Ueber einfache singuläre Punkte linearer Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Pochhammer.*)

In einer linearen Differentialgleichung, bei welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich Eins gemacht ist, werden, nach Herrn *Weierstrass*, diejenigen Werthe der unabhängigen Veränderlichen, für welche einer oder mehrere der Coefficienten unendlich sind, als *singuläre* Werthe oder Punkte bezeichnet. Für die Umgebungen aller nicht singulären Punkte sind dann die Reihenentwicklungen der Integralfunction bekannt, da man stets eine eindeutige convergente Reihe mit n willkürlichen Constanten als Lösung der Differentialgleichung erhält. Dagegen ist es bisher nur in sehr wenigen Fällen möglich gewesen, das Verhalten der Function bei den singulären Punkten festzustellen. Es ist mehrfach der umgekehrte Weg eingeschlagen worden, aus gewissen Anforderungen, welche man an die Integralfunction stellte, die Differentialgleichung derselben zu gewinnen; indessen die wichtigere Aufgabe bleibt doch immer, aus einer *gegebenen* Differentialgleichung die Eigenschaften der Integralfunction zu bestimmen, was zunächst die Auffindung der Reihenentwicklungen für die Umgebungen der singulären Punkte erfordert.

Es soll im Folgenden ein besonders einfacher Fall, welcher ohne Weiteres in den Vordergrund tritt, behandelt werden, nämlich der, wo die Coefficienten nur wie eine *erste negative Potenz* unendlich werden. Wenn man einer Differentialgleichung die Form geben kann

$$(x-a)\frac{d^n y}{dx^n} = E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + E_n(x)y,$$

wo $E_1(x)$, $E_2(x)$, ... $E_n(x)$ Functionen, die *in der Umgebung von a eindeutig und stetig* sind, bedeuten: so soll, der Abkürzung halber, der Werth a ein *einfacher singulärer* Werth oder Punkt heissen. Hat z. B. eine lineare Differentialgleichung ganze rationale Coefficienten, so sind alle einfachen Wurzeln des Coefficienten der höchsten Ableitung einfache singuläre Werthe der Differentialgleichung. Der Werth $E_1(a)$ wird die *zugehörige Zahl* des einfachen singulären Punktes a genannt. Man bezeichnet hier $E_1(a)$ kurz durch b.

Für die obige Differentialgleichung gilt dann in Bezug auf die Umgebung des einfachen singulären Punktes a der folgende Satz:

1) Es existirt stets eine *convergente, $n-1$ willkürliche Constanten enthaltende Reihe*
$$y = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots,$$
welche der Differentialgleichung genügt. Ist die zugehörige Zahl b weder gleich einer positiven ganzen Zahl noch gleich Null, so nehmen die $n-1$ *ersten* Coefficienten c_0, c_1, ... c_{n-2} beliebige Werthe an. Ist aber b eine positive ganze Zahl oder Null, so bleibt der $b+n^{\text{te}}$ Coefficient, c_{b+n-1}, willkürlich, und es sind in Folge dessen unter den $b+n-1$ ersten Coefficienten nur $n-2$ willkürliche Constanten vorhanden.

2) Das n^{te} partikuläre Integral wird, ausser wenn b ganzzahlig ist, durch das Product
$$(x-a)^{b+n-1}\{C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots\}$$
dargestellt, in welchem die *Reihe convergent,* und C_0 *von Null verschieden* ist. Ist jedoch b eine positive oder negative ganze Zahl, die Null einbegriffen, so enthält das n^{te} Integral im Allgemeinen logarithmische Glieder; in speciellen Fällen können letztere fortfallen.

Die beiden Theile des Satzes sollen in den folgenden zwei Abschnitten nacheinander behandelt werden.

I.

Um den ersten Theil des behaupteten Satzes zu beweisen, setzt man in die gegebene Differentialgleichung
$$(1.)\qquad (x-a)\frac{d^n y}{dx^n} = E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+E_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+E_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+E_n(x)y$$
für y die Reihe
$$(2.)\qquad y = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$
ein, und entwickelt die Gleichungen für die Coefficienten c. Man hat dann zu zeigen, 1) dass $n-1$ der Coefficienten c willkürlich bleiben, 2) dass alle übrigen in eindeutiger Weise als Functionen dieser $n-1$ bestimmt sind, 3) dass die Reihe convergent ist.

Für die Ableitungen von y ergeben sich die Ausdrücke:
$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \nu!\{(\nu)_\nu c_\nu+(\nu+1)_\nu c_{\nu+1}(x-a)+(\nu+2)_\nu c_{\nu+2}(x-a)^2+\cdots\},$$
in welchen die eingeklammerten, mit einem Index versehenen Constanten Binomialcoefficienten bedeuten. Nachdem man auch für die Functionen $E_i(x)$ die nach der Voraussetzung convergenten Entwicklungen
$$E_i(a)+E_i'(a)\frac{x-a}{1}+E_i''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\cdots$$

eingesetzt hat, sind in der Gleichung (1.) die Factoren der einzelnen Potenzen von $x-a$ gleich Null zu setzen.

Es ist für die Differentialgleichung (1.) charakteristisch, dass in den so erhaltenen Gleichungen dasjenige c, welches den höchsten Index hat, stets nur durch die beiden ersten Summanden

$$(x-a)\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{und} \quad E_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

geliefert wird; in Folge dessen hat das c mit höchstem Index einen ausschliesslich aus ganzen Zahlen und dem Werthe b zusammengesetzten Factor.

Man gewinnt für die Grössen c das folgende Gleichungssystem:

$$-(n-1)_{n-1}(n-1)!\,b\,c_{n-1} = (n-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\,c_{n-2}+\cdots+(1)_1E_{n-1}(a)c_1+E_n(a)c_0,$$

$$\begin{aligned}(n)_{n-1}(n-1)!(1-b)\,c_n &= \left\{(n-1)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n-1)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_{n-1}\\ &\quad+\left\{(n-2)_{n-2}(n-2)!\frac{E_2'(a)}{1}+(n-2)_{n-3}(n-3)!\,E_3(a)\right\}c_{n-2}+\cdots+\frac{E_n'(a)}{1}c_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n+1)_{n-1}(n-1)!(2-b)\,c_{n+1} &= \left\{(n)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_n\\ &\quad+\left\{(n-1)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1''(a)}{1.2}+(n-1)_{n-2}(n-2)!\frac{E_2'(a)}{1}+(n-1)_{n-3}(n-3)!E_3(a)\right\}c_{n-1}\\ &\quad+\cdots+\frac{E_n''(a)}{1.2}c_0,\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}&(n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,(m-b)c_{n+m-1}\\ &= \left\{(n+m-2)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+(n+m-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\right\}c_{n+m-2}+\cdots+\frac{E_n^{(m)}(a)}{m!}c_0,\end{aligned}$$

etc.

Die erste Gleichung giebt c_{n-1} als lineare Function der $n-1$ Grössen c_0, $c_1, \dots c_{n-2}$, ausgenommen den Fall, wo b gleich Null ist. Die zweite Gleichung bestimmt c_n, ausser wenn b gleich 1, die dritte c_{n+1}, ausser wenn b gleich 2 ist. Allgemein ergiebt sich c_{n+m-1} als lineare Function der c mit niederem Index, wenn nicht $b=m$ ist.

Hieraus folgt, dass wenn b nicht eine positive ganze Zahl oder Null ist, die $n-1$ Grössen $c_0, c_1, \dots c_{n-2}$ willkürliche Werthe annehmen, dass aber sämmtliche übrigen Coefficienten c_{n-1}, c_n, c_{n+1} etc. in eindeutiger Weise durch $c_0, c_1, \dots c_{n-2}$ ausgedrückt sind. Ist b eine positive ganze Zahl oder Null, so ist der Coefficient c_{b+n-1} nicht durch die Coefficienten mit niederem Index ausdrückbar.

Um die Convergenz der Reihe (2.) darzuthun, setzt man zunächst voraus, dass der reelle Theil von b negativ sei. Der Beweis der Convergenz wird, analog dem von *Cauchy*, so wie von den Herren *Briot, Bouquet* *) und *Fuchs* **) angewendeten Verfahren, dadurch geliefert, dass die Reihe für y mit einer einfacheren Reihe verglichen wird, welche weniger stark convergirt und lauter positive Glieder hat. Das Auftreten eines von b abhängigen Nenners erfordert hier gewisse Modificationen der Methode.

In den Bestimmungsgleichungen der Grössen c findet sich $E_1(a)$ oder b stets nur auf der linken Seite, während alle übrigen Functionalwerthe $E_2(a), \dots E_n(a)$, $E'_1(a)$, $E'_2(a), \dots E'_n(a)$, $E''_1(a)$ etc. ausschliesslich auf der rechten Seite vorkommen; hieraus folgt, dass aus letzteren der Zähler, aus b dagegen der Nenner der Coefficienten c gebildet wird. Um die Reihe (2.) mit einer Reihe, deren Glieder absolut grösser sind, zu vergleichen, vergrössert man die Zähler der Coefficienten, während man die Nenner verkleinert oder unverändert lässt.

Es sei $b = -p+qi$, wo p positiv; dann ist der Factor von c_{n+m-1} in derjenigen Gleichung, welche diesen Coefficienten bestimmt, gleich

$$(n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,(m+p-qi).$$

Der Modul des letzteren Ausdrucks verkleinert sich, wenn der imaginäre Theil ganz fortgelassen, also b durch $-p$ ersetzt wird. Ist b reell, so bleibt der erwähnte Factor unverändert.

Wenn man sodann in den Gleichungen an Stelle von $c_0, c_1, \dots c_{n-2}$ reelle positive Werthe $k_0, k_1, \dots k_{n-2}$, welche grösser als die Moduln von $c_0, c_1, \dots c_{n-2}$ sind, einführt, und alle Ausdrücke $E_i(a)$, $E'_i(a)$, $E''_i(a)$ etc., mit Ausnahme von $E_1(a)$, durch reelle positive Werthe ersetzt, die grösser als die Moduln der bisherigen Werthe sind: so werden die neuen Coefficienten, welche k_{n-1}, k_n, k_{n+1} etc. heissen mögen, sämmtlich reell, positiv und grösser als die Moduln der Coefficienten c_{n-1}, c_n, c_{n+1} etc. sein. Denn in allen Fällen ist der Zähler vergrössert, der Nenner verkleinert oder unverändert gelassen worden, und es kommen, da auch p als positiv vorausgesetzt ist, nur reelle positive Grössen vor. Kann man folglich beweisen, dass eine derartig gebildete Reihe

$$k_0 + k_1(x-a) + \cdots + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_n(x-a)^n + \cdots$$

convergent ist, so gilt dies um so mehr von der Reihe (2.).

---

*) Journ. de l'École polyt., cah. 36.

**) Dieses Journal Bd. 66.

Um nun die Grössen $E_i(a)$, $E'_i(a)$, $E''_i(a)$ etc. durch reelle positive Ausdrücke, welche grösser als ihre Moduln sind, zu ersetzen, wendet man den bekannten Satz an, dass für das ganze Gebiet des um einen Punkt a mit einem Radius r beschriebenen Kreises und für ein beliebiges ν die Ungleichheit besteht

$$\left[\frac{d^\nu}{dx^\nu}\frac{M_i}{1-\frac{x-a}{r}}\right]_{x=a} > \operatorname{mod} E_i^{(\nu)}(a),$$

wenn M_i dem grössten Werthe des Moduls von $E_i(x)$ auf jener Kreisfläche gleich ist oder ihn übertrifft *). Man denke sich demnach für eine Variable u eine der Gleichung (1.) analoge Differentialgleichung gebildet, in welcher die Functionen $E_i(x)$, für $i = 2, 3, \dots n$, durch die Quotienten $\dfrac{M_i}{1-\frac{x-a}{r}}$ ersetzt sind.

An Stelle von $E_1(x)$ hat man eine Function zu wählen, deren Ableitungen für $x = a$ zwar grösser als $E'_1(a)$, $E''_1(a)$ etc. sind, die aber selbst für $x = a$ den Werth $-p$ annimmt. Eine solche Function ist der Ausdruck

$$\frac{M_1}{1-\frac{x-a}{r}} - M_1 - p,$$

in welchem M_1 wieder die oben angeführte Bedeutung hat.

Man gewinnt somit den Schluss, dass, wenn die Differentialgleichung

$$(3.)\quad \begin{cases} (x-a)\dfrac{d^n u}{dx^n} = \left\{\dfrac{M_1}{1-\frac{x-a}{r}} - M_1 - p\right\}\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dfrac{M_2}{1-\frac{x-a}{r}}\dfrac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \\ \quad + \dfrac{M_3}{1-\frac{x-a}{r}}\dfrac{d^{n-3}u}{dx^{n-3}} + \dots + \dfrac{M_{n-1}}{1-\frac{x-a}{r}}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{M_n}{1-\frac{x-a}{r}}u \end{cases}$$

eine convergente Reihe

$$(4.)\qquad u = k_0 + k_1(x-a) + \dots + k_{n-1}(x-a)^{n-1} + k_n(x-a)^n + \dots$$

mit $n-1$ willkürlichen Constanten zum Integral hat, die Reihe (2.) jedenfalls auch convergent ist. Es bleibt folglich nur übrig, die Convergenz der Reihe (4.) zu beweisen.

Man multiplicire die Gleichung (3.) mit $1-\frac{x-a}{r}$, wodurch sämmtliche

*) Cfr. *Briot* et *Bouquet*, Fonct. doubl. périod., Seite 44.

Coefficienten derselben mit Ausnahme der beiden ersten constant werden, und führe statt x die Variable z ein, indem man setzt

$$\frac{x-a}{r} = z, \qquad dx = r\,dz.$$

Auf diese Weise nimmt die Gleichung (3.), wenn man M_1+p kurz durch M_1' bezeichnet, die Gestalt an:

$$(5.)\quad \begin{cases} (z-z^2)\dfrac{d^n u}{dz^n} = (-p+M_1' z)\dfrac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + M_2 r\dfrac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} \\ \quad + M_3 r^2\dfrac{d^{n-3}u}{dz^{n-3}} + \cdots + M_{n-1} r^{n-2}\dfrac{du}{dz} + M_n r^{n-1} u. \end{cases}$$

Die Reihe (4.) geht, indem $k_\nu = \frac{K_\nu}{r^\nu}$ genommen wird, über in:

$$(6.)\qquad u = K_0 + K_1 z + \cdots + K_{n-1} z^{n-1} + K_n z^n + \cdots.$$

Setzt man die Reihe (6.) in die Differentialgleichung (5.) ein, so lautet die erste der für die Constanten K sich ergebenden Gleichungen:

$$(n-1)_{n-1}(n-1)!\,p K_{n-1}$$
$$= (n-2)_{n-2}(n-2)!\,M_2 r K_{n-2} + (n-3)_{n-3}(n-3)!\,M_3 r^2 K_{n-3} + \cdots + M_n r^{n-1} K_0,$$

und allgemein erhält man:

$$(7.)\quad \begin{cases} (n+m)_{n-1}(n-1)!\,(m+p+1)K_{n+m} \\ = \{(n+m-1)_n n! + (n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,M_1' + (n+m-1)_{n-2}(n-2)!\,M_2 r\}K_{n+m-1} \\ + (n+m-2)_{n-3}(n-3)!\,M_3 r^2 K_{n+m-2} + (n+m-3)_{n-4}(n-4)!\,M_4 r^3 K_{n+m-3} + \cdots + M_n r^{n-1} K_{m+1}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung (7.) ist der Grenzwerth des Quotienten aus K_{n+m} und K_{n+m-1} für $m=\infty$ zu berechnen. Man dividirt die Gleichung durch K_{n+m-1} und hat zunächst zu beweisen, dass die Quotienten

$$\frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}},\quad \frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}},\quad \ldots\quad \frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}$$

für $m=\infty$ endlich bleiben. Da alle vorkommenden Grössen reell und positiv sind, kann man die Gleichung (7.) schreiben:

$$(n+m)_{n-1}(n-1)!\,(m+p+1)K_{n+m} = \{(n+m-1)_n n! + (n+m-1)_{n-1}(n-1)!\,M_1'\}K_{n+m-1} + P,$$

oder

$$\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} = \frac{(m+1)m + (m+1)M_1'}{(n+m)(m+p+1)} + P',$$

wo durch P und P' reelle positive Grössen bezeichnet werden. Es ist aber:

$$\frac{(m+1)m + (m+1)M_1'}{(n+m)(m+p+1)} = \frac{m^2 + (M_1'+1)m + M_1'}{m^2 + (p+n+1)m + np + n};$$

nimmt man also $M_1' > np+n$, was durchaus erlaubt ist, da M_1' hinsichtlich seiner Grösse nicht beschränkt wurde, so ist der letztere Quotient grösser als 1, und es folgt für ein beliebiges m

$$K_{n+m} > K_{n+m-1}.$$

Da somit die Grössen K mit wachsendem Index grösser werden, so sind alle Quotienten

$$\frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}},\quad \frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}},\quad \dots\quad \frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}$$

kleiner als Eins.

Zur Bestimmung des Grenzwerthes von $\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}}$ erhält man aus (7.):

$$\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}} = \frac{(m+1)m+(m+1)M_1'+M_2 r}{(n+m)(m+p+1)} + \frac{(n+m-2)_{n-3}(n-3)!M_3 r^2}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)}\frac{K_{n+m-2}}{K_{n+m-1}}$$
$$+\frac{(n+m-3)_{n-4}(n-4)!M_4 r^3}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)}\frac{K_{n+m-3}}{K_{n+m-1}} + \dots + \frac{M_n r^{n-1}}{(n+m)_{n-1}(n-1)!(m+p+1)}\frac{K_{m+1}}{K_{n+m-1}}.$$

Mit zunehmendem m nähert sich der erste Quotient auf der rechten Seite der Grenze 1, alle übrigen der Grenze 0; es ergiebt sich demnach:

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}}\right) = 1.$$

In der Reihe (6.) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder für einen unendlich wachsenden Index gleich

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{K_{n+m}z^{n+m}}{K_{n+m-1}z^{n+m-1}}\right) = z\lim_{m=\infty}\left(\frac{K_{n+m}}{K_{n+m-1}}\right) = z.$$

Der Modul von z oder $\frac{x-a}{r}$ ist aber in der Umgebung des Punktes a kleiner als Eins; denn der Werth r ist nur der Einschränkung unterworfen, dass derselbe kleiner sein muss, als der Abstand des Punktes a von dem nächstgelegenen singulären Punkte. Folglich ist, nach bekannter Regel, die durch die Gleichung (4.) oder (6.) angegebene Reihenentwicklung der Function u für das ganze Gebiet des Punktes a convergent, wodurch gleichzeitig die Convergenz der Reihe (2.) bewiesen ist, für den Fall dass der reelle Theil von b negativ ist.

Der Fall, wo der reelle Theil von b positiv oder Null ist, wird auf den, wo derselbe negativ ist, mittelst successiver Differentiationen der gegebenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die Gleichung (1.), einmal differentiirt, giebt:

$$(x-a)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = (E_1(x)-1)\frac{d^n y}{dx^n} + (E_1'(x)+E_2(x))\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + E_n'(x)y$$

und nach s Differentiationen

$$(x-a)\frac{d^{n+s}y}{dx^{n+s}} = (E_1(x)-s)\frac{d^{n+s-1}y}{dx^{n+s-1}}+H_2(x)\frac{d^{n+s-2}y}{dx^{n+s-2}}+\cdots+H_{n+s}(x)y,$$

wo $H_2(x), \dots H_{n+s}(x)$ gleich Summen der Functionen $E(x)$ und ihrer Ableitungen, und folglich ebenfalls eindeutig und stetig in der Umgebung von a sind. Der Punkt a ist wieder ein einfacher singulärer Punkt der Differentialgleichung, aber die zugehörige Zahl ist um eine ganze Zahl verkleinert worden. Es möge durch s diejenige ganze Zahl bezeichnet werden, welche man von b subtrahiren muss, um den reellen Theil dieser Grösse negativ zu machen.

Denkt man sich dann eine Function η durch die letzterhaltene Differentialgleichung $n+s^{\text{ter}}$ Ordnung definirt

$$(8.)\qquad (x-a)\frac{d^{n+s}\eta}{dx^{n+s}} = (E_1(x)-s)\frac{d^{n+s-1}\eta}{dx^{n+s-1}}+H_2(x)\frac{d^{n+s-2}\eta}{dx^{n+s-2}}+\cdots+H_{n+s}(x)\eta,$$

so folgt aus dem Vorhergehenden, dass der Gleichung (8.) durch eine convergente Reihe

$$(9.)\qquad \eta = \gamma_0+\gamma_1(x-a)+\cdots+\gamma_{n+s-2}(x-a)^{n+s-2}+\gamma_{n+s-1}(x-a)^{n+s-1}+\cdots$$

genügt wird, in welcher die $n+s-1$ ersten Coefficienten, $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n+s-2}$, willkürliche Constanten sind.

Die Reihe (9.) geht für gewisse Werthe der $n+s-1$ willkürlichen Constanten in ein Integral der Differentialgleichung (1.) über. Damit die Reihe (9.) der Gleichung (1.) genüge, müssen zwischen den Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n+s-2}$ dieselben s Relationen bestehen, welche für die $n+s-1$ ersten Coefficienten c der Reihe (2.) gefunden wurden, nämlich:

$$(10.)\qquad \begin{cases} -(n-1)_{n-1}(n-1)!\,b\gamma_{n-1} = (n-2)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\gamma_{n-2}+\cdots+E_n(a)\gamma_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+s-2)_{n-1}(n-1)!\,(s-b-1)\gamma_{n+s-2} = \\ \qquad \left\{(n+s-3)_{n-1}(n-1)!\frac{E_1'(a)}{1}+\cdots\right\}\gamma_{n+s-3}+\cdots+\frac{E_n^{(s-1)}(a)}{(s-1)!}\gamma_0. \end{cases}$$

Diese s Gleichungen zwischen $\gamma_0, \dots \gamma_{n+s-2}$ sind aber immer hinreichend, um sämmtliche Grössen γ völlig identisch mit den Grössen c, und daher die Reihe (9.) zu einem Integral der Gleichung (1.) zu machen.

Es wurde bewiesen, dass für ein im reellen Theile negatives b die Reihe (2.) convergent, die $n-1$ ersten Coefficienten willkürlich, alle übrigen Coefficienten aber in eindeutiger Weise durch diese bestimmt seien. Da es demnach nicht zwei verschiedene convergente Reihenentwicklungen von der angeführten Form geben kann, die der Differentialgleichung (1.) genügen, und deren $n-1$ erste Coefficienten willkürliche Constanten sind: so muss für den Fall, dass der reelle Theil von b negativ ist, das Gleichungssystem der Grössen γ durch die Gleichungen (10.) identisch mit dem Gleichungssystem der Grössen c werden. In Bezug auf die Frage der Identität ist aber der Umstand, ob der reelle Theil von b positiv oder negativ ist, völlig unerheblich; es muss daher in allen Fällen die Reihe (9.) durch die s Gleichungen (10.) in die Reihe (2.) übergehen. Weil nun die Reihe (9.) für ganz beliebige Werthe von $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{n+s-2}$, also auch für die durch die Gleichungen (10.) bestimmten, convergent ist: so ist hierdurch der Beweis geliefert, dass die Reihe (2.) auch für den Fall, dass der reelle Theil von b positiv ist, convergirt.

Aus der Convergenz der Reihe und den Gleichungen (10.) folgt, dass, sobald b nicht eine positive ganze Zahl oder Null ist, die Function y und die $n-2$ ersten Ableitungen derselben für $x=a$ beliebigen Werthen gleichgemacht werden können. Ist dagegen b gleich einer positiven ganzen Zahl oder gleich Null, so ist, wie aus dem Früheren hervorgeht, der $b+n^{\text{te}}$ Coefficient, c_{b+n-1}, willkürlich. Es bleiben alsdann noch $n-2$ unter den $b+n-1$ ersten Coefficienten beliebig. Zwischen $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ bestehen erstens die b Gleichungen, welche mit den Gleichungen (10.) für $s=b$ gleichlautend sind; und zweitens werden diese Grössen durch diejenige Gleichung ($s=b+1$) beschränkt, welche sonst c_{b+n-1} bestimmt, deren linke Seite aber hier gleich Null ist. Indem also die $b+n-1$ Grössen durch $b+1$ lineare Gleichungen verbunden sind, bleiben $n-2$ derselben unbeschränkt, während die übrigen sich als eindeutige lineare Functionen jener $n-2$ ergeben.

Es darf jedoch in diesem Falle nicht mehr behauptet werden, dass die $n-2$ ersten Coefficienten der Reihe (2.) beliebigen Werthen gleichgemacht werden können. Im Gegentheil findet man unmittelbar gewisse Specialfälle, in denen c_0 gleich Null sein muss, z. B.:

$$b=0, \quad E_2(a) = E_3(a) = \cdots = E_{n-1}(a) = 0.$$

Ob man für ein ganzzahliges, positives b und für $b=0$ die Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{n-3}$ zu willkürlichen Constanten nehmen kann, oder ob andere der $b+n-1$ ersten Coefficienten beliebig bleiben müssen, hängt davon ab, ob bei Auflösung der $b+1$ Gleichungen in Bezug auf $c_{n-2}, c_{n-1}, \dots c_{b+n-2}$ die Nenner der für letztere sich ergebenden Ausdrücke sämmtlich von Null verschieden sind, oder nicht.

Man bemerke, dass, wenn jene $n-2$ willkürlichen Werthe gleich Null genommen werden, die $b+n-1$ ersten Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ sämmtlich verschwinden, so dass man eine mit der Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ beginnende Reihenentwicklung für y erhält.

II.

Der zweite Theil des Satzes sagt aus, dass, wenn b nicht ganzzahlig ist, das n^{te} Integral durch ein Product

$$(11.)\qquad y = (x-a)^{b+n-1}\{C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots\},$$

in welchem die Reihe convergent, und C_0 von Null verschieden ist, gebildet wird. Auf die Existenz eines derartigen Integrals wird man sogleich hingewiesen, wenn man in die Gleichung (1.) für y die Reihe

$$y = C_0(x-a)^\sigma+C_1(x-a)^{\sigma+1}+C\,(x-a)^{\sigma+2}+\cdots$$

einsetzt. Dann ergiebt sich für die Grössen C das Gleichungssystem:

$$(12.)\quad\begin{cases}\{(\sigma)_n n!-(\sigma)_{n-1}(n-1)!\,b\}\,C_0=0,\\ \{(\sigma+1)_n n!-(\sigma+1)_{n-1}(n-1)!\,b\}\,C_1\\ \qquad\qquad = \{(\sigma)_{n-1}(n-1)!\,E_1'(a)+(\sigma)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\}\,C_0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \{(\sigma+m)_n n!-(\sigma+m)_{n-1}(n-1)!\,b\}\,C_m\\ \quad = \{(\sigma+m-1)_{n-1}(n-1)!\,E_1'(a)+(\sigma+m-1)_{n-2}(n-2)!\,E_2(a)\}\,C_{m-1}+\cdots,\\ \text{etc.}\end{cases}$$

Die erste der Gleichungen (12.) giebt an, welche Potenzen das Anfangsglied der Entwicklung von y bilden können. Damit C_0 von Null verschieden sei, muss σ der Gleichung genügen:

$$(13.)\qquad (\sigma)_n n!-(\sigma)_{n-1}(n-1)!\,b = \sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\dots(\sigma-n+2)(\sigma-b-n+1) = 0.$$

Die $n-1$ Wurzeln $\sigma=0$, $\sigma=1$, $\sigma=2$, ... $\sigma=n-2$ betreffen die im ersten Abschnitt behandelten Integrale; denn wegen der Willkürlichkeit der $n-1$ ersten Constanten kann man die Reihe (2.) auch mit jeder der Potenzen $x-a$, $(x-a)^2$, ... $(x-a)^{n-2}$ beginnen lassen. Die n^{te} Wurzel der Gleichung (13.) giebt den Werth

$$\sigma = b+n-1,$$

welcher hier in Betracht kommt.

Setzt man in (12.) den Werth $b+n-1$ für σ ein, so wird der Factor von C_m in derjenigen Gleichung, welche C_m zuerst enthält und in Folge dessen bestimmt, gleich dem Ausdruck

$$m(b+m+1)(b+m+2)(b+m+3)\dots(b+m+n-1).$$

Dieser Factor kann nur gleich Null werden, wenn b eine negative ganze

Zahl ist. Durch das Gleichungssystem (12.) werden somit sämmtliche Grössen C_1, C_2 etc. als eindeutige lineare Functionen von C_0, welches allein willkürlich bleibt, bestimmt, ausgenommen den Fall, wo b gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Findet letzteres statt, so liefern die Gleichungen (12.) keine bestimmten Werthe für die Coefficienten der Reihe (11.); das Gleichungssystem deutet alsdann auf den logarithmischen Grenzfall hin, wo ein Theil der Coefficienten unendlich gross gegen die andern wird.

Aber auch in dem Falle, wo b eine positive ganze Zahl oder Null ist, giebt die Gleichung (11.) nicht das n^{te} Integral von (1.). Allerdings erhält man aus (12.) eindeutige Werthe für die Coefficienten C; indessen ist die so bestimmte Reihe (11.) nur eins der früher gefundenen particulären Integrale. Denn für positive ganzzahlige Werthe des b, den Werth Null einbegriffen, wurde nachgewiesen, dass eine convergente Reihe, in welcher die Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ das Anfangsglied bildet, der gegebenen Differentialgleichung genügt. Mit diesem Integral wird die Reihe (11.) identisch. Letztere kann folglich das n^{te} Integral der Gleichung (1.) nur in dem Falle, dass b nicht ganzzahlig ist, darstellen.

Die Gleichung (13.) zeigt, dass bei den einfachen singulären Punkten je $n-1$ particuläre Integrale insofern denselben Charakter haben, als sich rationale Anfangspotenzen für ihre Entwicklung ergeben. Es macht eine wesentliche Eigenschaft der einfachen singulären Punkte aus, dass dieses gleichartige Verhalten von $n-1$ Integralen niemals zu Logarithmen führt. Nur das n^{te} Integral giebt, wenn es aufhört, irrational wie eine Potenz zu sein, im Allgemeinen logarithmische Glieder.

Um die Convergenz der Reihe (11.) zu beweisen und gleichzeitig Schlüsse für den Fall, wo b ganzzahlig ist, zu erhalten, benutzt man den Zusammenhang, in welchem die n Integrale der Differentialgleichung unter einander stehen; durch die im ersten Abschnitt hergeleiteten $n-1$ Integrale ist auch das n^{te} Integral vollständig bestimmt, da bekanntlich mit Hülfe derselben die Gleichung (1.) auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reducirt werden kann.

Man schliesse den Fall, dass b eine positive ganze Zahl oder Null ist, vorläufig aus. Dann sind in dem Integral (2.) die $n-1$ ersten Coefficienten willkürlich; man kann also c_0 von Null verschieden annehmen. Man bezeichne durch die Reihe

$$v_1 = c_{1,0}+c_{1,1}(x-a)+c_{1,2}(x-a)^2+\cdots,$$

wo $c_{1,0}$ nicht gleich Null ist, ein Integral von (1.), und führe mittelst der Substitution

$$y = v_1 \int w_1 \, dx$$

die Variable w_1 an Stelle von y ein. Es folgt für w_1 die Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{aligned}(x-a)\frac{d^{n-1}w_1}{dx^{n-1}} &= \left\{-\frac{(n)_1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}(x-a)+E_1(x)\right\}\frac{d^{n-2}w_1}{dx^{n-2}} \\ &+\left\{-\frac{(n)_2}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2}(x-a)+\frac{(n-1)_1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}E_1(x)+E_2(x)\right\}\frac{d^{n-3}w_1}{dx^{n-3}}+\cdots \\ &+\left\{-\frac{(n)_{n-1}}{v_1}\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}}(x-a)+\frac{(n-1)_{n-2}}{v_1}\frac{d^{n-2}v_1}{dx^{n-2}}E_1(x)+\cdots+E_{n-1}(x)\right\}w_1,\end{aligned}$$

welche wieder a zum einfachen singulären Punkt und b zur zugehörigen Zahl desselben hat. Denn da v_1 für $x=a$ nicht verschwindet, so sind sämmtliche Coefficienten der Gleichung eindeutig und stetig in der Umgebung von a; und aus demselben Grunde nimmt der Coefficient der zweithöchsten Ableitung für $x=a$ den Werth b an.

Indem man das angewendete Verfahren wiederholt, erniedrigt man, unter Beibehaltung der Form der Differentialgleichung, successiv die Ordnung derselben. Es sei

$$v_2 = c_{2,0}+c_{2,1}(x-a)+c_{2,2}(x-a)^2+\cdots,$$

wo $c_{2,0}$ von Null verschieden, ein Integral der Gleichung für w_1, und man nehme $w_1 = v_2\int w_2\,dx$, etc. Die Substitutionen

$$(14.)\quad y=v_1\int w_1\,dx,\;\; w_1=v_2\int w_2\,dx,\;\; w_2=v_3\int w_3\,dx,\;\ldots\;\; w_{n-2}=v_{n-1}\int w_{n-1}\,dx$$

ergeben für w_{n-1} schliesslich eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(15.)\qquad (x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = F(x)\,w_{n-1},$$

wo die Function $F(x)$ eindeutig und stetig in der Umgebung von a ist und für $x=a$ den Werth b annimmt. Setzt man demnach

$$F(x) = b+(x-a)f(x),$$

so wird die Gleichung (15.):

$$\frac{dw_{n-1}}{w_{n-1}} = \left\{\frac{b}{x-a}+f(x)\right\}dx,$$

$$\log w_{n-1} = b\log(x-a)+\int f(x)\,dx,$$

$$w_{n-1} = (x-a)^b\,e^{\int f(x)\,dx}.$$

Aus der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f(x)$ in der Umgebung des Punktes a folgt dieselbe Eigenschaft für $\int f(x)\,dx$ und $e^{\int f(x)dx}$; die letzterwähnte Function ist ausserdem für $x=a$ jedenfalls von Null verschieden. Nennt man also

$$e^{\int f(x)dx} = G(x) = k_0+k_1(x-a)+k_2(x-a)^2+\cdots,$$

so ergiebt sich für w_{n-1} die Gleichung

$$(16.)\qquad w_{n-1} = (x-a)^b\,G(x) = (x-a)^b\{k_0+k_1(x-a)+k_2(x-a)^2+\cdots\},$$

in der die Reihe convergent, und k_0 von Null verschieden ist.

Um y zu erhalten, hat man, gemäss den Substitutionen (14.), den obigen Ausdruck $n-1$ Mal zu integriren, indem man nacheinander mit v_{n-1}, v_{n-2}, ... v_1 multiplicirt. Macht man die Integrationsconstante bei allen $n-1$ Integrationen gleich Null, so ergiebt sich das gesuchte n^{te} Hauptintegral. Da keine der Grössen v_1, v_2, ... v_{n-1} für $x=a$ verschwindet, so hat die Multiplication mit denselben keinen Einfluss auf die Anfangspotenz. Hieraus ergiebt sich der Schluss, dass für ein nicht ganzzahliges b die Potenz $(x-a)^{b+n-1}$ zur Anfangspotenz wird, und dass nach Abtrennung des Factors $(x-a)^{b+n-1}$ eine bei dem Punkte a eindeutige und stetige Function übrig bleibt.

Es ist somit bewiesen, dass, sobald b nicht gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null ist, der Differentialgleichung (1.) stets durch einen Ausdruck

$$y = (x-a)^{b+n-1}\{C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots\}$$

Genüge geschieht, in welchem die Reihe convergent, und C_0 von Null verschieden ist.

Wenn b gleich einer negativen ganzen Zahl ist, wird das n^{te} Integral ebenfalls durch die Gleichungen (14.) und (16.) bestimmt. In diesem Falle entstehen aber im Allgemeinen durch Integration der Potenz $(x-a)^{-1}$ logarithmische Glieder. In speciellen Fällen können letztere fortfallen, indem die Factoren derselben gleich Null werden. Um für eine gegebene Differentialgleichung zu entscheiden, ob das n^{te} Integral den $\log(x-a)$ enthält, oder nicht, hat man die Anfangsglieder der Entwicklungen der betreffenden Functionen zu berechnen, so weit dieselben für die negativen Potenzen von $x-a$ in Betracht kommen. Aus dem Umstande, dass keine der Grössen v_1, v_2, ... v_{n-1} für $x=a$ verschwindet, ergiebt sich die Regel, dass das Integral nur dann frei von Logarithmen ist, wenn bei jeder der $n-1$ in (14.) angegebenen Integrationen die zu integrirende Function die Potenz $(x-a)^{-1}$ nicht enthält.

Es bleibt übrig, den Fall eines ganzzahligen positiven b zu behandeln, für welchen ebenfalls das n^{te} Integral im Allgemeinen logarithmisch wird. Man wendet, wie vorher, die Substitutionen (14.) an, indessen wird die Entwicklung dadurch eine andere, dass v_{n-1} für $x=a$ verschwindet. Es wurde im ersten Abschnitt gezeigt, dass, wenn b eine positive ganze Zahl oder Null ist, in der Reihe (2.) der Coefficient c_{b+n-1} und ausserdem $n-2$ der Grössen $c_0, c_1, \dots c_{b+n-2}$ willkürlich bleiben; für letztere kann man im allgemeinen Falle die Coefficienten $c_0, c_1, \dots c_{n-3}$ nehmen. Die $n-2$ ersten Substitutionen

$$y = v_1\int w_1\,dx, \quad w_1 = v_2\int w_2\,dx, \quad \dots \; w_{n-3} = v_{n-2}\int w_{n-2}\,dx$$

führen dann zu demselben Resultat wie in dem früheren Falle; man erhält für w_{n-2} eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(17.) \qquad (x-a)\frac{d^2 w_{n-2}}{dx^2} = F_1(x)\frac{dw_{n-2}}{dx} + F_2(x)\,w_{n-2},$$

in welcher die Functionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ für das Gebiet des Punktes a eindeutig und stetig sind, und erstere für $x=a$ gleich b wird.

In gewissen Fällen sind, wie im ersten Abschnitt ausgeführt wurde, auch die Grössen $v_1, v_2, \dots v_{n-2}$ nicht sämmtlich von Null verschieden. Dann modificirt sich die Gleichung (17.). Indessen soll auf diese speciellen Fälle nicht weiter eingegangen werden, weil es sich hier nur darum handelt, das Vorhandensein der logarithmischen Glieder für den allgemeinen Fall nachzuweisen, und weil das n^{te} Integral doch immer durch die $n-1$ übrigen vollständig bestimmt ist.

Bei der Gleichung (17.) reduciren sich die $n-1$ willkürlichen Constanten der Reihe (2.) auf die eine Grösse c_{b+1}; man erhält für (17.) das partikuläre Integral:

$$v_{n-1} = (x-a)^{b+1} + c'(x-a)^{b+2} + c''(x-a)^{b+3} + \cdots.$$

Die Substitution

$$w_{n-2} = v_{n-1}\int w_{n-1}\,dx$$

giebt alsdann für w_{n-1} die Differentialgleichung

$$(x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = \left\{-\frac{2(x-a)}{v_{n-1}}\frac{dv_{n-1}}{dx} + F_1(x)\right\} w_{n-1},$$

in welcher die zu a zugehörige Zahl nicht mehr gleich b ist. Die Entwicklung von $\frac{2(x-a)}{v_{n-1}}\frac{dv_{n-1}}{dx}$ beginnt mit dem constanten Gliede $2(b+1)$, und die von $F_1(x)$ mit b; die Gleichung für w_{n-1} gewinnt demnach die Gestalt

$$(x-a)\frac{dw_{n-1}}{dx} = \{-(b+2) + (x-a)f(x)\}\,w_{n-1},$$

wo $f(x)$ in der Umgebung von a eindeutig und stetig ist. Hieraus folgt für w_{n-1} der Ausdruck

$$(18.) \qquad w_{n-1} = (x-a)^{-b-2} e^{\int f(x)dx} = (x-a)^{-b-2} G(x),$$

in welchem $G(x)$ eine bei a eindeutige und stetige Function, die für $x=a$ von Null verschieden ist, bedeutet.

Stellt man aus letzterer Gleichung den Werth von y her, so entsteht bei der Integration des Ausdruckes (18.) aus der Potenz $(x-a)^{-1}$ ein logarithmischer Summandus. Derselbe fällt nur dann fort, wenn in der Entwicklung von $G(x)$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-a$ der Coefficient der Potenz $(x-a)^{b+1}$ gleich Null ist. Also ist auch für ein positives ganzzahliges b und für $b=0$ das n^{te} Integral der Differentialgleichung (1.) im Allgemeinen logarithmischer Natur.

Hiermit sind die behaupteten Eigenschaften der Integralfunction y in Bezug auf den einfachen singulären Punkt a in allen Stücken bewiesen.

Bei jedem endlichen Werthe erkennt man ohne Weiteres, ob derselbe ein einfacher singulärer Punkt einer gegebenen Differentialgleichung ist, oder nicht. Dagegen erfordern die Bedingungen, unter denen der Werth $x=\infty$ ein einfacher singulärer Werth einer linearen Differentialgleichung wird, eine besondere Analyse. Es soll die Frage hier etwas allgemeiner gestellt, und die Bedingung dafür, dass der Werth $x=\infty$ ein einfacher singulärer Werth für das Product $x^\sigma y$ sei, in den Grundzügen hergeleitet werden. Der Exponent σ bleibt beliebig, so dass für $\sigma=0$ die Function y selbst den Werth $x=\infty$ zum einfachen singulären Werth haben würde.

Die Function y sei durch eine Differentialgleichung

$$(19.) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + F_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + F_n(x)y \;=\; 0$$

bestimmt; man substituirt

$$x^\sigma y = \eta, \quad x = \frac{1}{t}$$

und verlangt, dass die sich ergebende Differentialgleichung zwischen η und t die Form habe

$$t\frac{d^n \eta}{dt^n} + E_1(t)\frac{d^{n-1}\eta}{dt^{n-1}} + E_2(t)\frac{d^{n-2}\eta}{dt^{n-2}} + \cdots + E_n(t)\eta \;=\; 0,$$

wo die Functionen $E_1(t)$, $E_2(t)$, ... $E_n(t)$ in der Umgebung des Punktes $t=0$ eindeutig und stetig sind.

Setzt man für die Ableitungen von y ihre Werthe ein

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = (-1)^\nu t^{\nu+1} \frac{d^\nu (t^{\nu-\sigma-1}\eta)}{dt^\nu},$$

so führt die gestellte Anforderung unmittelbar zu Beschränkungen der Functionen $F(x)$ hinsichtlich ihrer Entwicklung nach fallenden Potenzen von x. Man findet, dass bei dieser Entwicklung, für ein beliebiges i, die Function $F_i(x)$ weder ein constantes Glied, noch die Potenzen $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots \frac{1}{x^{i-1}}$ enthalten darf, und es ergiebt sich demgemäss für $F_i(x)$ die convergente Reihenentwicklung:

$$(20.) \qquad F_i(x) = \frac{K_{i,0}}{x^i} + \frac{K_{i,1}}{x^{i+1}} + \frac{K_{i,2}}{x^{i+2}} + \cdots.$$

Für die Differentialgleichungen mit ganzen rationalen Coefficienten folgt aus der Gleichung (20.), dass, wenn $x = \infty$ ein einfacher singulärer Werth für $x^\sigma y$ sein soll, der Grad des Coefficienten von $\frac{d^n y}{dx^n}$ um i den Grad des Coefficienten von $\frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}}$ übersteigen muss. Dies zeigt, dass der Coefficient von $\frac{d^n y}{dx^n}$ mindestens vom Grade n ist. In dem einfachsten Falle erhält daher die Differentialgleichung die Gestalt

$$(21.) \qquad \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \varphi_i(x)\frac{d^i y}{dx^i} + \cdots + \varphi_0 y = 0,$$

wo $\varphi_i(x)$ eine ganze Function i^{ten} Grades, und φ_0 eine Constante bedeutet.

Ausser den Gleichungen (20.) ergeben sich aus der Forderung, dass $x = \infty$ ein einfacher singulärer Werth für $x^\sigma y$ sein soll, eine Anzahl von Bedingungsgleichungen für die ersten Coefficienten $K_{i,0}$, $K_{i,1}$, $K_{i,2}$ etc. der Entwicklungen von $F_i(x)$. In dem erwähnten einfachen Falle der Gleichung (21.) führen diese Bedingungsgleichungen direct zu der Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung, welche ich in einer früheren Arbeit*) definirt habe.

Es geht hieraus hervor, dass, sobald der singuläre Werth $x = \infty$ berücksichtigt wird, die Betrachtung der einfachen singulären Punkte mit Nothwendigkeit zu den erwähnten hypergeometrischen Functionen führt; gleichzeitig beweisen die gegebenen Entwicklungen, dass die hypergeometrischen Functionen n^{ter} Ordnung einfacher und elementarer sind, als irgend welche andere durch lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung definirte Functionen.

Berlin, im August 1870.

---

*) Dieses Journal, Bd. 71.