$  als letzter Vertikalreihe konstruieren und jede Lorentz-Transformation mit der nämlichen letzten Vertikalreihe der Koeffizienten kann alsdann zusammengesetzt werden aus dieser speziellen Lorentz-Transformation und einer sich daran anschließenden Drehung des räumlichen Koordinatensystems um den Nullpunkt.

Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bildet eine *Gruppe*.

Unter einem *Raum-Zeit-Vektor* I. Art soll verstanden werden ein beliebiges System von vier Größen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$ ,  $\varrho_4$  mit der Vorschrift, bei jeder Lorentz-Transformation (21) es durch dasjenige System  $\varrho'_1$ ,  $\varrho'_2$ ,  $\varrho'_3$ ,  $\varrho'_4$  zu ersetzen, das aus (21) für die Werte  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ ,  $x'_4$  hervorgeht, wenn für  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  die Werte  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $\varrho_3$ ,  $\varrho_4$  genommen werden.

Verwenden wir neben dem variablen Raum-Zeit-Vektor I. Art  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  einen zweiten solchen variablen Raum-Zeit-Vektor I. Art  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  und fassen die bilineare Verbindung

$$(23) \quad f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + f_{31}(x_3 u_1 - x_1 u_3) + f_{12}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ + f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + f_{24}(x_2 u_4 - x_4 u_2) + f_{34}(x_3 u_4 - x_4 u_3)$$

mit sechs Koeffizienten  $f_{23}, \dots, f_{34}$  auf. Wir bemerken, daß diese einerseits sich in vektorieller Schreibweise aus den vier Vektoren

$$x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3; f_{23}, f_{31}, f_{12}; f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

und den Konstanten  $x_4$  und  $u_4$  aufbauen läßt, andererseits symmetrisch in den Indizes 1, 2, 3, 4 ist. Indem wir  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  und  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  gleichzeitig gemäß der Lorentz-Transformation (21) substituieren, geht (23) in eine Verbindung

$$(24) \quad f'_{23}(x'_2 u'_3 - x'_3 u'_2) + f'_{31}(x'_3 u'_1 - x'_1 u'_3) + f'_{12}(x'_1 u'_2 - x'_2 u'_1) \\ + f'_{14}(x'_1 u'_4 - x'_4 u'_1) + f'_{24}(x'_2 u'_4 - x'_4 u'_2) + f'_{34}(x'_3 u'_4 - x'_4 u'_3)$$

mit gewissen allein von den sechs Größen  $f_{23}, \dots, f_{34}$  und den sechzehn Koeffizienten  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{44}$  abhängenden sechs Koeffizienten  $f'_{23}, \dots, f'_{34}$  über.

Einen *Raum-Zeit-Vektor II. Art* definieren wir als ein System von sechs Größen  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$  mit der Vorschrift, es bei jeder Lorentz-Transformation durch dasjenige neue System  $f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$  zu ersetzen, das dem eben erörterten Zusammenhange der Form (23) mit der Form (24) entspricht.

Das allgemeine Theorem der Relativität betreffend die Gleichungen (I)–(IV), die „Grundgleichungen für den Äther“, spreche ich nunmehr folgendermaßen aus.

Werden  $x, y, z, it$  (Raumkoordinaten und Zeit  $\propto i$ ) einer beliebigen Lorentz-Transformation unterworfen und gleichzeitig  $\varrho w_x, \varrho w_y, \varrho w_z, i\varrho$  (Konvektionsstrom und Ladungsdichte  $\propto i$ ) als *Raum-Zeit-Vektor I. Art*, ferner  $m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z$  (magnetische Kraft und elektrische Erregung  $\propto -i$ ) als *Raum-Zeit-Vektor II. Art* transformiert, so geht das System der Gleichungen (I), (II) und das System der Gleichungen (III), (IV) je in das System der entsprechend lautenden Beziehungen zwischen den entsprechenden neu eingeführten Größen über.

Kürzer mag diese Tatsache auch mit den Worten angedeutet werden: Das System der Gleichungen (I), (II) wie das System der Gleichungen (III), (IV) ist kovariant bei jeder Lorentz-Transformation, wobei  $\varrho w, i\varrho$  als *Raum-Zeit-Vektor I. Art*,  $m, -ie$  als *Raum-Zeit-Vektor II. Art* zu transformieren ist. Oder noch prägnanter:

$\varrho w, i\varrho$  ist ein *Raum-Zeit-Vektor I. Art*,  $m, -ie$  ist ein *Raum-Zeit-Vektor II. Art*.

Ich füge noch einige Bemerkungen hier an, um die Vorstellung eines *Raum-Zeit-Vektors II. Art* zu erleichtern. *Invarianten* für einen solchen Vektor  $m, -ie$  bei der Gruppe der Lorentz-Transformationen sind offenbar

$$(25) \quad m^2 - e^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2,$$

$$(26) \quad me = i(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}).$$

Ein *Raum-Zeit-Vektor II. Art*  $m, -ie$  (wobei  $m$  und  $e$  reelle Raum-Vektoren sind), mag *singulär* heißen, wenn das skalare Quadrat  $(m - ie)^2 = 0$ , d. h.  $m^2 - e^2 = 0$  und zugleich  $(me) = 0$  ist, d. h. die Vektoren  $m$  und  $e$  gleichen Betrag haben und zudem senkrecht aufeinander stehen. Wenn solches der Fall ist, bleiben diese zwei Eigenschaften für den *Raum-Zeit-Vektor II. Art* bei jeder Lorentz-Transformation erhalten.

Ist der *Raum-Zeit-Vektor II. Art*  $m, -ie$  nicht *singulär*, so drehen wir zunächst das räumliche Koordinatensystem so, daß das Vektorprodukt  $[me]$  in die  $z$ -Achse fällt, daß  $m_z = 0, e_z = 0$  ist. Dann ist

$$(m_x - ie_x)^2 + (m_y - ie_y)^2 \neq 0,$$

also  $\frac{e_y + im_y}{e_x + im_x}$  verschieden von  $\pm i$  und wir können daher ein komplexes Argument  $\varphi + i\psi$  derart bestimmen, daß

$$\operatorname{tg}(\varphi + i\psi) = \frac{e_y + im_y}{e_x + im_x}$$

ist. Alsdann wird mit Rücksicht auf die Gleichung (9) durch die zu  $\psi$  gehörige Transformation (1) und eine nachherige Drehung um die  $z$ -Achse durch den Winkel  $\varphi$  eine Lorentz-Transformation bewirkt, nach der auch noch  $m_y = 0$ ,  $e_y = 0$  werden, also nunmehr  $m$  und  $e$  beide in die neue  $x$ -Linie fallen; dabei sind durch die Invarianten  $m^2 - e^2$  und  $(me)$  die schließlichen Größen dieser Vektoren und ob sie von gleicher oder entgegengesetzter Richtung werden oder einer Null wird, von vornherein fixiert.

## § 6.

### Begriff der Zeit.

Durch die Lorentz-Transformationen werden gewisse Abänderungen des Zeitparameters zugelassen. Infolgedessen ist es nicht mehr statthaft, von der *Gleichzeitigkeit* zweier Ereignisse an sich zu sprechen. Die Verwendung dieses Begriffes setzt vielmehr voraus, daß die Freiheit der 6 Parameter, die zur Angabe eines Bezugssystems für Raum und Zeit offen steht, bereits in gewisser Weise auf eine Freiheit von nur 3 Parametern eingeschränkt ist. Nur weil wir gewohnt sind, diese Einschränkung stark approximativ eindeutig zu treffen, halten wir den Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse als an sich existierend.\*) In Wahrheit aber sollen folgende Umstände zutreffen.

Ein Bezugssystem  $x, y, z, t$  für Raum-Zeitpunkte (Ereignisse) sei irgendwie bekannt. Wird ein Raumpunkt  $A(x_0, y_0, z_0)$  zur Zeit  $t_0 = 0$  mit einem anderen Raumpunkte  $P(x, y, z)$  zu einer anderen Zeit  $t$  verglichen und ist die Zeitdifferenz  $t - t_0$  (es sei etwa  $t > t_0$ ) *kleiner* als die Länge  $AP$ , d. i. die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von  $A$  nach  $P$  braucht, und ist  $q$  der Quotient  $\frac{t - t_0}{AP} < 1$ , so können wir durch die spezielle Lorentz-Transformation, die  $AP$  als Achse und  $q$  als Moment hat, einen neuen Zeitparameter  $t'$  einführen, der (s. Gleichung (12) in § 4) für beide Raum-Zeitpunkte  $A, t_0$  und  $P, t$  den gleichen Wert  $t' = 0$  erlangt; es lassen sich also diese zwei Ereignisse auch als gleichzeitig auffassen.

---

\*) Ungefähr wie Wesen, gebannt an eine enge Umgebung eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, darauf verfallen könnten, die Kugel sei ein geometrisches Gebilde, an welchem ein Durchmesser an sich ausgezeichnet ist.

Nehmen wir weiter zu einer und derselben Zeit  $t_0 = 0$  zwei verschiedene Raumpunkte  $A, B$  oder drei Raumpunkte  $A, B, C$ , die nicht in einer Geraden liegen, und vergleichen damit einen Raumpunkt  $P$  außerhalb der Geraden  $AB$  oder der Ebene  $ABC$  zu einer anderen Zeit  $t$  und ist die Zeitdifferenz  $t - t_0$  (es sei etwa  $t > t_0$ ) *kleiner* als die Zeit, die das Licht zur Fortpflanzung von der Geraden  $AB$  oder der Ebene  $ABC$  nach  $P$  braucht, und  $q$  der Quotient aus der ersteren und der letzteren Zeit, so erscheinen nach Anwendung der speziellen Lorentz-Transformation, die als Achse das Lot auf  $AB$ , bzw.  $ABC$  durch  $P$  und als Moment  $q$  hat, alle drei (beziehungsweise vier) Ereignisse  $A, t_0; B, t_0; (C, t_0)$  und  $P, t$  als gleichzeitig.

Werden jedoch vier Raumpunkte, die nicht in einer Ebene liegen, zu einer und derselben Zeit  $t_0$  aufgefaßt, so ist es nicht mehr möglich, durch eine Lorentz-Transformation eine Abänderung des Zeitparameters vorzunehmen, ohne daß der Charakter der Gleichzeitigkeit dieser vier Raum-Zeitpunkte verloren geht.

Dem Mathematiker, der an Betrachtungen über mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten und andererseits an die Begriffsbildungen der sogenannten nicht-Euklidischen Geometrie gewöhnt ist, kann es keine wesentliche Schwierigkeit bereiten, den Begriff der Zeit an die Verwendung der Lorentz-Transformationen zu adaptieren. Dem Bedürfnisse, sich das Wesen dieser Transformationen physikalisch näher zu bringen, kommt der in der Einleitung zitierte Aufsatz von A. Einstein entgegen.

## Zweiter Teil.

### Die elektromagnetischen Vorgänge.

#### § 7.

#### Die Grundgleichungen für ruhende Körper.

Nach diesen vorbereitenden Ausführungen, die wir des etwas geringeren mathematischen Apparates wegen an dem idealen Grenzfalle  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  entwickelten, wenden wir uns jetzt zu den Gesetzen für die elektromagnetischen Vorgänge in der Materie. Wir suchen diejenigen Beziehungen, die es — unter Voraussetzung geeigneter Grenzdaten — ermöglichen, an jedem Orte und zu jeder Zeit, also als Funktionen von  $x, y, z, t$  zu finden: die Vektoren der elektrischen Kraft  $\mathfrak{E}$ , der magnetischen Erregung  $\mathfrak{M}$ , der elektrischen Erregung  $\mathfrak{e}$ , der magnetischen Kraft  $\mathfrak{m}$ , die elektrische Raumdichte  $\varrho$ , den Vektor „elektrischer Strom  $\mathfrak{s}$ “ (dessen Beziehung zum Leitungsstrom hernach durch die Art des Auftretens der



Leitfähigkeit zu erkennen sein wird), endlich den Vektor  $\mathfrak{m}$ , die Geschwindigkeit der Materie.

Die fraglichen Beziehungen scheiden sich in zwei Klassen,

*erstens* diejenigen Gleichungen, die, wenn der Vektor  $\mathfrak{m}$  als Funktion von  $x, y, z, t$  gegeben, also die Bewegung der Materie bekannt ist, zur Kenntnis aller anderen eben genannten Größen als Funktionen von  $x, y, z, t$  hinführen, — diese erste Klasse speziell will ich die *Grundgleichungen* nennen, —

*zweitens* die Ausdrücke für die *ponderomotorischen Kräfte*, die durch Heranziehen der Gesetze der Mechanik weiter Aufschluß über den Vektor  $\mathfrak{m}$  als Funktion von  $x, y, z, t$  bringen.

Für den Fall *ruhender Körper*, d. i. wenn  $\mathfrak{m}(x, y, z, t) = 0$  gegeben ist, kommen die Theorien von Maxwell (Heaviside, Hertz) und von Lorentz zu den nämlichen Grundgleichungen. Es sind dies

1) die *Differentialgleichungen*, die noch keine auf die Materie bezüglichen Konstanten enthalten:

$$(I) \quad \text{curl } \mathfrak{m} - \frac{\partial \mathfrak{e}}{\partial t} = \mathfrak{s},$$

$$(II) \quad \text{div } \mathfrak{e} = \varrho,$$

$$(III) \quad \text{curl } \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } \mathfrak{M} = 0;$$

2) weitere Beziehungen, die den Einfluß der vorhandenen Materie charakterisieren; sie werden in dem wichtigsten Falle, auf den wir uns hier beschränken, für isotrope Körper, angesetzt in der Gestalt

$$(V) \quad \mathfrak{e} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = \mu \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{s} = \sigma \mathfrak{E},$$

wobei  $\varepsilon$  die Dielektrizitätskonstante,  $\mu$  die magnetische Permeabilität,  $\sigma$  die Leitfähigkeit der Materie als Funktionen von  $x, y, z$  und  $t$  bekannt zu denken sind.  $\mathfrak{s}$  ist hier als *Leitungsstrom* anzusprechen.

Ich lasse nun an diesen Gleichungen wieder durch eine veränderte Schreibweise eine noch versteckte Symmetrie hervortreten. Ich setze wie in den vorangeschickten Ausführungen

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = it$$

und schreibe

$$s_1, s_2, s_3, s_4$$

für

$$\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z, i\varrho,$$

ferner

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

für

$$m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z$$

und noch

$$F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{14}, F_{24}, F_{34}$$

für

$$\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z, -i\mathfrak{E}_x, -i\mathfrak{E}_y, -i\mathfrak{E}_z;$$

endlich soll für andere Paare von ungleichen, der Reihe 1, 2, 3, 4 entnommenen Indizes  $h, k$  stets

$$f_{kh} = -f_{hk}, \quad F_{kh} = -F_{hk}$$

gelten. (Die Buchstaben  $f, F$  sollen an das Wort Feld,  $s$  an Strom erinnern.)

Dann schreiben sich die Gleichungen (I), (II) um in

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = s_1, \\ & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} = s_2, \\ & \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} = s_3, \\ & \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} = s_4, \end{aligned} \quad (\text{A})$$

und die Gleichungen (III), (IV) schreiben sich um in

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_2} = 0, \\ & \frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} = 0, \\ & \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} = 0, \\ & \frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

## § 8.

### Die Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nunmehr wird es uns gelingen, die Grundgleichungen für beliebig bewegte Körper in eindeutiger Weise festzustellen, ausschließlich mittels folgender drei Axiome:

Das erste Axiom soll sein:

Wenn eine einzelne Stelle der Materie in einem Momente ruht, also der Vektor  $\mathfrak{w}$  für ein System  $x, y, z, t$  Null ist, — die Umgebung mag in irgendwelcher Bewegung begriffen sein —, so sollen für den Raum-Zeitpunkt  $x, y, z, t$  zwischen  $\varrho$ , den Vektoren  $\mathfrak{s}, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$  und deren Ableitungen nach  $x, y, z, t$  genau die Beziehungen (A), (B), (V) statt haben, die zu gelten hätten, falls alle Materie ruhte.

Das zweite Axiom soll sein:

*Jede Geschwindigkeit der Materie ist  $< 1$ , kleiner als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume.*

Das dritte Axiom soll sein:

*Die Grundgleichungen sind von solcher Art, daß, wenn  $x, y, z$ , in irgendeiner Lorentz-Transformation unterworfen und dabei einerseits  $m, -ie$ , andererseits  $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$ , je als Raum-Zeit-Vektor II. Art,  $\mathfrak{s}, iq$  als Raum-Zeit-Vektor I. Art transformiert werden, die Gleichungen dadurch in die genau entsprechend lautenden Gleichungen zwischen den transformierten Größen übergehen.*

Dieses dritte Axiom deute ich auch kurz mit den Worten an:

$m, -ie$  und  $\mathfrak{M}, -i\mathfrak{E}$  sind je ein Raum-Zeit-Vektor II. Art,  $\mathfrak{s}, iq$  ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, und dieses Axiom nenne ich das *Prinzip der Relativität*.

Diese drei Axiome führen uns in der Tat von den vorhin genannten Grundgleichungen für ruhende Körper in eindeutiger Weise zu den Grundgleichungen für bewegte Körper.

Nämlich nach dem zweiten Axiom ist in jedem Raum-Zeitpunkte der Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $|\mathfrak{w}| < 1$ . Infolgedessen können wir dem Vektor  $\mathfrak{w}$  stets umkehrbar eindeutig das Quadrupel von Größen

$$w_1 = \frac{m_x}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_2 = \frac{m_y}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_3 = \frac{m_z}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-w^2}}$$

zuordnen, zwischen denen die Beziehung

$$(27) \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

statthalt. Aus den Ausführungen am Schlusse des § 4 ist ersichtlich, daß dieses Quadrupel sich bei Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor I. Art verhält, und wir wollen es den *Raum-Zeit-Vektor Geschwindigkeit* nennen.

Fassen wir nun eine bestimmte Stelle  $x, y, z$  der Materie zu einer bestimmten Zeit  $t$  auf. Ist in diesem Raum-Zeitpunkte  $\mathfrak{w} = 0$ , so haben wir für ihn nach dem ersten Axiom unmittelbar die Gleichungen (A), (B), (V) aus § 7. Ist in ihm  $\mathfrak{w} \neq 0$ , so existiert, weil  $|\mathfrak{w}| < 1$  ist, nach (16) eine spezielle Lorentz-Transformation, deren Vektor  $\mathfrak{v}$  gleich diesem Vektor  $\mathfrak{w}(x, y, z, t)$  ist, und wir gehen allgemein zu einem neuen Bezugssystem  $x', y', z', t'$  gemäß dieser bestimmten Transformation über. Für den betrachteten Raum-Zeitpunkt entstehen dabei, wie wir in § 4 sahen, die neuen Werte

$$(28) \quad w_1' = 0, \quad w_2' = 0, \quad w_3' = 0, \quad w_4' = i,$$

und also der neue Geschwindigkeitsvektor  $\mathfrak{w}' = 0$ , der *Raum-Zeitpunkt*

wird, wie wir uns dort ausdrückten, auf Ruhe transformiert. Nun sollen nach dem dritten Axiom aus den Grundgleichungen für den Raum-Zeitpunkt  $x, y, z, t$  dabei die Grundgleichungen für das entsprechende System  $x', y', z', t'$ , geschrieben in den transformierten Größen  $w', \varrho', \mathfrak{E}', e', m', \mathfrak{M}'$  und deren Differentialquotienten nach  $x', y', z', t'$  hervorgehen. Diese letzteren Gleichungen aber müssen, nach dem ersten Axiom, weil jetzt  $w' = 0$  ist, genau sein:

1) diejenigen Differentialgleichungen (A'), (B'), die aus (A) und (B) einfach dadurch hervorgehen, daß alle Buchstaben dort mit einem oberen Strich versehen werden,

2) die Gleichungen

$$(V') \quad e' = \varepsilon \mathfrak{E}', \quad \mathfrak{M}' = \mu m', \quad \mathfrak{z}' = \sigma \mathfrak{E}',$$

wobei  $\varepsilon, \mu, \sigma$  Dielektrizitätskonstante, magnetische Permeabilität, Leitfähigkeit für das System  $x', y', z', t'$ , d. i. also im betrachteten Raum-Zeitpunkte  $x, y, z, t$  der Materie sind.

Jetzt gehen wir durch die reziproke Lorentz-Transformation rückwärts zu den ursprünglichen Variablen  $x, y, z, t$  und den Größen  $w, \varrho, \mathfrak{z}, e, m, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$  und die Gleichungen, die wir dann aus den eben genannten erhalten, werden die von uns gesuchten allgemeinen Grundgleichungen für bewegte Körper sein.

Nun ist aus den Ausführungen in § 4 und § 5 zu ersehen, daß sowohl das Gleichungssystem (A) für sich wie das Gleichungssystem (B) für sich kovariant bei den Lorentz-Transformationen ist; d. h. die Gleichungen, die wir von (A'), (B') rückwärts erlangen, müssen genau gleichlauten mit den Gleichungen (A), (B), wie wir sie für ruhende Körper annahmen. Wir haben also als erstes Ergebnis:

*Von den Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper lauten die Differentialgleichungen, geschrieben in  $\varrho$  und den Vektoren  $\mathfrak{z}, e, m, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}$  genau wie für ruhende Körper. Die Geschwindigkeit der Materie tritt in diesen Gleichungen noch nicht auf. In vektorieller Schreibweise sind diese Gleichungen also wieder*

$$(I) \quad \text{curl } m - \frac{\partial e}{\partial t} = \mathfrak{z},$$

$$(II) \quad \text{div } e = \varrho,$$

$$(III) \quad \text{curl } \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } \mathfrak{M} = 0.$$

*Die Geschwindigkeit der Materie wird ausschließlich auf die Zusatzbedingungen verwiesen, welche den Einfluß der Materie auf Grund ihrer speziellen Konstanten  $\varepsilon, \mu, \sigma$  charakterisieren. Transformieren wir jetzt*

diese Zusatzbedingungen (V') zurück auf die ursprünglichen Koordinaten  $x, y, z$  und die ursprüngliche Zeit  $t$ .

Nach den Formeln (15) in § 4 ist für die Richtung des Vektors  $w$  die Komponente von  $e'$  dieselbe wie von  $e + [wm]$ , die von  $m'$  dieselbe wie von  $m - [we]$ , für jede dazu senkrechte Richtung  $\bar{w}$  aber ist die Komponente von  $e'$  bzw.  $m'$  gleich der entsprechenden Komponente von  $e + [wm]$  bzw. von  $m - [we]$ , jedesmal multipliziert noch mit  $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ .

Andererseits werden  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{M}'$  hier zu  $\mathcal{E} + [w\mathcal{M}]$  und  $\mathcal{M} - [w\mathcal{E}]$  in den ganz analogen Beziehungen stehen wie  $e'$  und  $m'$  zu  $e + [wm]$  und  $m - [we]$ . So führt die Relation  $e' = \varepsilon \mathcal{E}'$ , indem man bei den Vektoren zuerst die Komponenten nach der Richtung  $w$ , dann diejenigen nach zwei zu  $w$  und aufeinander senkrechten Richtungen  $\bar{w}$  behandelt und die in letzteren Fällen entstehenden Gleichungen mit  $\sqrt{1-w^2}$  multipliziert, zu

$$(C) \quad e + [wm] = \varepsilon (\mathcal{E} + [w\mathcal{M}]).$$

Die Relation  $\mathcal{M}' = \mu m'$  wird analog auf

$$(D) \quad \mathcal{M} - [w\mathcal{E}] = \mu (m - [we])$$

hinauslaufen.

Weiter folgt nach den Transformationsgleichungen (12), (10), (11) in § 4, indem dort  $q, r_v, r_{\bar{v}}, t, r', r'_{\bar{v}}, t'$  durch  $|w|, \mathfrak{s}_w, \mathfrak{s}_{\bar{w}}, \varrho, \mathfrak{s}'_w, \mathfrak{s}'_{\bar{w}}, \varrho'$  zu ersetzen sind,

$$\varrho' = \frac{-|w|\mathfrak{s}_w + \varrho}{\sqrt{1-w^2}}, \quad \mathfrak{s}'_w = \frac{\mathfrak{s}_w - |w|\varrho}{\sqrt{1-w^2}}, \quad \mathfrak{s}'_{\bar{w}} = \mathfrak{s}_{\bar{w}},$$

so daß aus  $\mathfrak{s}' = \sigma \mathcal{E}'$  nunmehr

$$(E) \quad \frac{\mathfrak{s}_w - |w|\varrho}{\sqrt{1-w^2}} = \sigma (\mathcal{E} + [w\mathcal{M}])_w, \\ \mathfrak{s}_w = \frac{\sigma (\mathcal{E} + [w\mathcal{M}])_{\bar{w}}}{\sqrt{1-w^2}}$$

hervorgeht. Nach der Art, wie hier die Leitfähigkeit  $\sigma$  eingeht, wird es angemessen sein, den Vektor  $\mathfrak{s} - \varrho w$  mit den Komponenten  $\mathfrak{s}_w - \varrho|w|$  nach der Richtung  $w$  und  $\mathfrak{s}_{\bar{w}}$  nach den auf  $w$  senkrechten Richtungen  $\bar{w}$ , der für  $\sigma = 0$  verschwindet, als *Leitungsstrom* zu bezeichnen.

Wir bemerken, daß für  $\varepsilon = 1, \mu = 1$  die Gleichungen  $e' = \mathcal{E}', m' = \mathcal{M}'$  durch die reziproke Lorentz-Transformation, die hier die spezielle mit  $-w$  als Vektor wird, gemäß (15) sofort zu  $e = \mathcal{E}, m = \mathcal{M}$  führen und daß für  $\sigma = 0$  die Gleichung  $\mathfrak{s}' = 0$  zu  $\mathfrak{s} = \varrho w$  führt, so daß in der Tat als Grenzfall der hier erhaltenen Gleichungen für  $\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$  sich die in § 2 betrachteten „Grundgleichungen für den Äther“ ergeben.

§ 9.

Die Grundgleichungen in der Theorie von Lorentz.

Sehen wir nun zu, inwieweit die Grundgleichungen, die Lorentz annimmt, dem Relativitätspostulate, das soll heißen dem in § 8 formulierten Relativitätsprinzipie entsprechen. In dem Artikel „Elektronentheorie“ (Enzykl. der math. Wiss., Bd. V 2, Art. 14) hat Lorentz für beliebige, auch magnetisierte Körper zunächst die Differentialgleichungen (s. dort S. 209 unter Berücksichtigung von Gl. XXX' daselbst und von Formel (14) auf S. 78 desselben Heftes):

$$(IIIa'') \quad \text{curl} (\mathfrak{H} - [w \mathfrak{E}]) = \mathfrak{J} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + w \text{div} \mathfrak{D} - \text{curl} [w \mathfrak{D}],$$

$$(I'') \quad \text{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$(IV'') \quad \text{curl} \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$(V'') \quad \text{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Dann setzt Lorentz für bewegte nicht magnetisierte Körper (S. 223, Z. 3)  $\mu = 1$ ,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$  und nimmt dazu das Eingehen der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$  gemäß

$$(Gl. XXXIV'', S. 227) \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1) (\mathfrak{E} + [w \mathfrak{B}]),$$

$$(Gl. XXXIII'', S. 223) \quad \mathfrak{J} = \sigma (\mathfrak{E} + [w \mathfrak{B}])$$

an. Die Lorentzschen Zeichen  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{H}$  sind hier durch  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{e}$ ,  $\mathfrak{m}$  ersetzt, während  $\mathfrak{J}$  bei Lorentz als Leitungsstrom bezeichnet wird.

Die drei letzten der zitierten Differentialgleichungen nun decken sich sofort mit den Gleichungen (II), (III), (IV) hier, die erste Gleichung aber würde, indem wir  $\mathfrak{J}$  mit dem für  $\sigma = 0$  verschwindenden Strom  $\mathfrak{s} - w \varrho$  identifizieren, in

$$(29) \quad \text{curl} (\mathfrak{H} - [w \mathfrak{E}]) = \mathfrak{s} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \text{curl} [w \mathfrak{D}]$$

übergehen und verschieden von (I) hier ausfallen. Danach entsprechen die allgemeinen Differentialgleichungen von Lorentz für beliebig magnetisierte Körper *nicht* dem Relativitätsprinzipie.

Andererseits würde die dem Relativitätsprinzipie entsprechende Form für die Bedingung des Nichtmagnetisiertseins aus (D) in § 8 mit  $\mu = 1$  *nicht* wie bei Lorentz als  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ , sondern als

$$(30) \quad \mathfrak{B} - [w \mathfrak{E}] = \mathfrak{H} - [w \mathfrak{D}] \quad (\text{hier } \mathfrak{M} - [w \mathfrak{E}] = \mathfrak{m} - [w \mathfrak{e}])$$

anzunehmen sein. Nun geht aber die zuletzt hingeschriebene Differentialgleichung (29) durch  $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$  in dieselbe Gleichung (abgesehen von der Verschiedenheit der Zeichen) über, in welche (I) hier sich durch

$m - [w\epsilon] = \mathfrak{M} - [w\mathfrak{E}]$  verwandeln würde. So kommt es durch eine Kompensation zweier Widersprüche gegen das Relativitätsprinzip zustande, daß für nicht magnetisierte bewegte Körper die Differentialgleichungen von Lorentz sich zuletzt dem Relativitätsprinzip doch anpassen.

Macht man weiter für nicht magnetisierte Körper von (30) hier Gebrauch und setzt demgemäß  $\mathfrak{S} = \mathfrak{B} + [w, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]$ , so würde zufolge (C) in § 8

$$(\epsilon - 1)(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{B}]) = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + [w[w, \mathfrak{D} - \mathfrak{E}]]$$

anzunehmen sein, d. i. für die Richtung von  $w$ :

$$(\epsilon - 1)(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{B}])_w = (\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_w,$$

und für jede zu  $w$  senkrechte Richtung  $\bar{w}$ :

$$(\epsilon - 1)(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{B}])_{\bar{w}} = (1 - w^2)(\mathfrak{D} - \mathfrak{E})_{\bar{w}},$$

d. i. mit der oben genannten Lorentzschen Annahme nur in Übereinstimmung bis auf Fehler von der Ordnung  $w^2$  gegen 1.

Auch nur mit dem gleichen Grade der Annäherung entspricht der oben genannte Lorentzsche Ansatz für  $\mathfrak{S}$  den durch das Relativitätsprinzip geforderten Beziehungen (vgl. (E) in § 8), daß die Komponenten  $\mathfrak{S}_w$  bzw.  $\mathfrak{S}_{\bar{w}}$  gleich den entsprechenden Komponenten von  $\sigma(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{B}])$ , multipliziert in  $\sqrt{1 - w^2}$  bzw. in  $\frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}$  seien.

## § 10.

### Die Grundgleichungen nach E. Cohn.

E. Cohn\*) nimmt folgende Grundgleichungen an:

$$(31) \quad \text{curl}(M + [w\mathfrak{E}]) = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + w \text{div } \mathfrak{E} + \mathfrak{S},$$

$$- \text{curl}(E - [w\mathfrak{M}]) = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + w \text{div } \mathfrak{M},$$

$$(32) \quad \mathfrak{S} = \sigma E, \quad \mathfrak{E} = \epsilon E - [wM], \quad \mathfrak{M} = \mu M + [wE],$$

wobei  $E, M$  als elektrische und magnetische Feldintensität (Kraft),  $\mathfrak{E}, \mathfrak{M}$  als elektrische und magnetische Polarisation (Erregung) aufgefaßt werden. Die Gleichungen lassen noch das Vorhandensein von wahren Magnetismus zu; wollen wir davon absehen, so ist  $\text{div } \mathfrak{M} = 0$  zu setzen.

Ein Einwand gegen diese Gleichungen ist, daß nach ihnen für  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  nicht die Vektoren Kraft und Erregung zusammenfallen. Fassen wir jedoch in den Gleichungen nicht  $E$  und  $M$ , sondern  $E - [w\mathfrak{M}]$  und  $M + [w\mathfrak{E}]$  als elektrische und magnetische Kraft auf und substituieren

\*) Gött. Nachr. 1901, S. 74 (auch in Ann. d. Phys. 7 (4), 1902, p. 29).

im Hinblick hierauf für  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $E$ ,  $M$ ,  $\text{div } \mathfrak{E}$  die Zeichen  $e$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{E} + [w\mathfrak{M}]$ ,  $m - [we]$ ,  $e$ , so gehen zunächst die Differentialgleichungen in unsere Gleichungen über und zugleich verwandeln die Bedingungen (32) sich in

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= \sigma(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{M}]), \\ e + [w, m - [we]] &= \varepsilon(\mathfrak{E} + [w\mathfrak{M}]), \\ \mathfrak{M} - [w, \mathfrak{E} + [w\mathfrak{M}]] &= \mu(m - [we]);\end{aligned}$$

damit würden in der Tat diese Gleichungen von Cohn bis auf Fehler von der Ordnung  $w^2$  gegen 1 genau die durch das Relativitätsprinzip geforderten werden.

Erwähnt sei noch, daß die von Hertz angenommenen Gleichungen (in den Bezeichnungen von Cohn) lauten wie (31) mit den anderen Zusatzbedingungen

$$(33) \quad \mathfrak{E} = \varepsilon E, \quad \mathfrak{M} = \mu M, \quad \mathfrak{S} = \sigma E;$$

und dieses Gleichungssystem würde auch nicht bei irgendwelcher veränderten Bezugnahme der Zeichen auf beobachtbare Größen sich dem Relativitätsprinzip bis auf Fehler von der Ordnung  $w^2$  gegen 1 anpassen.

## § 11.

### Typische Darstellung der Grundgleichungen.

Bei der Aufstellung der Grundgleichungen leitete uns der Gedanke, für sie eine Kovarianz bezüglich der Gruppe der Lorentz-Transformationen zu erzielen. Jetzt haben wir noch die ponderomotorischen Wirkungen und die Umsetzung der Energie im elektromagnetischen Felde zu behandeln, und da kann es von vornherein nicht zweifelhaft sein, daß die Erledigung dieser Fragen jedenfalls zusammenhängen wird mit den einfachsten, an die Grundgleichungen anknüpfenden Bildungen, die wieder Kovarianz bei den Lorentz-Transformationen zeigen. Um auf diese Bildungen hingewiesen zu werden, will ich vor allem die Grundgleichungen jetzt in eine *typische Form* bringen, die ihre Kovarianz bei der Lorentz'schen Gruppe in Evidenz setzt. Dabei bediene ich mich einer Rechenmethode, die ein abgekürztes Operieren mit den Raum-Zeit-Vektoren I. und II. Art bezweckt, und deren Regeln und Bezeichnungen, soweit sie für uns nützlich sein werden, ich hier zuvörderst zusammenstelle.

#### 1°. Ein System von Größen

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}, & \dots, & a_{pq} \end{vmatrix},$$



angeordnet in  $p$  Horizontal-,  $q$  Vertikalreihen, heiße eine  $p \times q$ -reihige Matrix\*) und werde mit einem einzigen Zeichen, etwa hier  $A$ , bezeichnet.

Werden alle Größen  $a_{hk}$  mit dem nämlichen Faktor  $c$  multipliziert, so soll die entstehende Matrix der Größen  $ca_{hk}$  mit  $cA$  bezeichnet werden.

Werden die Rollen der Horizontal- und Vertikalreihen in  $A$  vertauscht, so erhält man eine  $q \times p$ -reihige Matrix, welche die transponierte von  $A$  heißt und mit  $\bar{A}$  bezeichnet werden soll:

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1q}, & \dots, & a_{pq} \end{vmatrix}.$$

Hat man eine zweite Matrix mit gleichen Anzahlen  $p$  und  $q$ , wie  $A$ ,

$$B = \begin{vmatrix} b_{11}, & \dots, & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}, & \dots, & b_{pq} \end{vmatrix},$$

so soll  $A + B$  die ebenfalls  $p \times q$ -reihige Matrix aus den entsprechenden Binomen  $a_{hk} + b_{hk}$  bedeuten.

2°. Hat man zwei Matrizen

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}, & \dots, & a_{pq} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11}, & \dots, & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1}, & \dots, & b_{qr} \end{vmatrix},$$

wobei die Anzahl der Horizontalreihen der zweiten gleich der Anzahl der Vertikalreihen der ersten ist, so wird unter  $AB$ , dem Produkte aus  $A$  und  $B$ , die Matrix

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1}, & \dots, & c_{pr} \end{vmatrix},$$

verstanden, deren Elemente durch Kombination der Horizontalreihen von  $A$  und der Vertikalreihen von  $B$  nach der Regel

$$c_{hk} = a_{h1} b_{1k} + a_{h2} b_{2k} + \dots + a_{hq} b_{qk} \quad \begin{matrix} (h = 1, 2, \dots, p) \\ (k = 1, 2, \dots, r) \end{matrix}$$

gebildet sind. Für solche Punkte gilt das *assoziative* Gesetz  $(AB)S = A(BS)$ ; hierbei ist unter  $S$  eine dritte Matrix gedacht mit so viel Horizontalreihen, als  $B$  (und damit auch  $AB$ ) Vertikalreihen hat.

Für die transponierte Matrix zu  $C = AB$  gilt  $\bar{C} = \bar{B}\bar{A}$ .

3°. Es werden hier nur Matrizen in Betracht kommen mit höchstens vier Horizontalreihen und höchstens vier Vertikalreihen.

\*) Man könnte auch daran denken, statt des Cayleyschen Matrizenkalküls den Hamiltonschen Quaternionenkalkül heranzuziehen, doch erscheint mir der letztere für unsere Zwecke als zu eng und schwerfällig.

Als *Einheitsmatrix* (und in Gleichungen für Matrizen kurzweg mit 1) werde die  $4 \times 4$ -reihige Matrix der folgenden Elemente

$$(34) \quad \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Für ein Vielfaches  $c \cdot 1$  der Einheitsmatrix (in dem unter 1<sup>o</sup> festgesetzten Sinne einer Matrix  $cA$ ) soll dann in Gleichungen für Matrizen kurzweg  $c$  stehen.

Für eine  $4 \times 4$ -reihige Matrix  $A$  soll  $\text{Det } A$  die Determinante aus den  $4 \times 4$  Elementen der Matrix bedeuten. Ist dann  $\text{Det } A \neq 0$ , so gehört zu  $A$  eine bestimmte *reziproke* Matrix, mit  $A^{-1}$  bezeichnet, so daß  $A^{-1} A = 1$  wird. —

Eine Matrix

$$f = \begin{vmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente die Relationen  $f_{kh} = -f_{hk}$  erfüllen, heißt eine *alternierende* Matrix. Diese Relationen besagen, daß die transponierte Matrix  $\bar{f} = -f$  ist. Alsdann werde mit  $f^*$  und als die *duale* Matrix von  $f$  die ebenfalls alternierende Matrix

$$(35) \quad f^* = \begin{vmatrix} 0 & f_{34} & f_{42} & f_{23} \\ f_{43} & 0 & f_{14} & f_{31} \\ f_{24} & f_{41} & 0 & f_{12} \\ f_{32} & f_{13} & f_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Dabei wird

$$(36) \quad f^* f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34},$$

das soll nun heißen eine  $4 \times 4$ -reihige Matrix, in der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten Null sind und alle Elemente in dieser Diagonale untereinander übereinstimmen und gleich der hier rechts genannten Verbindung aus den Koeffizienten von  $f$  sind. Die Determinante von  $f$  erweist sich dann als das Quadrat

dieser Verbindung und wir wollen das Zeichen  $\text{Det}^{\frac{1}{2}} f$  eindeutig als die Abkürzung

$$(37) \quad \text{Det}^{\frac{1}{2}} f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34}$$

erklären.

## 4°. Eine lineare Transformation

$$(38) \quad x_h = \alpha_{h1} x_1' + \alpha_{h2} x_2' + \alpha_{h3} x_3' + \alpha_{h4} x_4' \quad (h = 1, 2, 3, 4)$$

werde auch einfach durch die  $4 \times 4$ -reihige Matrix der Koeffizienten

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

als Transformation A, bezeichnet. Durch die Transformation A geht der Ausdruck

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

in die quadratische Form

$$\sum \alpha_{hk} x_h' x_k' \quad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

über, wobei

$$a_{hk} = \alpha_{1h} \alpha_{1k} + \alpha_{2h} \alpha_{2k} + \alpha_{3h} \alpha_{3k} + \alpha_{4h} \alpha_{4k}$$

wird, d. h. die  $4 \times 4$ -reihige (symmetrische) Matrix der Koeffizienten  $a_{hk}$  dieser Form wird das Produkt  $\bar{A}A$  der transponierten Matrix von A in die Matrix A. Soll also durch die Transformation der neue Ausdruck

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

hervorgehen, so muß

$$(39) \quad \bar{A}A = 1$$

die Matrix 1 werden. Dieser Relation hat demnach A zu entsprechen, wenn die Transformation (38) eine Lorentz-Transformation sein soll. Für die Determinante von A folgt aus (39):  $(\text{Det } A)^2 = 1$ ,  $\text{Det } A = \pm 1$ . Die Bedingung (39) kommt zugleich auf

$$(40) \quad A^{-1} = \bar{A}$$

hinaus, d. h. die reziproke Matrix von A muß sich mit der transponierten von A decken.

Für A als Lorentz-Transformation haben wir noch weiter die Bestimmungen getroffen, daß  $\text{Det } A = +1$  sei, daß jede der Größen  $\alpha_{14}$ ,  $\alpha_{24}$ ,  $\alpha_{34}$ ,  $\alpha_{41}$ ,  $\alpha_{42}$ ,  $\alpha_{43}$  rein imaginär (bzw. Null), die anderen Koeffizienten in A reell seien und endlich noch  $\alpha_{44} > 0$  sei.

5°. Ein Raum-Zeit-Vektor I. Art  $s_1, s_2, s_3, s_4$  soll durch die  $1 \times 4$ -reihige Matrix seiner vier Komponenten:

$$(41) \quad s = |s_1, s_2, s_3, s_4|$$

repräsentiert werden und ist bei einer Lorentz-Transformation A durch  $sA$  zu ersetzen.

Ein Raum-Zeit-Vektor II. Art mit den *Komponenten*  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$  soll durch die alternierende Matrix

$$(42) \quad f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}$$

repräsentiert werden und ist (s. die in § 5 (23) und (24) festgesetzte Regel) bei einer Lorentz-Transformation  $A$  durch  $\bar{A}fA = A^{-1}fA$  zu ersetzen. Dabei gilt in bezug auf den Ausdruck (37) die Identität  $\text{Det}^{\frac{1}{2}}(\bar{A}fA) = \text{Det } A \text{ Det}^{\frac{1}{2}}f$ . Es wird danach  $\text{Det}^{\frac{1}{2}}f$  eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen (s. Gleichung (26) in § 5).

Für die duale Matrix  $f^*$  folgt dann mit Rücksicht auf (36):

$$(A^{-1}f^*A)(A^{-1}fA) = A^{-1}f^*fA = \text{Det}^{\frac{1}{2}}f \cdot A^{-1}A = \text{Det}^{\frac{1}{2}}f,$$

woraus zu ersehen ist, daß mit dem Raum-Zeit-Vektor II. Art  $f$  zusammen auch die zugehörige duale Matrix  $f^*$  sich wie ein Raum-Zeit-Vektor II. Art abändert, und es heiße deshalb  $f^*$  mit den Komponenten  $f_{14}, f_{34}, f_{24}, f_{33}, f_{31}, f_{12}$  der *duale Raum-Zeit-Vektor* von  $f$ .

6°. Sind  $w$  und  $s$  zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art, so wird unter  $w\bar{s}$  (wie auch unter  $s\bar{w}$ ) die Verbindung

$$(43) \quad w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4$$

aus den bezüglichen Komponenten zu verstehen sein. Bei einer Lorentz-Transformation  $A$  ist wegen  $(wA)(\bar{A}s) = w\bar{s}$  diese Verbindung invariant. — Ist  $w\bar{s} = 0$ , so sollen  $w$  und  $s$  *normal* zueinander heißen.

Zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art  $w, s$  geben ferner zur Bildung der  $2 \times 4$ -reihigen Matrix

$$\begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix}$$

Anlaß. Es zeigt sich dann sofort, daß das System der sechs Größen

$$(44) \quad \begin{aligned} w_3s_3 - w_2s_2, & \quad w_3s_1 - w_1s_3, & w_1s_2 - w_2s_1, & w_1s_4 - w_4s_1, \\ w_3s_4 - w_4s_2, & w_3s_4 - w_4s_3 \end{aligned}$$

sich bei den Lorentz-Transformationen als Raum-Zeit-Vektor II. Art verhält. Der Vektor II. Art mit diesen Komponenten (44) werde mit  $[w, s]$  bezeichnet. Man erschließt leicht  $\text{Det}^{\frac{1}{2}}[w, s] = 0$ . Der duale Vektor von  $[w, s]$  soll  $[w, s]^*$  geschrieben werden.

Ist  $w$  ein Raum-Zeit-Vektor I. Art,  $f$  ein Raum-Zeit-Vektor II. Art, so bedeutet  $wf$  zunächst jedenfalls eine  $1 \times 4$ -reihige Matrix. Bei einer Lorentz-Transformation  $A$  geht  $w$  in  $w' = wA$ ,  $f$  in  $f' = A^{-1}fA$  über; dabei wird  $w'f' = wAA^{-1}fA = (wf)A$ , d. h.  $wf$  transformiert sich wieder als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.

Man verifiziert, wenn  $w$  ein Vektor I.,  $f$  ein Vektor II. Art ist, leicht die wichtige Identität

$$(45) \quad [w, wf] + [w, wf^*]^* = (w\bar{w})f.$$

Die Summe der zwei Raum-Zeit-Vektoren II. Art links ist im Sinne der Summe zweier alternierenden Matrizen zu verstehen.

Nämlich für  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 0$ ,  $w_3 = 0$ ,  $w_4 = i$  wird

$$wf = |if_{41}, if_{42}, if_{43}, 0|; \quad wf^* = |if_{32}, if_{13}, if_{21}, 0|;$$

$$[w, wf] = 0, 0, 0, f_{41}, f_{42}, f_{43}; \quad [w, wf^*] = 0, 0, 0, f_{32}, f_{13}, f_{21},$$

und die Bemerkung, daß in diesem speziellen Falle die Relation (45) zutrifft, genügt bereits, um derselben allgemein sicher zu sein, da diese Relation kovarianten Charakter für die Lorentz-Gruppe hat und zudem in  $w_1, w_2, w_3, w_4$  homogen ist.

Nach diesen Vorbereitungen beschäftigen wir uns zunächst mit den Gleichungen (C), (D), (E), durch welche die Konstanten  $\varepsilon, \mu, \sigma$  eingeführt werden.

Statt des Raumvektors  $w$ , Geschwindigkeit der Materie, führen wir, wie schon in § 8, den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $w$  mit den vier Komponenten

$$w_1 = \frac{w_x}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_2 = \frac{w_y}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_3 = \frac{w_z}{\sqrt{1-w^2}}, \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-w^2}}$$

ein; dabei gilt

$$(46) \quad w\bar{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

und  $-iw_4 > 0$ .

Unter  $F$  und  $f$  wollen wir jetzt wieder die in den Grundgleichungen auftretenden Raum-Zeit-Vektoren II. Art  $\mathfrak{M}$ ,  $-i\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{m}$ ,  $-ie$  verstehen.

In  $\Phi = -wF$  haben wir wieder einen Raum-Zeit-Vektor I. Art; seine Komponenten werden sein

$$\Phi_1 = w_2 F_{12} + w_3 F_{13} + w_4 F_{14},$$

$$\Phi_2 = w_1 F_{21} + w_3 F_{23} + w_4 F_{24},$$

$$\Phi_3 = w_1 F_{31} + w_2 F_{32} + w_4 F_{34},$$

$$\Phi_4 = w_1 F_{41} + w_2 F_{42} + w_3 F_{43}.$$

Die drei ersten Größen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  sind bzw. die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Komponente des Raumvektors

$$(47) \quad \frac{\mathfrak{E} + [\mathfrak{w}\mathfrak{M}]}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}},$$

und ferner ist

$$(48) \quad \Phi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{E})}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}}.$$

Da die Matrix  $F$  eine alternierende ist, gilt offenbar

$$(49) \quad w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0,$$

der Vektor  $\Phi$  ist also normal zu  $w$ ; wir können diese Relation auch schreiben:

$$(50) \quad \Phi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Phi_1 + \mathfrak{w}_y\Phi_2 + \mathfrak{w}_z\Phi_3).$$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\Phi$  will ich *elektrische Ruh-Kraft* nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen  $-wF, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}, \mathfrak{w}$  stellen sich zwischen  $-wf, \mathfrak{e}, \mathfrak{m}, \mathfrak{w}$  heraus und insbesondere wird auch  $-wf$  normal zu  $w$  sein. Es kann nunmehr die Relation (C) durch

$$\{C\} \quad wf = \varepsilon wF$$

ersetzt werden, eine Formel, die zwar vier Gleichungen für die bezüglichen Komponenten liefert, jedoch so, daß die vierte im Hinblick auf (50) eine Folge der drei ersten ist.

Wir bilden ferner den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\Psi = iw f^*$ , dessen Komponenten sind:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -i(w_2f_{34} + w_3f_{42} + w_4f_{23}), \\ \Psi_2 &= -i(w_1f_{43} + w_3f_{14} + w_4f_{31}), \\ \Psi_3 &= -i(w_1f_{24} + w_2f_{41} + w_4f_{12}), \\ \Psi_4 &= -i(w_1f_{32} + w_2f_{13} + w_3f_{21}). \end{aligned}$$

Davon sind die drei ersteren  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  bzw. die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Komponente des Raumvektors

$$(51) \quad \frac{\mathfrak{m} - [\mathfrak{w}\mathfrak{e}]}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}},$$

und weiter ist

$$(52) \quad \Psi_4 = \frac{i(\mathfrak{w}\mathfrak{m})}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2}};$$

zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$(53) \quad w\bar{\Psi} = w_1\Psi_1 + w_2\Psi_2 + w_3\Psi_3 + w_4\Psi_4 = 0,$$

die wir auch

$$(54) \quad \Psi_4 = i(\mathfrak{w}_x\Psi_1 + \mathfrak{w}_y\Psi_2 + \mathfrak{w}_z\Psi_3)$$

schreiben können; der Vektor  $\Psi$  ist also wieder normal zu  $w$ . Den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\Psi$  will ich *magnetische Ruh-Kraft* nennen.

Analoge Beziehungen wie zwischen  $iwF^*$ ,  $m$ ,  $e$ ,  $w$  haben zwischen  $iwF^*$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{w}$  statt und es kann die Relation (D) nunmehr durch

$$\{D\} \quad wF^* = \mu wf^*$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen  $\{C\}$  und  $\{D\}$  können wir benutzen, um die Feldvektoren  $F$  und  $f$  auf  $\Phi$  und  $\Psi$  zurückzuführen. Wir haben

$$wF = -\Phi, \quad wF^* = -i\mu\Psi, \quad wf = -\varepsilon\Phi, \quad wf^* = -i\Psi$$

und die Anwendung der Regel (45) führt im Hinblick auf (46) zu

$$(55) \quad F = [w, \Phi] + i\mu[w, \Psi]^*,$$

$$(56) \quad f = \varepsilon[w, \Phi] + i[w, \Psi]^*,$$

d. i.

$$F_{12} = (w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i\mu(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$

$$f_{12} = \varepsilon(w_1\Phi_2 - w_2\Phi_1) + i(w_3\Psi_4 - w_4\Psi_3), \text{ u. s. f.}$$

Wir ziehen ferner den Raum-Zeit-Vektor II. Art  $[\Phi, \Psi]$  mit den sechs Komponenten

$$\begin{aligned} \Phi_2\Psi_3 - \Phi_3\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_1 - \Phi_1\Psi_3, \quad \Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1, \\ \Phi_1\Psi_4 - \Phi_4\Psi_1, \quad \Phi_2\Psi_4 - \Phi_4\Psi_2, \quad \Phi_3\Psi_4 - \Phi_4\Psi_3 \end{aligned}$$

in Betracht. Alsdann verschwindet der zugehörige Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$w[\Phi, \Psi] = -(w\bar{\Psi})\Phi + (w\bar{\Phi})\Psi$$

wegen (49) und (53) identisch. Führen wir nun den Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$(57) \quad \Omega = iw[\Phi, \Psi]^*$$

mit den Komponenten

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix}, \text{ u. s. f.}$$

ein, so folgt durch Anwendung der Regel (45):

$$(58) \quad [\Phi, \Psi] = i[w, \Omega]^*,$$

d. i.

$$\Phi_1\Psi_2 - \Phi_2\Psi_1 = i(w_3\Omega_4 - w_4\Omega_3), \text{ u. s. f.}$$

Der Vektor  $\Omega$  erfüllt offenbar die Relation

$$(59) \quad (w\bar{\Omega}) = w_1\Omega_1 + w_2\Omega_2 + w_3\Omega_3 + w_4\Omega_4 = 0,$$

die wir auch

$$\Omega_4 = i(m_x\Omega_1 + m_y\Omega_2 + m_z\Omega_3)$$

schreiben können, ist also wieder *normal zu w*. Falls  $w = 0$  ist, hat man  $\Phi_4 = 0$ ,  $\Psi_4 = 0$ ,  $\Omega_4 = 0$  und

$$(60) \quad \Omega_1 = \Phi_2 \Psi_3 - \Phi_3 \Psi_2, \quad \Omega_2 = \Phi_3 \Psi_1 - \Phi_1 \Psi_3, \quad \Omega_3 = \Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1.$$

Den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\Omega$  will ich als *Ruh-Strahl* bezeichnen.

Was die Relation (E) anbelangt, welche die Leitfähigkeit  $\sigma$  einführt, so erkennen wir zunächst, daß

$$-w\bar{s} = -(w_1 s_1 + w_2 s_2 + w_3 s_3 + w_4 s_4) = \frac{-\{w\} \bar{s}_w + e}{\sqrt{1-w^2}} = e'$$

die *Ruh-Dichte* der Elektrizität (s. § 8 und § 4 am Schlusse) wird. Als dann stellt

$$(61) \quad s + (w\bar{s})w$$

einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, der wegen  $w\bar{w} = -1$  offenbar wieder *normal zu w* ist und den ich als *Ruh-Strom* bezeichnen will. Fassen wir die drei ersten Komponenten dieses Vektors als  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Komponente eines Raum-Vektors auf, so ist für den letzteren die Komponente nach der Richtung von  $w$ :

$$\bar{s}_w = \frac{|w| e'}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{\bar{s}_w - |w| e}{1-w^2} = \frac{\bar{S}_w}{1-w^2}$$

und die Komponente nach einer jeden zu  $w$  senkrechten Richtung  $\bar{w}$  wieder

$$\bar{s}_{\bar{w}} = \bar{S}_{\bar{w}};$$

es hängt dieser Raum-Vektor also sehr einfach mit dem Raum-Vektor  $\bar{S} = \bar{s} - e'w$  zusammen, den wir in § 8 als Leitungsstrom bezeichneten.

Nunmehr kann durch Vergleich mit  $\Phi = -wF$  die Relation (E) auf die Gestalt gebracht werden:

$$\{E\} \quad s + (w\bar{s})w = -\sigma wF.$$

Diese Formel faßt wieder vier Gleichungen zusammen, von denen jedoch, weil es sich beiderseits um zu  $w$  normale Raum-Zeit-Vektoren I. Art handelt, die vierte eine Folge der drei ersten ist.

Endlich werden wir noch die Differentialgleichungen (A) und (B) in eine typische Form umsetzen.

## § 12.

### Der Differentialoperator $\text{lor.}$

Eine  $4 \times 4$ -reihige Matrix

$$(62) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{hk}|$$



mit der Vorschrift, sie bei einer Lorentz-Transformation  $A$  jedesmal durch  $\bar{A}SA$  zu ersetzen, mag eine *Raum-Zeit-Matrix* II. Art heißen. Eine derartige Matrix hat man insbesondere

in der alternierenden Matrix  $f$ , die einem Raum-Zeit-Vektor II. Art  $f$  entspricht,

in dem Produkte  $fF$  zweier solcher alternierender Matrizen  $f, F$ , das bei einer Transformation  $A$  durch  $(A^{-1}fA)(A^{-1}FA) = A^{-1}fFA$  zu ersetzen ist,

ferner, wenn  $w_1, w_2, w_3, w_4$  und  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  zwei Raum-Zeit-Vektoren I. Art sind, in der Matrix der  $4 \times 4$  Elemente  $S_{hk} = w_h \Omega_k$ ,

endlich in einem Vielfachen  $L$  der Einheitsmatrix, d. h. einer  $4 \times 4$ -reihigen Matrix, in der alle Elemente in der Hauptdiagonale einen gleichen Wert  $L$  haben und die übrigen Elemente sämtlich Null sind.

Wir haben es hier stets mit Funktionen von Raum-Zeitpunkten  $x, y, z, it$  zu tun und können mit Vorteil eine  $1 \times 4$ -reihige Matrix, gebildet aus den Differentiationssymbolen

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial it} \right|,$$

oder auch

$$(63) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right|$$

geschrieben, verwenden. Für diese Matrix will ich die *Abkürzung* *lor* brauchen.

Es soll dann, wenn  $S$  wie in (62) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art bedeutet, in sinngemäßer Übertragung der Regel für die Produktbildung von Matrizen, unter *lor*  $S$  die  $1 \times 4$ -reihige Matrix

$$|K_1, K_2, K_3, K_4|$$

der Ausdrücke

$$(64) \quad K_k = \frac{\partial S_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3k}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4k}}{\partial x_4} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

verstanden werden.

Wird durch eine Lorentz-Transformation  $A$  ein neues Bezugssystem  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  für die Raum-Zeitpunkte eingeführt, so mag analog der Operator

$$\text{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4} \right|$$

angewandt werden. Geht dabei  $S$  in  $S' = \bar{A}SA = |S'_{hk}|$  über, so wird dann unter *lor'*  $S'$  die  $1 \times 4$ -reihige Matrix der Ausdrücke

$$K'_k = \frac{\partial S'_{1k}}{\partial x'_1} + \frac{\partial S'_{2k}}{\partial x'_2} + \frac{\partial S'_{3k}}{\partial x'_3} + \frac{\partial S'_{4k}}{\partial x'_4} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

zu verstehen sein. Nun gilt für die Differentiation einer beliebigen Funktion von einem Raum-Zeitpunkte die Regel

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'_k} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial x'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_{1k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \alpha_{2k} + \frac{\partial}{\partial x_3} \alpha_{3k} + \frac{\partial}{\partial x_4} \alpha_{4k},\end{aligned}$$

die in einer leicht verständlichen Weise symbolisch als

$$\text{lor}' = \text{lor } A$$

zu deuten ist, und mit Rücksicht hierauf folgt sogleich

$$(65) \quad \text{lor}' S' = \text{lor} (A(A^{-1}SA)) = (\text{lor } S)A,$$

d. h. wenn  $S$  eine Raum-Zeit-Matrix II. Art vorstellt, so transformiert sich  $\text{lor } S$  als ein Raum-Zeit-Vektor I. Art.

Ist insbesondere  $L$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so wird unter  $\text{lor } L$  die Matrix der Elemente

$$(66) \quad \left| \frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial x_3}, \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|$$

zu verstehen sein.

Stellt  $s = |s_1, s_2, s_3, s_4|$  einen Raum-Zeit-Vektor I. Art vor, so wird

$$(67) \quad \text{lor } \bar{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4}$$

zu erklären sein. Treten bei Anwendung einer Lorentz-Transformation  $A$  die Zeichen  $\text{lor}'$ ,  $s'$  an Stelle von  $\text{lor}$ ,  $s$ , so folgt

$$\text{lor}' \bar{s}' = (\text{lor } A) (\bar{A} \bar{s}) = \text{lor } \bar{s},$$

d. h.  $\text{lor } \bar{s}$  ist eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen.

In allen diesen Beziehungen spielt der Operator  $\text{lor}$  selbst die Rolle eines Raum-Zeit-Vektors I. Art.

Stellt  $f$  einen Raum-Zeit-Vektor II. Art vor, so hat nun  $-\text{lor } f$  den Raum-Zeit-Vektor I. Art mit den Komponenten

$$\begin{aligned}& \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}, \\ & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4}, \\ & \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4}, \\ & \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3}\end{aligned}$$

zu bedeuten. Hiernach läßt sich das System der Differentialgleichungen (A) in der kurzen Form

$$\{A\} \quad \text{lor } f = -s$$

zusammenziehen. Ganz entsprechend wird das System der Differentialgleichungen (B) zu schreiben sein:

$$\{B\} \quad \text{lor } F^* = 0.$$

Die im Hinblick auf die Definition (67) von  $\text{lor } \bar{s}$  gebildeten Verbindungen  $\text{lor } (\text{lor } f)$  und  $\text{lor } (\text{lor } F^*)$  verschwinden offenbar identisch, indem  $f$  und  $F^*$  alternierende Matrizen sind. Darnach folgt aus  $\{A\}$  für den Strom  $s$  die Beziehung

$$(68) \quad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} + \frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_3}{\partial x_3} + \frac{\partial s_4}{\partial x_4} = 0,$$

während die Relation

$$(69) \quad \text{lor } (\text{lor } F^*) = 0$$

den Sinn hat, daß die vier in  $\{B\}$  angewiesenen Gleichungen nur drei unabhängige Bedingungen für den Verlauf der Feldvektoren repräsentieren.

Ich fasse nunmehr die Resultate zusammen:

Es bedeute  $w$  den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\frac{w}{\sqrt{1-w^2}}$ ,  $\frac{i}{\sqrt{1-w^2}}$  ( $w$  Geschwindigkeit der Materie),  $F$  den Raum-Zeit-Vektor II. Art  $\mathfrak{M}$ ,  $-i\mathfrak{E}$  ( $\mathfrak{M}$  magnetische Erregung,  $\mathfrak{E}$  elektrische Kraft),  $f$  den Raum-Zeit-Vektor II. Art  $m$ ,  $-ie$  ( $m$  magnetische Kraft,  $e$  elektrische Erregung),  $s$  den Raum-Zeit-Vektor I. Art  $\bar{s}$ ,  $i\rho$  ( $\rho$  elektrische Raumdichte,  $\bar{s} - \rho w$  Leitungsstrom),  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante,  $\mu$  die magnetische Permeabilität,  $\sigma$  die Leitfähigkeit, so lauten (mit den in § 10 und § 11 erklärten Symbolen der Matrizenrechnung) die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern

$$\{A\} \quad \text{lor } f = -s,$$

$$\{B\} \quad \text{lor } F^* = 0,$$

$$\{C\} \quad wf = \epsilon w F,$$

$$\{D\} \quad w F^* = \mu w f^*,$$

$$\{E\} \quad s + (w\bar{s})w = -\sigma w F.$$

Dabei gilt  $w\bar{w} = -1$ , es sind die Raum-Zeit-Vektoren I. Art  $wF$ ,  $wf$ ,  $wF^*$ ,  $wf^*$ ,  $s + (w\bar{s})w$  sämtlich normal zu  $w$  und endlich besteht für das Gleichungssystem  $\{B\}$  der Zusammenhang

$$\text{lor } (\text{lor } F^*) = 0.$$

In Anbetracht der zuletzt genannten Umstände steht hier genau die erforderliche Anzahl von unabhängigen Gleichungen zur Verfügung, um bei den geeigneten Grenzdaten die Vorgänge vollständig zu beschreiben, wofern die Bewegung der Materie, also der Vektor  $w$  als Funktion von  $x, y, z, t$  bekannt ist.

## § 13.

**Das Produkt der Feldvektoren  $fF$ .**

Endlich fragen wir nach den Gesetzen, die zur Bestimmung des Vektors  $w$  als Funktion von  $x, y, z, t$  führen. Bei den hierauf bezüglichen Untersuchungen treten diejenigen Ausdrücke in den Vordergrund, die durch *Bildung des Produkts der zwei alternierenden Matrizen*

$$f = \begin{vmatrix} 0, & f_{12}, & f_{13}, & f_{14} \\ f_{21}, & 0, & f_{23}, & f_{24} \\ f_{31}, & f_{32}, & 0, & f_{34} \\ f_{41}, & f_{42}, & f_{43}, & 0 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} 0, & F_{12}, & F_{13}, & F_{14} \\ F_{21}, & 0, & F_{23}, & F_{24} \\ F_{31}, & F_{32}, & 0, & F_{34} \\ F_{41}, & F_{42}, & F_{43}, & 0 \end{vmatrix}$$

sich darbieten. Ich schreibe

$$(70) \quad fF = \begin{vmatrix} S_{11}-L, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}-L, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}-L, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44}-L \end{vmatrix}$$

so, daß dabei

$$(71) \quad S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44} = 0$$

wird.

Alsdann bedeutet  $L$  die in den Indizes 1, 2, 3, 4 symmetrische Verbindung

$$(72) \quad L = \frac{1}{2} (f_{23}F_{23} + f_{31}F_{31} + f_{12}F_{12} + f_{14}F_{14} + f_{24}F_{24} + f_{34}F_{34}),$$

und es wird

$$(73) \quad \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2} (f_{23}F_{23} + f_{34}F_{34} + f_{42}F_{42} - f_{12}F_{12} - f_{13}F_{13} - f_{14}F_{14}), \\ S_{12} &= f_{13}F_{32} + f_{14}F_{42}, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Indem ich die *Realitätsverhältnisse* zum Ausdruck bringe, will ich noch

$$(74) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11}, & S_{12}, & S_{13}, & S_{14} \\ S_{21}, & S_{22}, & S_{23}, & S_{24} \\ S_{31}, & S_{32}, & S_{33}, & S_{34} \\ S_{41}, & S_{42}, & S_{43}, & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x, & Y_x, & Z_x, & -iT_x \\ X_y, & Y_y, & Z_y, & -iT_y \\ X_z, & Y_z, & Z_z, & -iT_z \\ -iX_t, & -iY_t, & -iZ_t, & T_t \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei dann

$$\begin{aligned}
 X_x &= \frac{1}{2} (m_x \mathfrak{M}_x - m_y \mathfrak{M}_y - m_z \mathfrak{M}_z + e_x \mathfrak{E}_x - e_y \mathfrak{E}_y - e_z \mathfrak{E}_z), \\
 X_y &= m_x \mathfrak{M}_y + e_y \mathfrak{E}_x, \quad Y_x = m_y \mathfrak{M}_x + e_x \mathfrak{E}_y, \quad \text{u. s. f.} \\
 (75) \quad X_z &= e_y \mathfrak{M}_z - e_z \mathfrak{M}_y, \\
 T_x &= m_z \mathfrak{E}_y - m_y \mathfrak{E}_z, \quad \text{u. s. f.} \\
 T_t &= \frac{1}{2} (m_x \mathfrak{M}_x + m_y \mathfrak{M}_y + m_z \mathfrak{M}_z + e_x \mathfrak{E}_x + e_y \mathfrak{E}_y + e_z \mathfrak{E}_z)
 \end{aligned}$$

und auch

$$(76) \quad L = \frac{1}{2} (m_x \mathfrak{M}_x + m_y \mathfrak{M}_y + m_z \mathfrak{M}_z - e_x \mathfrak{E}_x - e_y \mathfrak{E}_y - e_z \mathfrak{E}_z)$$

sämtlich reell sind. In den Theorien für ruhende Körper kommen die Verbindungen  $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z$  unter dem Namen „Maxwellsche Spannungen“, die Größen  $T_x, T_y, T_z$  als „Poyntingscher Vektor“,  $T_t$  als „elektromagnetische Energiedichte für die Volumeneinheit“ vor und wird  $L$  als „Lagrangesche Funktion“ bezeichnet.

Wir finden nun andererseits durch Zusammensetzung der zu  $f$  und  $F$  dualen Matrizen in umgekehrter Folge sofort

$$(77) \quad F^* f^* = \begin{vmatrix} -S_{11} - L, & -S_{12}, & -S_{13}, & -S_{14} \\ -S_{21}, & -S_{22} - L, & -S_{23}, & -S_{24} \\ -S_{31}, & -S_{32}, & -S_{33} - L, & -S_{34} \\ -S_{41}, & -S_{42}, & -S_{43}, & -S_{44} - L \end{vmatrix}$$

und können hiernach setzen

$$(78) \quad fF = S - L, \quad F^* f^* = -S - L,$$

indem wir unter  $L$  das Vielfache  $L \cdot 1$  der Einheitsmatrix, d. h. die Matrix der Elemente

$$|L e_{hk}| \quad \left( e_{hh} = 1, e_{hk} = 0, h \geq k \right) \\ h, k = 1, 2, 3, 4$$

verstehen.

Daraus folgern wir weiter, indem hier  $SL = LS$  ist,

$$F^* f^* f F = (-S - L)(S - L) = -SS + L^2,$$

und finden, da  $f^* f = \text{Det}^{\frac{1}{2}} f$ ,  $F^* F = \text{Det}^{\frac{1}{2}} F$  ist, die interessante Beziehung:

$$(79) \quad SS = L^2 - \text{Det}^{\frac{1}{2}} f \text{Det}^{\frac{1}{2}} F,$$

d. h. das Produkt der Matrix  $S$  in sich selbst ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix, eine Matrix, in welcher außerhalb der Hauptdiagonale alle Elemente Null und in der Diagonale alle Elemente gleich sind und als gemeinsamen Wert die hier rechts angegebene Größe haben. Es gelten also allgemein die Relationen

$$(80) \quad S_{h1}S_{1k} + S_{h2}S_{2k} + S_{h3}S_{3k} + S_{h4}S_{4k} = 0$$

bei ungleichen Indizes  $h, k$  aus der Reihe 1, 2, 3, 4 und

$$(81) \quad S_{h1}S_{1h} + S_{h2}S_{2h} + S_{h3}S_{3h} + S_{h4}S_{4h} = L_2 - \text{Det}^{\frac{1}{2}} f \text{Det}^{\frac{1}{2}} F$$

für  $h = 1, 2, 3, 4$ .

Indem wir jetzt anstatt  $F$  und  $f$  in den Verbindungen (72), (73) mittels (55), (56), (57) die elektrische Ruh-Kraft  $\Phi$ , die magnetische Ruh-Kraft  $\Psi$ , den Ruh-Strahl  $\Omega$  einführen, gelangen wir zu den Ausdrücken:

$$(82) \quad L = -\frac{1}{2} \varepsilon \Phi \bar{\Phi} + \frac{1}{2} \mu \Psi \bar{\Psi},$$

$$(83) \quad \begin{aligned} S_{hk} = & -\frac{1}{2} \varepsilon \Phi \bar{\Phi} e_{hk} - \frac{1}{2} \mu \Psi \bar{\Psi} e_{hk} \\ & + \varepsilon (\Phi_h \Phi_k - \Phi \bar{\Phi} w_h w_k) + \mu (\Psi_h \Psi_k - \Psi \bar{\Psi} w_h w_k) \\ & - \Omega_h w_k - \varepsilon \mu w_h \Omega_k \end{aligned} \quad (h, k = 1, 2, 3, 4);$$

darin sind noch einzusetzen

$$\begin{aligned} \Phi \bar{\Phi} &= \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2, & \Psi \bar{\Psi} &= \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 + \Psi_4^2, \\ e_{hh} &= 1, & e_{hk} &= 0 (h \neq k). \end{aligned}$$

Nämlich jedenfalls ist die rechte Seite von (82) ebenso wie  $L$  eine Invariante bei den Lorentz-Transformationen und stellen die  $4 \times 4$  Elemente rechts in (83) ebenso wie die  $S_{hk}$  eine Raum-Zeit-Matrix II. Art dar. Mit Rücksicht hierauf genügt es schon, um die Relationen (82), (83) allgemein behaupten zu können, sie nur für den Fall  $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0, w_4 = i$  zu verifizieren. Für diesen Fall  $w = 0$  aber kommen (83) und (82) durch (47), (51), (60) einerseits,  $\varepsilon = \varepsilon \mathfrak{E}, \mu = \mu \mathfrak{M}$  andererseits unmittelbar auf die Gleichungen (75), (76) hinaus.

Der Ausdruck rechts in (81), der

$$= \left( \frac{1}{2} (m \mathfrak{M} - \varepsilon \mathfrak{E}) \right)^2 + (\varepsilon m) (\mathfrak{E} \mathfrak{M})$$

ist, erweist sich durch  $(\varepsilon m) = \varepsilon \Phi \Psi, (\mathfrak{E} \mathfrak{M}) = \mu \Phi \bar{\Psi}$  als  $\geq 0$ ; die Quadratwurzel aus ihm,  $\geq 0$  genommen, mag im Hinblick auf (79) mit  $\text{Det}^{\frac{1}{4}} S$  bezeichnet werden.

Für  $\bar{S}$ , die transponierte Matrix von  $S$ , folgt aus (78), da  $\bar{f} = -f, \bar{F} = -F$  ist,

$$(84) \quad Ff = \bar{S} - L, \quad f^* F^* = -\bar{S} - L.$$

Sodann ist

$$S - \bar{S} = |S_{hk} - S_{kh}|$$

eine alternierende Matrix und bedeutet zugleich einen Raum-Zeit-Vektor II. Art. Aus den Ausdrücken (83) entnehmen wir sofort

$$(85) \quad S - \bar{S} = -(\varepsilon\mu - 1)[w, \Omega],$$

woraus noch (vgl. (57), (58))

$$(86) \quad w(S - \bar{S})^* = 0,$$

$$(87) \quad w(S - \bar{S}) = (\varepsilon\mu - 1)\Omega$$

herzuleiten ist.

Wenn in einem Raum-Zeitpunkte die Materie ruht,  $w = 0$  ist, so bedeutet (86) das Bestehen der Gleichungen

$$Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x, \quad Y_x = X_y;$$

ferner hat man dann nach (83):

$$\begin{aligned} T_x &= \Omega_1, & T_y &= \Omega_2, & T_z &= \Omega_3, \\ X_t &= \varepsilon\mu\Omega_1, & Y_t &= \varepsilon\mu\Omega_2, & Z_t &= \varepsilon\mu\Omega_3. \end{aligned}$$

Nun wird man durch eine geeignete Drehung des räumlichen Koordinatensystems der  $x, y, z$  um den Nullpunkt es bewirken können, daß

$$Z_y = Y_z = 0, \quad X_z = Z_x = 0, \quad Y_x = X_y = 0$$

ausfallen. Nach (71) hat man

$$(88) \quad X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0$$

und nach dem Ausdruck in (83) ist hier jedenfalls  $T_t > 0$ . Im speziellen Falle, daß auch  $\Omega$  verschwindet, folgt dann aus (81)

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\text{Det}^{\frac{1}{4}} S)^2$$

und sind  $T_t$  und von den drei Größen  $X_x, Y_y, Z_z$  eine  $= +\text{Det}^{\frac{1}{4}} S$ , die zwei anderen  $= -\text{Det}^{\frac{1}{4}} S$ . Verschwindet  $\Omega$  nicht, so sei etwa  $\Omega_3 \neq 0$ , dann hat man nach (80) insbesondere

$$T_t X_t = 0, \quad T_t Y_t = 0, \quad Z_t T_t + T_t T_t = 0$$

und findet demnach  $\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0, Z_z = -T_t$ . Aus (81) und im Hinblick auf (88) folgt alsdann

$$\begin{aligned} X_x &= -Y_y = \pm \text{Det}^{\frac{1}{4}} S, \\ -Z_z &= T_t = \sqrt{\text{Det}^{\frac{1}{2}} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \text{Det}^{\frac{1}{4}} S. \end{aligned}$$

Von ganz besonderer Bedeutung wird endlich der Raum-Zeit-Vektor I. Art

$$(89) \quad K = \text{lor } S,$$

für den wir jetzt eine wichtige Umformung nachweisen wollen.

Nach (78) ist  $S = L + fF$  und es folgt zunächst

$$\text{lor } S = \text{lor } L + \text{lor } fF.$$

Das Symbol  $\text{lor}$  bedeutet einen Differentiationsprozeß, der in  $\text{lor } fF$  einerseits die Komponenten von  $f$ , andererseits die Komponenten von  $F$  betreffen wird. Entsprechend zerlegt sich  $\text{lor } fF$  additiv in einen ersten und einen zweiten Teil. Der erste Teil wird offenbar das Produkt der Matrizen  $(\text{lor } f)F$  sein, darin  $\text{lor } f$  als  $1 \times 4$ -reihige Matrix für sich aufgefaßt. Der zweite Teil ist derjenige Teil von  $\text{lor } fF$ , in dem die Differentiationen nur die Komponenten von  $F$  betreffen. Nun entnehmen wir aus (78)

$$fF = -F^*f^* - 2L;$$

infolgedessen wird dieser zweite Teil von  $\text{lor } fF$  sein  $-(\text{lor } F^*)f^* +$  dem Teil von  $-2\text{lor } L$ , in dem die Differentiationen nur die Komponenten von  $F$  betreffen. Danach entsteht

$$(90) \quad \text{lor } S = (\text{lor } f)F - (\text{lor } F^*)f^* + N,$$

wo  $N$  den Vektor mit den Komponenten

$$\begin{aligned} N_h = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_{23}}{\partial x_h} F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h} F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h} F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h} F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h} F_{34} \right. \\ & \left. - f_{23} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} - f_{31} \frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} - f_{12} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} - f_{14} \frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} - f_{24} \frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} - \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} \right) \\ & (h = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

bedeutet. Durch Benutzung der Grundgleichungen {A} und {B} geht (90) in die *fundamentale Relation*

$$(91) \quad \text{lor } S = -sF + N$$

über.

Im Grenzfalle  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ , wo  $f = F$  ist, verschwindet  $N$  identisch.

Allgemein gelangen wir auf Grund von (55), (56) und im Hinblick auf den Ausdruck (82) von  $L$  und auf (57) zu folgenden Ausdrücken der Komponenten von  $N$ :

$$\begin{aligned} (92) \quad N_h = & -\frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial s}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial x_h} \\ & + (\varepsilon\mu - 1) \left( \Omega_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_h} + \Omega_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_h} + \Omega_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_h} + \Omega_4 \frac{\partial w_4}{\partial x_h} \right) \\ & \text{für } h = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Machen wir noch von (59) Gebrauch und bezeichnen den Raum-Vektor, der  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  als  $x, y, z$ -Komponenten hat, mit  $\mathfrak{B}$ , so kann der letzte, dritte Bestandteil von (92) auch auf die Gestalt



$$(93) \quad \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1 - w^2}} \left( \mathfrak{M} \frac{\partial w}{\partial x_h} \right)$$

gebracht werden, wobei die Klammer das skalare Produkt der darin aufgeführten zwei Vektoren anzeigt.

### § 14.

#### Die ponderomotorischen Kräfte.

Wir stellen jetzt die Relation  $K = \text{lor } S = -sF + N$  ausführlicher dar; sie liefert die vier Gleichungen

$$(94) \quad K_1 = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} = \rho \mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y \mathfrak{M}_z - \mathfrak{s}_z \mathfrak{M}_y \\ - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1 - w^2}} \left( \mathfrak{M} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$(95) \quad K_2 = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} = \rho \mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z \mathfrak{M}_x + \mathfrak{s}_x \mathfrak{M}_z \\ - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1 - w^2}} \left( \mathfrak{M} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$(96) \quad K_3 = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} = \rho \mathfrak{E}_z + \mathfrak{s}_x \mathfrak{M}_y - \mathfrak{s}_y \mathfrak{M}_x \\ - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1 - w^2}} \left( \mathfrak{M} \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

$$(97) \quad \frac{1}{i} K_4 = - \frac{\partial T_x}{\partial x} - \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial t} = \mathfrak{s}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{s}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{s}_z \mathfrak{E}_z \\ + \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sqrt{1 - w^2}} \left( \mathfrak{M} \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

*Es ist nun meine Meinung, daß bei den elektromagnetischen Vorgängen die ponderomotorische Kraft, die an der Materie in einem Raum-Zeitpunkte  $x, y, z, t$  angreift, berechnet für die Volumeneinheit, als  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Komponenten die drei ersten Komponenten des zum Raum-Zeit-Vektor  $w$  normalen Raum-Zeit-Vektors*

$$(98) \quad K + (w \bar{K}) w$$

*hat und daß ferner der Energiesatz seinen Ausdruck in der obigen vierten Relation findet.*

Diese Meinung eingehend zu begründen, sei einem folgenden Aufsatze vorbehalten; hier will ich nur noch durch einige Ausführungen zur Mechanik dieser Meinung eine gewisse Stütze geben.

Im Grenzfalle  $\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$  ist der Vektor  $N = 0, \mathfrak{s} = \rho w$ , es wird dadurch  $w \bar{K} = 0$  und es decken sich diese Ansätze mit den in der Elektronentheorie üblichen.

## Anhang.

## Mechanik und Relativitätspostulat.

Es wäre höchst unbefriedigend, dürfte man die neue Auffassung des Zeitbegriffs, die durch die Freiheit der Lorentz-Transformationen gekennzeichnet ist, nur für ein Teilgebiet der Physik gelten lassen.

Nun sagen viele Autoren, die klassische Mechanik stehe im Gegensatz zu dem Relativitätspostulate, das hier für die Elektrodynamik zugrunde gelegt ist.

Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, fassen wir eine spezielle Lorentz-Transformation ins Auge, wie sie durch die Gleichungen (10), (11), (12) dargestellt ist, mit einem von Null verschiedenen Vektor  $\mathbf{v}$  von irgendeiner Richtung und einem Betrage  $q$ , der  $< 1$  ist. Wir wollen aber für einen Moment noch keine Verfügung über das Verhältnis von Längeneinheit und Zeiteinheit getroffen denken und demgemäß in jenen Gleichungen statt  $t, t', q$  schreiben  $ct, ct', \frac{q}{c}$ , wobei dann  $c$  eine gewisse positive Konstante vorstellt und  $q < c$  sein muß. Die genannten Gleichungen verwandeln sich dadurch in

$$r'_v = r_v, \quad r'_v = \frac{c(r_v - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}}, \quad t' = \frac{-qr_v + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}};$$

es bedeutet, wie wir erinnern,  $\mathbf{r}$  den Raumvektor  $x, y, z$  und  $\mathbf{r}'$  den Raumvektor  $x', y', z'$ .

Gehen wir in diesen Gleichungen, während wir  $\mathbf{v}$  festhalten, zur Grenze  $c = \infty$  über, so entsteht aus ihnen

$$r'_v = r_v, \quad r'_v = r_v - qt, \quad t' = t.$$

Diese neuen Gleichungen würden nun bedeuten einen Übergang vom räumlichen Koordinatensysteme  $x, y, z$  zu einem anderen räumlichen Koordinatensysteme  $x', y', z'$  mit parallelen Achsen, dessen Nullpunkt in bezug auf das erste in gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet, während der Zeitparameter ganz unberührt bleiben soll.

Auf Grund dieser Bemerkung darf man sagen:

*Die klassische Mechanik postuliert eine Kovarianz der physikalischen Gesetze für die Gruppe der homogenen linearen Transformationen des Ausdrucks*

$$(1) \quad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$$

*in sich mit der Bestimmung  $c = \infty$ .*

Nun wäre es geradezu verwirrend, in einem Teilgebiet der Physik eine Kovarianz der Gesetze für die Transformationen des Ausdrucks (1)

in sich bei einem bestimmten endlichen  $c$ , in einem anderen Teilgebiete aber für  $c = \infty$  zu finden. Daß die Newtonsche Mechanik nur diese Kovarianz für  $c = \infty$  behaupten und sie nicht für den Fall von  $c$  als Lichtgeschwindigkeit ersinnen konnte, bedarf keiner Erklärung. Sollte aber nicht gegenwärtig der Versuch zulässig sein, jene traditionelle Kovarianz für  $c = \infty$  nur als eine durch die Erfahrungen zunächst gewonnene Approximation an eine exaktere Kovarianz der Naturgesetze für ein gewisses endliches  $c$  aufzufassen?

Ich möchte ausführen, daß durch eine *Reformierung der Mechanik*, wobei an Stelle des Newtonschen Relativitätspostulates mit  $c = \infty$  ein solches für ein endliches  $c$  tritt, sogar der axiomatische Aufbau der Mechanik erheblich an Vollendung zu gewinnen scheint.

Das Verhältnis der Zeiteinheit zur Längeneinheit sei derart normiert, daß das Relativitätspostulat mit  $c = 1$  in Betracht kommt.

Indem ich jetzt geometrische Bilder auf die Mannigfaltigkeit der vier Variablen  $x, y, z, t$  übertragen will, mag es zum leichteren Verständnis des Folgenden bequem sein, zunächst  $y, z$  völlig außer Betracht zu lassen und  $x$  und  $t$  als irgendwelche schiefwinklige Parallelkoordinaten in einer Ebene zu deuten.

Ein Raum-Zeit-Nullpunkt  $O$  ( $x, y, z, t = 0, 0, 0, 0$ ) wird bei den Lorentz-Transformationen festgehalten. Das Gebilde

$$(2) \quad -x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1, \quad t > 0,$$

eine *hyperboloidische Schale*, umfaßt den Raum-Zeitpunkt  $A(x, y, z, t = 0, 0, 0, 1)$  und alle Raum-Zeitpunkte  $A'$ , die nach Lorentz-Transformationen als  $(x', y', z', t' = 0, 0, 0, 1)$  in den neu eingeführten Bestimmungsstücken  $x', y', z', t'$  auftreten.

Die Richtung eines Radiusvektors  $OA'$  von  $O$  nach einem Punkte  $A'$  von (2) und die Richtungen der in  $A'$  an (2) gehenden Tangenten sollen *normal* zueinander heißen.

Verfolgen wir eine bestimmte Stelle der Materie in ihrer Bahn zu allen Zeiten  $t$ . Die Gesamtheit der Raum-Zeitpunkte  $x, y, z, t$ , die der Stelle zu den verschiedenen Zeiten  $t$  entsprechen, nenne ich eine *Raum-Zeitlinie*.

Die Aufgabe, die Bewegung der Materie zu bestimmen, ist dahin aufzufassen: Es soll für jeden Raum-Zeitpunkt die Richtung der daselbst durchlaufenden Raum-Zeitlinie festgestellt werden.

Einen Raum-Zeitpunkt  $P(x, y, z, t)$  auf Ruhe transformieren, heißt, durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugssystem  $x', y', z', t'$  einführen derart, daß die  $t'$ -Achse  $OA'$  die Richtung erlangt, die in  $P$  die dort durchlaufende Raum-Zeitlinie zeigt. Der Raum  $t' = \text{konst.}$ , der durch  $P$

zu legen ist, soll dann der in  $P$  auf der Raum-Zeitlinie *normale* Raum heißen. Dem Zuwachs  $dt$  der Zeit  $t$  von  $P$  aus entspricht der Zuwachs

$$(3) \quad d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt \sqrt{1 - w^2} = \frac{dx_4}{w_4}^*)$$

des hierbei einzuführenden Parameters  $t'$ . Der Wert des Integrals

$$\int d\tau = \int \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)},$$

auf der Raum-Zeitlinie von irgendeinem festen Anfangspunkte  $P^0$  an bis zum variabel gedachten Endpunkte  $P$  gerechnet, heiße die *Eigenzeit* der betreffenden Stelle der Materie im Raum-Zeitpunkte  $P$ . (Es ist das eine Verallgemeinerung des von Lorentz für gleichförmige Bewegungen gebildeten Begriffs der *Ortszeit*.)

Nehmen wir einen räumlich ausgedehnten Körper  $R^0$  zu einer bestimmten Zeit  $t^0$ , so soll der Bereich aller durch die Raum-Zeitpunkte  $R^0, t^0$  führenden Raum-Zeitlinien ein *Raum-Zeitfaden* heißen.

Haben wir einen analytischen Ausdruck  $\Theta(x, y, z, t)$ , so daß  $\Theta(x, y, z, t) = 0$  von jeder Raum-Zeitlinie des Fadens in einem Punkte getroffen wird, wobei

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)^2 > 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} > 0$$

ist, so wollen wir die Gesamtheit  $Q$  der betreffenden Treffpunkte einen *Querschnitt* des Fadens nennen. An jedem Punkte  $P(x, y, z, t)$  eines solchen Querschnitts können wir durch eine Lorentz-Transformation ein Bezugssystem  $x', y', z', t'$  einführen, so daß hernach

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t'} > 0$$

wird. Die Richtung der betreffenden, eindeutig bestimmten  $t'$ -Achse heiße die *obere Normale* des Querschnitts  $Q$  im Punkte  $P$  und der Wert  $dJ = \iiint dx' dy' dz'$  für eine Umgebung von  $P$  auf dem Querschnitt ein *Inhaltselement* des Querschnitts. In diesem Sinne ist  $R^0, t^0$  selbst als der zur  $t$ -Achse normale Querschnitt  $t = t^0$  des Fadens und das Volumen des Körpers  $R^0$  als der *Inhalt* dieses Querschnitts zu bezeichnen.

Indem wir den Raum  $R^0$  nach einem Punkte hin konvergieren lassen, kommen wir zum Begriffe eines *unendlich dünnen* Raum-Zeitfadens. In einem solchen denken wir uns stets eine Raum-Zeitlinie irgendwie als *Hauptlinie* ausgezeichnet und verstehen unter der *Eigenzeit des Fadens* die auf dieser Hauptlinie festgestellte Eigenzeit, unter den *Normalquerschnitten* des Fadens seine Durchquerungen durch die in den Punkten der Hauptlinie auf dieser normalen Räume.

\*) Die Bezeichnung mit Indizes und die Zeichen  $w, w$  nehmen wir wieder in dem früher festgesetzten Sinne in Gebrauch (s. § 3 und § 4).

Wir formulieren nunmehr das *Prinzip von der Erhaltung der Massen*.

Jedem Raume  $R$  zu einer Zeit  $t$  gehört eine positive GröÙe, die *Masse in  $R$  zur Zeit  $t$* , zu. Konvergiert  $R$  nach einem Punkte  $x, y, z, t$  hin, so nähert sich der Quotient aus dieser Masse und dem Volumen von  $R$  einem Grenzwert  $\mu(x, y, z, t)$ , der *Massendichte* im Raum-Zeitpunkte  $x, y, z, t$ .

Das Prinzip von der Erhaltung der Massen besagt: *Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt  $\mu dJ$  aus der Massendichte  $\mu$  an einer Stelle  $x, y, z, t$  des Fadens (d. h. der Hauptlinie des Fadens) und dem Inhalt  $dJ$  des durch die Stelle gehenden zur  $t$ -Achse normalen Querschnitts stets längs des ganzen Fadens konstant.*

Nun wird als Inhalt  $dJ_n$  des durch  $x, y, z, t$  gelegten Normalquerschnitts des Fadens

$$(4) \quad dJ_n = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} dJ = -iw_4 dJ = \frac{dt}{d\tau} dJ$$

zu rechnen sein und es möge

$$(5) \quad v = \frac{\mu}{-iw_4} = \mu \sqrt{1-w^2} = \mu \frac{d\tau}{dt}$$

als *Ruh-Massendichte* an der Stelle  $x, y, z, t$  definiert werden. Alsdann kann das Prinzip von der Erhaltung der Massen auch so formuliert werden:

*Für einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden ist das Produkt aus der Ruh-Massendichte und dem Inhalt des Normalquerschnitts an einer Stelle des Fadens stets längs des ganzen Fadens konstant.*

In einem beliebigen Raum-Zeitfaden sei ein erster Querschnitt  $Q^0$  und sodann ein zweiter Querschnitt  $Q^1$  angebracht, der mit  $Q^0$  dessen Punkte auf der Begrenzung des Fadens, aber nur diese gemein hat, und die Raum-Zeitlinien innerhalb des Fadens mögen auf  $Q^1$  größere Werte  $t$  als auf  $Q^0$  zeigen. Das von  $Q^0$  und  $Q^1$  zusammen begrenzte, im Endlichen gelegene Gebiet soll dann eine *Raum-Zeit-Sichel*,  $Q^0$  die *untere*,  $Q^1$  die *obere* Begrenzung der Sichel heißen.

Denken wir uns den Faden in viele sehr dünne Raum-Zeitfäden zerlegt, so entspricht jedem Eintritt eines dünnen Fadens in die untere Begrenzung der Sichel ein Austritt aus der oberen, wobei für beide das im Sinne von (4) und (5) ermittelte Produkt  $v dJ_n$  jedesmal gleichen Wert hat. Es verschwindet daher die Differenz der zwei Integrale  $\int v dJ_n$ , das erste erstreckt über die obere, das zweite über die untere Begrenzung der Sichel. Diese Differenz findet sich nach einem bekannten Theoreme der Integralrechnung gleich dem Integrale

$$\iiint \text{lor } v \bar{w} dx dy dz dt,$$

erstreckt über das ganze Gebiet der Sichel, wobei (vgl. (67) in § 12)

$$\text{lor } \nu \bar{w} = \frac{\partial \nu w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \nu w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \nu w_4}{\partial x_4}$$

ist. Wird die Sichel auf einen Raum-Zeitpunkt  $x, y, z, t$  zusammengezogen, so folgt hiernach die Differentialgleichung

$$(6) \quad \text{lor } \nu \bar{w} = 0,$$

d. i. die *Kontinuitätsbedingung*

$$\frac{\partial \mu w_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu w_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu w_z}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

Wir bilden ferner, über das ganze Gebiet einer Raum-Zeit-Sichel erstreckt, das Integral

$$(7) \quad N = \iiint \nu dx dy dz dt.$$

Wir zerschneiden die Sichel in dünne Raum-Zeitfäden und jeden dieser Fäden weiter nach kleinen Elementen  $d\tau$  seiner Eigenzeit, die aber noch gegen die Lineardimensionen der Normalquerschnitte groß sind, setzen die Masse eines solchen Fadens  $\nu dJ_n = dm$  und schreiben noch  $\tau^0$  und  $\tau^1$  für die Eigenzeit des Fadens auf der unteren bzw. der oberen Begrenzung der Sichel; alsdann ist das Integral (7) auch zu deuten als

$$\iint \nu dJ_n d\tau = \int (\tau^1 - \tau^0) dm$$

über die sämtlichen Fäden in der Sichel.

Nun fasse ich die Raum-Zeitlinien innerhalb einer Raum-Zeit-Sichel gleichsam wie substanzielle Kurven aus substanziellen Punkten bestehend auf und denke sie mir einer kontinuierlichen Lagenveränderung innerhalb der Sichel in folgender Art unterworfen. Die ganzen Kurven sollen irgendwie *unter Festhaltung der Endpunkte auf der unteren und der oberen Begrenzung* der Sichel verrückt und die einzelnen substanziellen Punkte auf ihnen dabei so geführt werden, daß sie stets *normal zu den Kurven* fortschreiten. Der ganze Prozeß soll analytisch mittels eines Parameters  $\vartheta$  darzustellen sein und dem Werte  $\vartheta = 0$  sollen die Kurven in dem wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien innerhalb der Sichel entsprechen. Ein solcher Prozeß soll eine *virtuelle Verrückung in der Sichel* heißen.

Der Punkt  $x, y, z, t$  in der Sichel für  $\vartheta = 0$  möge beim Parameterwerte  $\vartheta$  nach  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t$  gekommen sein; letztere Größen sind dann Funktionen von  $x, y, z, t, \vartheta$ . Fassen wir wieder einen unendlich dünnen Raum-Zeitfaden an der Stelle  $x, y, z, t$  auf mit einem Normalquerschnitte von einem Inhalte  $dJ_n$  und ist  $dJ_n + \delta dJ_n$  der Inhalt des Normalquerschnitts an der entsprechenden Stelle des variierten Fadens, so wollen wir dem *Prinzip von der Erhaltung der*

*Massen* in der Weise Rechnung tragen, daß wir an dieser variierten Stelle eine Ruh-Massendichte  $\nu + \delta\nu$  gemäß

$$(8) \quad (\nu + \delta\nu)(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm$$

annehmen, unter  $\nu$  die wirkliche Ruh-Massendichte an  $x, y, z, t$  verstanden. Zuzufolge dieser Festsetzung variiert dann das Integral (7), über das Gebiet der Sichel erstreckt, bei der virtuellen Verrückung als eine bestimmte Funktion  $N + \delta N$  von  $\vartheta$  und wir wollen diese Funktion  $N + \delta N$  die *Massenwirkung* bei der virtuellen Verrückung nennen.

Ziehen wir die Schreibweise mit Indizes heran, so wird sein:

$$(9) \quad d(x_h + \delta x_h) = dx_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \right).$$

Nun leuchtet auf Grund der schon gemachten Bemerkungen alsbald ein, daß der Wert von  $N + \delta N$  beim Parameterwerte  $\vartheta$  sein wird:

$$(10) \quad N + \delta N = \iiint \nu \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} dx dy dz dt,$$

über die Sichel erstreckt, wobei  $d(\tau + \delta\tau)$  diejenige GröÙe bedeutet, die sich aus

$$\sqrt{-(dx_1 + d\delta x_1)^2 - (dx_2 + d\delta x_2)^2 - (dx_3 + d\delta x_3)^2 - (dx_4 + d\delta x_4)^2}$$

mittels (9) und

$$dx_1 = w_1 d\tau, \quad dx_2 = w_2 d\tau, \quad dx_3 = w_3 d\tau, \quad dx_4 = w_4 d\tau, \quad d\vartheta = 0$$

ableitet; es ist also

$$(11) \quad \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h \left( w_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} w_k \right)^2} \quad \left( \begin{matrix} h = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \right).$$

Nun wollen wir den Wert des Differentialquotienten

$$(12) \quad \left( \frac{d(N + \delta N)}{d\vartheta} \right)_{(\vartheta=0)}$$

einer Umformung unterwerfen. Da jedes  $\delta x_h$  als Funktion der Argumente  $x_1, x_2, x_3, x_4, \vartheta$  für  $\vartheta = 0$  allgemein verschwindet, so ist auch allgemein  $\frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} = 0$  für  $\vartheta = 0$ . Setzen wir nun

$$(13) \quad \left( \frac{\partial \delta x_h}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=0} = \xi_h \quad (h = 1, 2, 3, 4),$$

so folgt auf Grund von (10) und (11) für den Ausdruck (12):

$$-\iiint \nu \sum_h w_h \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_3} w_3 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_4} w_4 \right) dx dy dz dt.$$

Für die Systeme  $x_1, x_2, x_3, x_4$  auf der Begrenzung der Sichel sollen

$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4$  bei jedem Werte  $\vartheta$  verschwinden und sind daher auch  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  überall Null. Danach verwandelt sich das letzte Integral durch partielle Integration in

$$\iiint \sum_h \xi_h \left( \frac{\partial v w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v w_h w_4}{\partial x_4} \right) dx dy dz dt.$$

Darin ist der Klammerausdruck

$$= w_h \sum_k \frac{\partial v w_k}{\partial x_k} + v \sum_k w_k \frac{\partial w_h}{\partial x_k}.$$

Die erste Summe hier verschwindet zufolge der Kontinuitätsbedingung (6), die zweite läßt sich darstellen als

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_4} \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx_h}{d\tau} \right),$$

wobei durch  $\frac{d}{d\tau}$  Differentialquotienten in Richtung der Raum-Zeitlinie einer Stelle angedeutet werden. Für den Differentialquotienten (12) resultiert damit endlich der Ausdruck

$$(14) \quad \iiint v \left( \frac{dw_1}{d\tau} \xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau} \xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau} \xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau} \xi_4 \right) dx dy dz dt.$$

Für eine virtuelle Verrückung in der Sichel hatten wir noch die Forderung gestellt, daß die substanziiell gedachten Punkte normal zu den aus ihnen hergestellten Kurven fortschreiten sollten; dies bedeutet für  $\vartheta = 0$ , daß die  $\xi_h$  der Bedingung

$$(15) \quad w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

zu entsprechen haben.

Denken wir nun an die Maxwell'schen Spannungen in der Elektrodynamik ruhender Körper und betrachten wir andererseits unsere Ergebnisse in den §§ 12 und 13, so liegt eine gewisse *Anpassung des Hamilton'schen Prinzips* für kontinuierlich ausgedehnte elastische Medien an das *Relativitätspostulat* nahe.

An jedem Raum-Zeitpunkte sei (wie in § 13) eine Raum-Zeit-Matrix II. Art

$$(16) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x & -iT_x \\ X_y & Y_y & Z_y & -iT_y \\ X_z & Y_z & Z_z & -iT_z \\ -iX_t & -iY_t & -iZ_t & T_t \end{vmatrix}$$

bekannt, worin  $X_x, Y_x, \dots, Z_z, T_x, \dots, X_t, \dots, T_t$  reelle Größen sind.



Für eine virtuelle Verrückung in einer Raum-Zeit-Sichel bei den vorhin angewandten Bezeichnungen möge der Wert des Integrals

$$(17) \quad W + \delta W = \iiint \left( \sum_{h,k} S_{hk} \frac{\partial(x_k + \delta x_k)}{\partial x_h} \right) dx dy dz dt,$$

über das Gebiet der Sichel erstreckt, die *Spannungswirkung* bei der virtuellen Verrückung heißen.

Die hier vorkommende Summe, ausführlicher und mit reellen Größen geschrieben, ist

$$\begin{aligned} & X_x + Y_y + Z_z + T_t \\ & + X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \dots + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \\ & - X_t \frac{\partial \delta x}{\partial t} - \dots + T_x \frac{\partial \delta t}{\partial x} + \dots + T_t \frac{\partial \delta t}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun folgendes *Minimalprinzip für die Mechanik* ansetzen:

*Wird irgendeine Raum-Zeit-Sichel abgegrenzt, so soll bei jeder virtuellen Verrückung in der Sichel die Summe aus der Massenwirkung und aus der Spannungswirkung für den wirklich stattfindenden Verlauf der Raum-Zeitlinien in der Sichel stets ein Extremum sein.*

Der Sinn dieser Aussage ist, daß bei jeder virtuellen Verrückung in den vorhin erklärten Zeichen

$$(18) \quad \left( \frac{d(\delta N + \delta W)}{d\delta} \right)_{\delta=0} = 0$$

sein soll.

Nach den Methoden der Variationsrechnung folgen aus diesem Minimalprinzip unter Rücksichtnahme auf die Bedingung (15) und mittels der Umformung (14) sogleich die folgenden vier Differentialgleichungen

$$(19) \quad v \frac{dw_h}{d\tau} = K_h + \kappa w_h \quad (h = 1, 2, 3, 4),$$

wo

$$(20) \quad K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4}$$

die Komponenten des Raum-Zeit-Vektors I. Art  $K = \text{lor } S$  sind und  $\kappa$  ein Faktor ist, dessen Bestimmung auf Grund von  $w\bar{w} = -1$  zu erfolgen hat. Durch Multiplikation von (19) mit  $w_h$  und nachherige Summation über  $h = 1, 2, 3, 4$  findet man  $\kappa = K\bar{w}$  und es wird  $K + (K\bar{w})w$  offenbar ein zu  $w$  normaler Raum-Zeit-Vektor I. Art. Schreiben wir die Komponenten dieses Vektors

$$X, Y, Z, iT,$$

so gelangen wir nunmehr zu folgenden *Gesetzen für die Bewegung der Materie*:

$$(21) \quad \begin{aligned} \nu \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} &= X, \\ \nu \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} &= Y, \\ \nu \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} &= Z, \\ \nu \frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= T. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

und

$$X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau} = T \frac{dt}{d\tau},$$

und auf Grund dieser Umstände würde sich die vierte der Gleichungen (21) als eine Folge der drei ersten darunter ansehen lassen.

Aus (21) leiten wir weiter die Gesetze für die Bewegung eines *materiellen Punktes*, das soll heißen für den Verlauf eines unendlich dünnen *Raum-Zeitfadens* ab.

Es bezeichne  $x, y, z, t$  einen Punkt der im Faden irgendwie angenommenen Hauptlinie. Wir bilden die Gleichungen (21) für die Punkte des *Normalquerschnitts* des Fadens durch  $x, y, z, t$  und integrieren sie, mit dem Inhaltselement des Querschnitts multipliziert, über den ganzen Raum des Normalquerschnitts. Sind die Integrale der rechten Seiten dabei  $R_x, R_y, R_z, R_t$  und ist  $m$  die konstante Masse des Fadens, so entsteht

$$(22) \quad \begin{aligned} m \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} &= R_x, \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} &= R_y, \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} &= R_z, \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= R_t. \end{aligned}$$

Dabei ist wieder  $R$  mit den Komponenten  $R_x, R_y, R_z, R_t$  ein Raum-Zeit-Vektor I. Art, der zu dem Raum-Zeit-Vektor I. Art  $w$ , Geschwindigkeit des materiellen Punktes, mit den Komponenten

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, i \frac{dt}{d\tau},$$

normal ist. Wir wollen diesen Vektor  $R$  die *bewegende Kraft* des materiellen Punktes nennen.

Integriert man jedoch die Gleichungen statt über den Normalquerschnitt des Fadens entsprechend über den zur  $t$ -Achse normalen Querschnitt des Fadens, der durch  $x, y, z, t$  gelegt ist, so entstehen (s. (4)) die Gleichungen (22), multipliziert noch mit  $\frac{d\tau}{dt}$ , insbesondere als letzte Gleichung darunter

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) = m_x R_x \frac{d\tau}{dt} + m_y R_y \frac{d\tau}{dt} + m_z R_z \frac{d\tau}{dt}.$$

Man wird nun die rechte Seite als *Arbeitsleistung* am materiellen Punkte für die Zeiteinheit aufzufassen haben. In der Gleichung selbst wird man dann den *Energiesatz* für die Bewegung des materiellen Punktes sehen und den Ausdruck

$$m \left( \frac{dt}{d\tau} - 1 \right) = m \left( \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} - 1 \right) = m \left( \frac{1}{2} |w|^2 + \frac{3}{8} |w|^4 + \dots \right)$$

als *kinetische Energie* des materiellen Punktes ansprechen.

Indem stets  $dt > d\tau$  ist, könnte man den Quotienten  $\frac{dt - d\tau}{d\tau}$  als das Vorgehen der Zeit gegen die Eigenzeit des materiellen Punktes bezeichnen und dann sich ausdrücken: Die kinetische Energie eines materiellen Punktes ist das Produkt seiner Masse in das Vorgehen der Zeit gegen seine Eigenzeit.

Das *Quadrupel* der Gleichungen (22) zeigt wieder die durch das Relativitätspostulat geforderte volle Symmetrie in  $x, y, z, it$ , wobei der vierten Gleichung, wie wir dies bereits in der Elektrodynamik analog antrafen, gleichsam eine höhere physikalische Evidenz zuzuschreiben ist. Auf Grund der Forderung dieser Symmetrie ist nach dem Muster der vierten Gleichung schon sofort das Tripel der drei ersten Gleichungen aufzubauen und im Hinblick auf diesen Umstand ist die Behauptung gerechtfertigt: Wird das Relativitätspostulat an die Spitze der Mechanik gestellt, so folgen die vollständigen Bewegungsgesetze allein aus dem Satze von der Energie.

Ich möchte nicht unterlassen, noch plausibel zu machen, daß nicht von den Erscheinungen der Gravitation her ein Widerspruch gegen die Annahme des Relativitätspostulates zu erwarten ist.\*)

Ist  $B^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  ein fester Raum-Zeitpunkt, so soll der Bereich aller derjenigen Raum-Zeitpunkte  $B(x, y, z, t)$ , für die

\*) In einer ganz anderen Weise, als ich hier vorgehe, hat H. Poincaré (Rend. Circ. Matem. Palermo, t. XXI (1906), p. 129) das Newtonsche Attraktionsgesetz dem Relativitätspostulate anzupassen versucht.

$$(23) \quad (x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z - z^*)^2 = (t - t^*)^2, \quad t - t^* \geq 0$$

ist, das *Strahlgebilde* des Raum-Zeitpunktes  $B^*$  heißen.

Von diesem Gebilde wird eine beliebig angenommene Raum-Zeitlinie stets nur in einem einzigen Raum-Zeitpunkte  $B$  geschnitten, wie einerseits aus der *Konvexität* des Gebildes, andererseits aus dem Umstande hervorgeht, daß alle Richtungen der Raum-Zeitlinie nur Richtungen von  $B^*$  nach der konkaven Seite des Gebildes sind. Es heiße dann  $B^*$  ein *Lichtpunkt* von  $B$ .

Wird in der Bedingung (23) der Punkt  $B(x, y, z, t)$  fest, der Punkt  $B^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  variabel gedacht, so stellt die nämliche Relation den Bereich aller Raum-Zeitpunkte  $B^*$  dar, die Lichtpunkte von  $B$  sind, und es zeigt sich analog, daß auf einer beliebigen Raum-Zeitlinie stets nur ein einziger Punkt  $B^*$  vorkommt, der ein Lichtpunkt von  $B$  ist.

Es möge nun ein materieller Punkt  $F$  von der Masse  $m$  bei Vorhandensein eines anderen materiellen Punktes  $F^*$  von der Masse  $m^*$  eine bewegende Kraft nach folgendem Gesetze erfahren. Stellen wir uns die Raum-Zeitfäden von  $F$  und  $F^*$  mit Hauptlinien in ihnen vor. Es sei  $BC$  ein unendlich kleines Element der Hauptlinie von  $F$ , weiter  $B^*$  der Lichtpunkt von  $B$ ,  $C^*$  der Lichtpunkt von  $C$  auf der Hauptlinie von  $F^*$ , sodann  $OA'$  der zu  $B^*C^*$  parallele Radiusvektor des hyperboloidischen Grundgebildes (2), endlich  $D^*$  der Schnittpunkt der Geraden  $B^*C^*$  mit dem durch  $B$  zu ihr normal gelegten Raume. *Die bewegende Kraft des Massenpunktes  $F$  im Raum-Zeitpunkte  $B$  möge nun sein derjenige zu  $BC$  normale Raum-Zeit-Vektor I. Art, der sich additiv zusammensetzt aus dem Vektor*

$$(24) \quad mm^* \left( \frac{OA'}{B^*D^*} \right)^3 BD^*$$

*in Richtung  $BD^*$  und dazu einem geeigneten Vektor in Richtung  $B^*C^*$ .*

Dabei ist unter  $\frac{OA'}{B^*D^*}$  das Verhältnis der betreffenden zwei parallelen Vektoren verstanden.

Es leuchtet ein, daß diese Festsetzung einen kovarianten Charakter in bezug auf die Lorentzsche Gruppe trägt.

Wir fragen nun, wie sich hiernach der Raum-Zeitfaden von  $F$  verhält, falls der materielle Punkt  $F^*$  eine gleichförmige Translationsbewegung ausführt, d. h. die Hauptlinie des Fadens von  $F^*$  eine Gerade ist. Wir verlegen den Raum-Zeit-Nullpunkt  $O$  in sie und können durch eine Lorentz-Transformation diese Gerade als  $t$ -Achse einführen. Nun bedeute  $x, y, z, t$  den Punkt  $B$  und es sei  $\tau^*$  die Eigenzeit des Punktes  $B^*$ , von  $O$  aus gerechnet. Unsere Festsetzung führt hier zu den Gleichungen

$$(25) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = - \frac{m^* x}{(t - \tau^*)^3}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = - \frac{m^* y}{(t - \tau^*)^3}, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = - \frac{m^* z}{(t - \tau^*)^3}$$

und

$$(26) \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = - \frac{m^*}{(t - \tau^*)^3} \frac{d(t - \tau^*)}{d\tau},$$

wobei

$$(27) \quad x^2 + y^2 + z^2 = (t - \tau^*)^2$$

und

$$(28) \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

ist. Die drei Gleichungen (25) lauten in Anbetracht von (27) genau wie die Gleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes unter Anziehung eines festen Zentrums nach dem Newtonschen Gesetze, nur daß statt der Zeit  $t$  die Eigenzeit  $\tau$  des materiellen Punktes tritt. Die vierte Gleichung (26) gibt sodann den Zusammenhang zwischen Eigenzeit und Zeit für den materiellen Punkt.

Es möge nun die Bahn des Raumpunktes  $x, y, z$  für die verschiedenen  $\tau$  eine Ellipse mit der großen Halbachse  $a$ , der Exzentrizität  $e$  sein und in ihr  $E$  die exzentrische Anomalie bedeuten,  $T$  den Zuwachs an Eigenzeit für einen vollen Umlauf in der Bahn, endlich  $nT = 2\pi$  sein, sodaß bei geeignetem Anfangspunkte von  $\tau$  die Keplersche Gleichung

$$(29) \quad n\tau = E - e \sin E$$

besteht. Verändern wir noch die Zeiteinheit und bezeichnen die Lichtgeschwindigkeit mit  $c$ , so entsteht aus (28):

$$(30) \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1 = \frac{m^*}{ac^2} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}.$$

Unter Vernachlässigung von  $c^{-4}$  gegen 1 folgt dann

$$ndt = nd\tau \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{ac^2} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}\right)$$

woraus mit Benutzung von (29) sich

$$(31) \quad nt + \text{konst.} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^*}{ac^2}\right) n\tau + \frac{m^*}{ac^2} \sin E$$

ergibt. Der Faktor  $\frac{m^*}{ac^2}$  hierin ist das Quadrat des Verhältnisses einer gewissen mittleren Geschwindigkeit von  $F$  in seiner Bahn zur Lichtgeschwindigkeit. Wird für  $m^*$  die Masse der Sonne, für  $a$  die halbe große Achse der Erdbahn gesetzt, so beträgt dieser Faktor  $10^{-8}$ .

Ein Anziehungsgesetz für Massen gemäß der eben erörterten und mit dem Relativitätspostulate verbundenen Formulierung würde zugleich eine *Fortpflanzung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit* bedeuten. In Anbetracht der Kleinheit des periodischen Termes in (31) dürfte eine Entscheidung *gegen* ein solches Gesetz und die vorgeschlagene modifizierte Mechanik zugunsten des Newtonschen Attraktionsgesetzes mit der Newtonschen Mechanik aus den astronomischen Beobachtungen nicht abzuleiten sein.

---