Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. In seiner Arbeit, „Recherches sur les fractions continues"[1]), untersucht Stieltjes die Kettenbrüche von der Form

$$K(z) = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}},$$

wobei mit z die komplexe Veränderliche, mit a_ν reelle positive von Null verschiedene Konstanten bezeichnet sind.

Auf Grund passend erweiterter Sätze von Stern[2]) unterscheidet Stieltjes zwei Fälle:

I. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist divergent.

Dann konvergiert der Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält, gegen eine analytische Funktion $f(z)$.

II. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ist konvergent.

---

[1]) T. J. Stieltjes, Annales de la faculté des sc. de Toulouse, Bd. 8 und 9 (1894 bis 1895). Im folgenden mit Stieltjes VIII bzw. IX zitiert. Eine kurze zusammenhängende Darstellung der Hauptsätze der Theorie befindet sich in dem Lehrbuche von Herrn Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Leipzig 1913, S. 362—417 (im folgenden kurz mit Perron, Lehrbuch, zitiert).

[2]) M. A. Stern, „Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs", Journal f. Math., Bd. 37 (1848), S. 255—272; — Stieltjes VIII, S. 30—35 u. S. 61 bis 65. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 234—235.

Bezeichnen wir mit $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ den Näherungsbruch m-ter Ordnung des Kettenbruchs $K(z)$, so bestehen im Falle II die Beziehungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = f_1(z), \quad \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_2(z),$$

und zwar wieder gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält. Außerdem sind die analytischen Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ von einander verschieden.

Wir wollen den Fall I kurz den Fall der Konvergenz, den Fall II den Fall der Divergenz des Kettenbruchs $K(z)$ nennen.

Die wichtigste Entdeckung von Stieltjes besteht in dem Nachweis, daß im Konvergenzfalle die Funktion $f(z)$, im Divergenzfalle die Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ sich durch bestimmte Stieltjessche Integrale darstellen lassen, und zwar wird, wenn $\varphi(u)$ bzw. $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktionen bedeuten,

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}; \quad f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \quad f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}\text{ [3]}.$$

2. Schon vor Stieltjes war bekannt, daß sich dem Kettenbruch $K(z)$ eine formale Potenzreihe

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots, \tag{1}$$

die im allgemeinen Falle für jeden noch so großen Wert von z divergiert, eindeutig zuordnen läßt. Es zeigt sich nämlich auf Grund der Fundamentalformeln für Kettenbrüche, daß sich der m-te Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ in eine für hinreichend große Werte von z konvergente Potenzreihe

$$S_m(z) = \frac{c_{m0}}{z} - \frac{c_{m1}}{z^2} + \frac{c_{m2}}{z^3} - \dots$$

entwickeln läßt, und daß die Potenzreihe $S_m(z)$ mit den Potenzreihen $S_{m+p}(z)$, in die sich die Näherungsbrüche $m+p$-ter Ordnung ($p = 1, 2, 3, \dots$) für hinreichend große Werte von z entwickeln lassen, in den m ersten Koeffizienten übereinstimmt[4]). Es wird also

$$c_{m,0} = c_{m+p,0}, \quad c_{m,1} = c_{m+p,1}, \quad \dots, \quad c_{m,m-1} = c_{m+p,m-1}.$$

Bestimmt man jetzt eine Potenzreihe der Form (1), indem man für alle m

$$c_0 = c_{m,0}, \quad c_1 = c_{m,1}, \quad \dots, \quad c_{m-1} = c_{m,m-1}$$

[3]) Ausführliche Darstellung des Stieltjesschen Integralbegriffs, s. Stieltjes VIII, S. 68–71. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 362–374.

Der zitierte Stieltjessche Satz findet sich bei Stieltjes VIII, S. 76–90; Perron, Lehrbuch, S. 402–410.

[4]) Stieltjes VIII, S. 18–19; Perron, Lehrbuch, S. 302.

setzt, so erhält man auf diese Weise eine dem Kettenbruch $K(z)$ eindeutig zugeordnete Potenzreihe.

Ist umgekehrt eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, so läßt sich dann und nur dann ein Kettenbruch $K(z)$, der zu $S(z)$ in dem eben beschriebenen Zuordnungsverhältnis steht, mit nur positiven von Null verschiedenen Koeffizienten a_ν konstruieren, wenn die aus den Koeffizienten c_ν gebildeten Hankelschen Determinanten

(2) $$C_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1 & , \ldots, & c_n \\ c_1, & c_2 & , \ldots, & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & c_{n+1}, & \ldots, & c_{2n} \end{vmatrix}$$

und

(3) $$B_n = \begin{vmatrix} c_1, & c_2 & , \ldots, & c_n \\ c_2, & c_3 & , \ldots, & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n, & c_{n+1}, & \ldots, & c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

für alle n positiv sind. Daraus folgt leicht, daß auch die Koeffizienten c_ν selbst positive Zahlen sein müssen.

Zwischen der Potenzreihe $S(z)$ und den Funktionen $f(z)$ bzw. $f_1(z)$ und $f_2(z)$, gegen die der Kettenbruch $K(z)$ bzw. eine gewisse Teilfolge seiner Näherungsbrüche konvergiert, besteht im Innern des Winkelraums

(4) $$-\pi + \delta \leqq \arg z \leqq \pi - \delta$$

die Beziehung

$$f(z) \sim S(z); \qquad f_1(z) \sim S(z), \qquad f_2(z) \sim S(z)$$[5].

Hierbei bedeutet $f(z) \sim S(z)$ in der Poincaréschen Bezeichnungsweise, das für jedes feste n im Innern des Winkelraumes (4)

$$\lim_{z=\infty} z^n \left(f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{z^{\nu+1}} \right) = 0$$

ist.

Endlich besteht auch zwischen der Belegungsfunktion $\varphi(u)$ bzw. den Belegungsfunktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ und den Koeffizienten c_ν ein Zusammenhang, der in den Beziehungen

(5) $$\int_0^\infty u^\nu \, d\varphi(u) = c_\nu; \qquad \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_1(u) = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_2(u) = c_\nu$$

seinen Ausdruck findet[6].

---

[5]) Vgl. Stieltjes VIII, S. 35; Perron, Lehrbuch, S. 413.

[6]) Vgl. Stieltjes VIII, S. 92—93; Perron, Lehrbuch, S. 410—411.

3. Ist umgekehrt eine formale Potenzreihe $S(z)$ der Form (1) vorgelegt, so nennt Stieltjes die Frage nach einer im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierten reellen nirgends abnehmenden Funktion $\varphi(u)$, die den Beziehungen (5) genügt, das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem.

Aus den bisher angegebenen Resultaten der Stieltjesschen Theorie folgt nun schon, daß das Momentenproblem sicher dann lösbar ist, wenn die aus den c_ν gebildeten Hankelschen Determinanten B_n und C_n für alle n positiv sind.

Denn in diesem Falle läßt sich der Potenzreihe $S(z)$ ein Stieltjesscher Kettenbruch $K(z)$ zuordnen, der die analytische Funktion

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

bzw. die Funktionen

$$f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \qquad f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}$$

definiert. Dann liefern die Funktionen $\varphi(u)$ bzw. $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ Lösungen des Momentenproblems.

Es ist andererseits weiter leicht einzusehen, daß, falls das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem eine Lösung besitzt, die Determinanten C_n und B_n sämtlich größer als Null sind. Denn sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$ beliebige reelle Veränderliche, und setzt man

$$F_n(x) = \int_0^\infty (x_0 + ux_1 + \ldots + u^n x_n)^2 \, d\varphi(u) = \sum_{\iota,\varkappa=0}^{n} c_{\iota+\varkappa} x_\iota x_\varkappa,$$

$$F_n^{(1)}(x) = \int_0^\infty u(x_0 + ux_1 + \ldots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u) = \sum_{\iota,\varkappa=0}^{n-1} c_{\iota+\varkappa+1} x_\iota x_\varkappa,$$

so sind offenbar die quadratischen Formen $F_n(x)$ und $F_n^{(1)}(x)$ beide für alle Werte des Index n positiv definit, also ihre Determinanten C_n und B_n beide größer als Null. Die Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ sind also notwendig und hinreichend dafür, daß das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem eine Lösung besitzt.

4. Jetzt erhebt sich eine weitere Frage. Wann ist das Momentenproblem bestimmt, d. h. wann läßt sich zu einer vorgegebenen Potenzreihe $S(z)$ der Form (1), deren Koeffizientendeterminanten C_n und B_n sämtlich größer als Null sind, eine und nur eine reelle, nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ finden, durch die die Größen c_ν vermittelst der Integrale (5) dargestellt werden. Hierbei werden zwei monotone Lösungen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ dann noch als einander gleich angesehen, wenn sie mindestens in allen Stetigkeitspunkten übereinstimmen. oder sich nur um eine Konstante unterscheiden.

Stieltjes beantwortet auch diese Frage, indem er den Satz beweist, daß das einer Potenzreihe $S(z)$ zugehörige Momentenproblem dann und nur dann bestimmt ist, wenn der zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der negativen Zahlen enthält, konvergiert[7]. Im Falle der Divergenz des zugeordneten Kettenbruches $K(z)$ war übrigens schon oben bemerkt worden, daß das zu $S(z)$ gehörige Momentenproblem mindestens zwei Lösungen, nämlich die mit $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ bezeichneten Funktionen, besitzt.

5. Wir wollen uns in der vorliegenden Arbeit mit der Frage der Konvergenz des Stieltjesschen Kettenbruches $K(z)$ beschäftigen. Ist der Kettenbruch $K(z)$ in expliziter Form vorgelegt, d. h. sind die positiven Koeffizienten a_ν gegeben, so ist das Problem bereits durch die oben angegebenen Sätze von Stern und Stieltjes erledigt. Sind aber nur die Potenzreihenkoeffizienten c_ν bekannt, die den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen mögen, so wird es oft mit Schwierigkeiten verknüpft oder gar unmöglich sein, die Koeffizienten a_ν so darzustellen, daß sich die Divergenz oder Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ erkennen läßt. Es dürfte also ein Satz von Interesse sein, der uns gestattet, aus den Koeffizienten c_ν unmittelbar die Konvergenz des zugeordneten Stieltjesschen Kettenbruches zu erschließen.

Geht man aber von den Koeffizienten c_ν aus, so scheint es nur natürlich, sich erst die Frage zu stellen, ob das der vorgelegten Koeffizientenfolge zugehörige Momentenproblem bestimmt ist, und aus der Antwort auf diese Frage Schlüsse auf die Konvergenz oder Divergenz des zugeordneten Kettenbruchs zu ziehen.

Das Hauptresultat unserer Arbeit läßt sich in einem Satze dieser Art zusammenfassen:

Ist eine Potenzreihe $S(z)$ vorgelegt, deren Koeffizienten c_ν die Bedingungen $B_n > 0$, $C_n > 0$ erfüllen, und läßt sich eine positive feste Zahl ϱ von der Beschaffenheit bestimmen, daß alle Koeffizienten c_ν der Abschätzung

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu (2\nu)! \tag{6}$$

genügen, so ist das der Potenzreihe $S(z)$ zugeordnete Momentenproblem bestimmt und der zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $K(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der negativen reellen Zahlen enthält, gleichmäßig konvergent.

Dieser Satz wird in § 4 bewiesen werden.

[7] Stieltjes VIII, S. 97–104; Perron, Lehrbuch, S. 390–391 und S. 417.

Eine in gewissem Sinne verwandte Fragestellung findet sich in der Literatur zum erstenmal in einer Arbeit von A. Markoff[8]).

Wesentlich mehr als dieser hat Herr Perron bewiesen, dem man den Satz verdankt: Der Stieltjessche Kettenbruch ist konvergent, wenn die Beziehung

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu \nu! \tag{7}$$

für unendlich viele ν (also nicht notwendig für alle ν) erfüllt ist[9]).

Die in unserer Arbeit angewandten Methoden stehen mit den Markoff-Perronschen Gedankengängen in keinem Zusammenhang.

Die Erweiterung der Voraussetzungen, die die Bedingung (6) gegenüber der Bedingung (7) liefert, ist um so wichtiger, als die Abschätzung (6) das stärkste Anwachsen der Koeffizienten c_ν überhaupt angibt, das zulässig ist, wenn man in allen Fällen der Konvergenz des zugeordneten Stieltjesschen Kettenbruches sicher sein will. Denn weiß man von einer Folge von Koeffizienten c_ν, die den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen, nur, daß für genügend große ν die Beziehung

$$c_\nu \leqq \Gamma((2+\delta)\nu)\text{[10])} \tag{8}$$

für *jedes* feste noch so kleine positive δ gilt, so kann das zugehörige Momentenproblem auch mehrere Lösungen haben.

Es gelingt nämlich in § 4, eine Folge von Koeffizienten c_ν anzugeben, die außer den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ der Abschätzung (8) für *jedes* noch so kleine positive δ genügen und so beschaffen sind, daß das zugehörige Momentenproblem mehr als eine Lösung besitzt[11]).

6. Der Satz über die Bestimmtheit des Momentenproblems des § 4 wird auf ein Hauptlemma zurückgeführt, das wir im § 2 formuliert und bewiesen haben, nachdem im § 1 einige elementare Hilfssätze vorausgeschickt wurden. Der sehr einfache funktionstheoretische Beweis des Hauptlemmas enthält den wesentlichen mathematischen Gedanken unserer Arbeit.

---

[8]) A. Markoff, „Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues", Acta Math. Bd. 19 (1895), S. 93–104. Vgl. auch O. Perron, Lehrbuch, S. 385–389.

[9]) O. Perron, „Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche", Math. Ann. Bd. 74 (1913), S. 545–554.

[10]) Unter $\Gamma(x)$ ist in dieser Arbeit immer die Eulersche Γ-Funktion zu verstehen.

[11]) Der Umstand, daß Folgen von Koeffizienten c_ν existieren, die mit ν für ein *bestimmtes festes* δ unendlich groß werden wie $\Gamma((2+\delta)\nu)$ und so beschaffen sind, daß das zugehörige Momentenproblem unbestimmt ist, war schon Stieltjes bekannt, doch hat er seine Beispiele nur für den Fall $\delta = 2$ näher angegeben. Siehe Stieltjes VIII, S. 119, vgl. auch das Lemma II des § 2 und die Anm. [17]) auf S. 199 unserer Arbeit.

Im § 3 wird aus dem Hauptlemma die Vollständigkeit gewisser Systeme von Orthogonalfunktionen gefolgert, die im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definiert sind. Der in diesem Paragraphen bewiesene Satz lautet:

Es sei ein System von Funktionen der Form

$$\varphi_0(x) = c_{00}\, e^{-\gamma x},$$
$$\varphi_1(x) = (c_{10} + c_{11} x^{\beta})\, e^{-\gamma x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_\nu(x) = (c_{\nu 0} + c_{\nu 1} x^{\beta} + \ldots + c_{\nu\nu} x^{\nu\beta})\, e^{-\gamma x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vorgelegt; hierbei bezeichnen β und γ zwei willkürliche positive Konstanten. Die $c_{\nu\mu}$ sind reelle Größen, die von β und γ abhängen und so bestimmt sein mögen, daß die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)\,dx = 0, \qquad (\nu \neq \mu)$$

$$\int_0^\infty \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1$$

erfüllt sind.

Das System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ genügt dann und nur dann der Vollständigkeitsrelation, wenn $\beta \leqq 2$ ist.

(Für $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$ erhält man das aus den Laguerreschen Polynomen gewonnene normierte Orthogonalsystem. Ausführliche Literaturangaben über diese Fragen vgl. § 3.) Die Kenntnis des § 3 ist für das Verständnis des folgenden nicht erforderlich.

In § 4 wird der Hauptsatz unserer Arbeit bewiesen.

In § 5 stellen wir einen ähnlichen Satz für eine naheliegende Verallgemeinerung des Momentenproblems auf, die auf eine bekannte Arbeit des Herrn Grommer[12]) zurückgeht. Um die Einleitung dieser Arbeit nicht übermäßig anwachsen zu lassen, haben wir das Problem, das wir uns dort gestellt haben, erst am Eingang des § 5 entwickelt.

§ 1. Hilfsbetrachtungen.

Um den Gedankengang später nicht zu unterbrechen, schicken wir in diesem Paragraphen einige, sehr elementare Hilfssätze voraus. Die beiden ersten behandeln die gliedweise Integration von Reihen. Der dritte Hilfssatz ist anderer Natur; er macht eine Aussage über monotone Funktionen, die in einem Intervall bis auf eine Punktmenge vom Maße Null definiert

[12]) Jacob Grommer, „Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen“, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1914. Abgedruckt im Journal f. Math. Bd. 144 (1914), S. 114–166.

sind. Obgleich die Hilfssätze wohl nicht neu sind, geben wir der Vollständigkeit halber die Beweise an.

1. Hilfssatz. Es seien $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ und damit auch $\tilde{f}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| x^\nu$ ganze transzendente Funktionen von x. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definierte reelle Funktion von x von der Beschaffenheit, daß das Integral

$$(1) \qquad \int_0^\infty \varphi(x)\, \tilde{f}(x)\, dx$$

konvergent ist.

Dann wird

$$(2) \qquad \int_0^\infty \varphi(x) f(x)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_0^\infty \varphi(x) x^\nu\, dx.$$

Beweis. Man erkennt unmittelbar, daß das Integral

$$\int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, dx$$

für jedes nicht negative ν absolut konvergiert; denn es ist

$$|a_\nu| \int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, dx \leqq \int_0^\infty \tilde{f}(x) |\varphi(x)|\, dx.$$

Wir beweisen jetzt zunächst die Beziehung

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x) |\varphi(x)|\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, dx.$$

Es ist

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, dx \leqq \int_0^\infty \tilde{f}(x) |\varphi(x)|\, dx.$$

Da die Partialsumme links mit wachsendem n monoton zunimmt und, wie die Abschätzung (3) erkennen läßt, unter einer festen von n unabhängigen Schranke liegt, so ist die unendliche Reihe

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu| \int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, dx \leqq \int_0^\infty \tilde{f}(x) |\varphi(x)|\, dx$$

sicher konvergent.

Andererseits ist aber, da auf Grund der gleichmäßigen Konv der Potenzreihe für $|x| \leqq R$ im Intervall $0 \leqq x \leqq R$ die gliedweis gration der Reihe gestattet ist,

$$\int_0^R \tilde{f}(x) |\varphi(x)|\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^R x^\nu |\varphi(x)|\, dx \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \int_0^\infty x^\nu |\varphi(x)|\, ($$

Da diese Beziehung für jedes noch so große R gilt, so ist auch

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\,\varphi(x)\,|\,dx \leqq \sum_{\nu=0}^\infty |\,a_\nu\,| \int_0^\infty x^\nu\,|\,\varphi(x)\,|\,dx. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) erkennt man aber, daß, wie oben behauptet,

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\,\varphi(x)\,|\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty |\,a_\nu\,| \int_0^\infty x^\nu\,|\,\varphi(x)\,|\,dx \tag{6}$$

ist.

Aus der Konvergenz der Summe rechter Hand von (6) folgt unmittelbar die absolute Konvergenz von

$$\sum_{\nu=0}^\infty a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx,$$

denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^\infty |\,a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx\,| \leqq \sum_{\nu=0}^\infty |\,a_\nu\,| \int_0^\infty x^\nu\,|\,\varphi(x)\,|\,dx.$$

Bezeichnet man mit $S_n(x)$ die Partialsumme $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, so ist

$$\int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx,$$

folglich ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu \int_0^\infty x^\nu\,\varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Dieser Grenzwert existiert, da die Reihe rechter Hand konvergiert.

Unsere Behauptung (2) ist bewiesen, wenn es gelingt, zu zeigen, daß auch

$$\int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^\infty S_n(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

oder, anders geschrieben,

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \tag{8}$$

ist.

Um dies einzusehen, bestimme man eine Zahl R von der Beschaffenheit, daß, unter ε eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl verstanden,

$$\int_R^\infty \tilde{f}(x)\,|\,\varphi(x)\,|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

wird, was auf Grund der vorausgesetzten Konvergenz von (1) immer möglich ist.

Dann ist für jedes n wegen $|S_n(x)| \leqq \tilde{f}(x)$

$$(9)\qquad \left|\int_R^\infty [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx\right| \leqq 2\int_R^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man setze ferner

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|\,dx = A$$

und bestimme nunmehr eine Zahl N von der Beschaffenheit, daß für alle $n \geqq N$ im Intervall $0 \leqq x \leqq R$

$$|f(x) - S_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2A}$$

wird. Dies ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe in jedem endlichen Gebiet immer möglich.

Dann wird für alle $n \geqq N$

$$(10)\qquad \left|\int_0^R [f(x) - S_n(x)]\,\varphi(x)\,dx\right| \leqq \int_0^R |f(x) - S_n(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{2A}\int_0^R |\varphi(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus (9) und (10) folgt die Beziehung (8) und damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

2. Hilfssatz. Es habe $f(x)$, $\tilde{f}(x)$ und $\varphi(x)$ dieselbe Bedeutung wie im 1. Hilfssatz. Es sei nunmehr die Reihe

$$(11)\qquad \sum_{\nu=0}^\infty |a_\nu| \int_0^\infty |\varphi(x)|\,x^\nu\,dx$$

konvergent. Dann konvergiert auch das Integral

$$(12)\qquad \int_0^\infty \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx,$$

und es ist außerdem

$$(13)\qquad \int_0^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu \int_0^\infty \varphi(x)\,x^\nu\,dx.$$

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß das Integral (12) konvergent ist, denn dann sind die Voraussetzungen des 1. Hilfssatzes erfüllt, dessen Behauptung (2) mit der Behauptung (13) des 2. Hilfssatzes identisch ist.

Nun ist aber für jedes noch so große R

$$\int_0^R \tilde{f}(x)\,|\varphi(x)|\,dx = \sum_{\nu=0}^\infty |a_\nu| \int_0^R |\varphi(x)|\,x^\nu\,dx \leqq \sum_{\nu=0}^\infty |a_\nu| \int_0^\infty |\varphi(x)|\,x^\nu\,dx,$$

und hieraus folgt, da die Reihe (11) konvergent vorausgesetzt wurde, daß das Integral

$$\int_0^R \tilde{f}(x)\ \varphi(x)\, dx$$

unterhalb einer festen von R unabhängigen Schranke gelegen ist. Da aber dieses Integral außerdem noch mit wachsendem R niemals abnimmt, so ist es sicher konvergent. W. z. b. w.

3. Hilfssatz. Es seien $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ zwei im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte reelle nirgends abnehmende Funktionen, die in allen Punkten des Intervalls mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null übereinstimmen.

Ist dann die Funktion $\varphi(u)$ im Punkte $u = a$ stetig, so ist

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Beweis. Ist $u = a$ ein beliebiger Punkt des Intervalls, in dem die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ definiert sind, so müssen, da nach Voraussetzung diese Funktionen beide monoton sind, die Grenzwerte

$$\lim_{h=0} \psi(a+h) \quad \text{und} \quad \lim_{h=0} \psi(a-h)$$

und entsprechend für die Funktion $\varphi(u)$ existieren.

Ist außerdem die Funktion $\varphi(u)$ im Punkte $u = a$ stetig, so muß

$$\lim_{h=0} \psi(a+h) = \varphi(a) = \lim_{h=0} \psi(a-h) \tag{14}$$

sein, da andernfalls die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ im Widerspruch mit den gemachten Voraussetzungen längs eines Intervalles von endlicher Länge, also in einer Punktmenge vom Maße größer als Null, voneinander verschieden wären.

Aus (14) folgt aber die Stetigkeit auch der Funktion $\psi(u)$ im Punkte $u = a$ und ferner die behauptete Beziehung

$$\psi(a) = \varphi(a) \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§ 2. Hauptlemma.

Lemma I[13]. *Es sei $\chi(u)$ eine reelle Funktion der reellen veränderlichen u, die im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definiert sein möge. Es existiere*

[13]) Einen ähnlichen Satz gibt Herr É. Borel an in seinem Buche: „Leçons sur les séries divergentes“, Paris 1901, S. 71–75. Doch ist dort unsere Voraussetzung (15) durch die speziellere

$$|\chi(u)| \leq \text{const}\ e^{\delta' \sqrt{u}}$$

ersetzt. — Aus dieser engeren Fassung unseres Lemmas ließen sich indessen die Sätze der §§ 3 und 4 nicht herleiten, so daß also die hier angegebene Verallgemeinerung der Voraussetzungen wesentlich ist. Außerdem stützt sich der Beweis des Herrn *ferner eine positive Konstante $\delta > 0$ von der Beschaffenheit, daß das Integral*

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, e^{-\delta\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u\,|\chi(u^2)|\, e^{-\delta u}\, du \tag{15}$$

konvergiert.

Bedeutet γ eine positive Zahl größer als δ, und ist für alle nicht negativen ganzzahligen ν

$$\int_0^\infty u^\nu \chi(u)\, e^{-\gamma\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu+1} \chi(u^2)\, e^{-\gamma u}\, du = 0, \tag{16}$$

so verschwindet $\chi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null[14]).

Beweis. Man betrachte das vom komplexen Parameter z abhängige Integral

$$F(z) = \int_0^\infty \chi(u)\, e^{(z-\gamma)\sqrt{u}}\, du = 2\int_0^\infty u\chi(u^2)\, e^{(z-\gamma)u}\, du. \tag{17}$$

Aus der Voraussetzung (15) folgt, daß das Integral (17) für $z = \gamma - \delta$ absolut konvergent ist. Dann ist aber nach einem bekannten Satze[15]) das Integral jedenfalls in der ganzen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent und stellt in dieser Halbebene eine analytische Funktion von z dar.

Wir wenden jetzt unsern Hilfssatz 1 auf das Integral (17) an, indem wir die Funktion $\varphi(u)$ des Hilfssatzes gleich $u\chi(u^2)\, e^{-\gamma u}$ und die dort mit $f(u)$ bezeichnete Funktion gleich $e^{zu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu u^\nu}{\nu!}$ setzen. Nach diesem Hilfssatz ist die gliedweise Integration der Reihe für e^{zu} für $|z| \leqq \gamma - \delta$ gestattet. Wir erhalten also die für $|z| \leqq \gamma - \delta$ sicher konvergente Potenzreihe

Borel auf einen Satz von Stieltjes, der noch weitere tiefliegende Untersuchungen aus der Theorie des Momentenproblems heranzieht und benutzt ferner noch spezielle sehr komplizierte Kettenbruchentwicklungen, die Stieltjes in einer Arbeit „Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues" in den Quaterly Journal of pure and applied Math. Bd. 24 (1890), S. 370—382 veröffentlicht hat. — Unser Beweis des Lemmas macht hingegen von den Hilfsmitteln aus der Theorie der Kettenbrüche oder der Stieltjesschen Integraldarstellungen keinen Gebrauch.

[14]) Unter den Integralen seien in diesem und im folgenden Paragraphen im Hinblick auf die Theorie der Orthogonalfunktionen Lebesguesche Integrale verstanden.

[15]) Vgl. z. B. E. Landau, „Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen", Sitzungsberichte d. Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Bayr. Ak. d. Wissensch. Bd. 36 (1907), S. 151—218, insbesondere S. 208 ff. Mit der Abkürzung $\Re(z)$ ist der reelle Teil von z bezeichnet.

$$(18) \qquad F(z) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \int_0^{\infty} u^{\nu+1} \chi(u^2) e^{-\gamma u} du.$$

Aus (16) folgt nun, daß die Koeffizienten der geraden Potenzen von z verschwinden. $F(z)$ ist also eine ungerade Funktion.

Da aber das Integral (17) in der Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ absolut konvergiert, so ist die Funktion $F(z)$ in der unendlichen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma - \delta$ beschränkt. Da außerdem $F(z)$ eine ungerade Funktion ist und die Halbebene, in der wir die Beschränktheit der Funktion nachgewiesen haben, die Achse der imaginären Zahlen ganz im Innern enthält; so können wir aus der Beziehung

$$F(-z) = -F(z)$$

schliessen, daß $F(z)$ in der ganzen Ebene des komplexen Veränderlichen z beschränkt ist.

Dann ist aber $F(z)$ nach einem Liouvilleschen Fundamentalsatz der Funktionentheorie gleich einer Konstanten. Da außerdem $F(z)$ als ungerade Funktion für $z = 0$ verschwindet, so muß $F(z)$ identisch verschwinden. Nach einem Satze des Herrn Lerch[16]) muß dann aber auch $u\chi(u^2)e^{-\gamma u}$ bis auf eine Menge vom Maße Null identisch verschwinden und damit ist unser Satz bewiesen.

Zusatz zu Lemma I. *Es sei $\chi(u)$ eine reelle im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte Funktion und δ eine Zahl von der Beschaffenheit, daß das Integral* (15) *konvergiert. Bedeutet α eine positive Zahl $> \frac{1}{2}$, γ eine beliebige positive Zahl und sind für alle nicht negativen ganzzahligen ν die Integrale*

$$(19) \qquad \int_0^{\infty} u^{\nu} \chi(u) e^{-\gamma u^{\alpha}} du = 2 \int_0^{\infty} u^{2\nu+1} \chi(u^2) e^{-\gamma u^{2\alpha}} du \quad 0,$$

so verschwindet $\chi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null.

Beweis: An Stelle des Integrals (17) betrachte man das Integral

$$F(z) = \int_0^{\infty} \chi(u) e^{z\sqrt{u} - \gamma u^{\alpha}} du = 2 \int_0^{\infty} u \chi(u^2) e^{zu - \gamma u^{2\alpha}} du,$$

[16]) M. Lerch, „Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel", Acta Math. Bd. 27 (1903), S. 339–352. Der Satz des Herrn Lerch auf Lebesguesche Integrale übertragen lautet: Verschwindet

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu} \varphi(u) du$$

für die Punkte $c + \nu\varrho$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) einer arithmetischen Progression, so verschwindet $\varphi(u)$ identisch bis auf eine Menge vom Maße Null.

das, wie man unschwer erkennt, in jeder Halbebene $\Re(z) \leqq A$, wo A eine beliebig große positive Konstante bedeutet, absolut und gleichmäßig konvergiert.

Indem man $F(z)$ in eine Potenzreihe entsprechend (18) entwickelt, erkennt man auf Grund von (19), daß $F(z)$ eine ungerade Funktion ist. Man schließt nunmehr wie beim Beweise des Lemmas I, daß $F(z)$ in der ganzen komplexen Zahlenebene eine reguläre analytische beschränkte Funktion von z, also gleich einer Konstanten ist.

Weiter findet man, daß $F(z)$ identisch verschwindet und damit auch, daß $\chi(u) = 0$ ist bis auf eine Menge vom Maße Null. W. z. b. w.

Lemma II. *Es sei α eine positive reelle Zahl $< \frac{1}{2}$, γ eine beliebige positive reelle Zahl. Dann verschwinden die Integrale*

$$I_\nu = \int_0^\infty u^\nu \sin[(\operatorname{tg}\pi\alpha)\gamma u^\alpha] e^{-\gamma u^\alpha} du \text{ [17]} \tag{20}$$

für alle nicht negativen ganzzahligen Werte von ν.

Beweis. Es ist

$$I_\nu = \int_0^\infty u^\nu \Im(e^{i(\operatorname{tg}\pi\alpha)\gamma u^\alpha}) e^{-\gamma u^\alpha} du = \Im\left(\int_0^\infty u^\nu e^{-(1-i\operatorname{tg}\pi\alpha)\gamma u^\alpha} du\right) \text{[18]}. \tag{21}$$

Wir setzen

$$\varrho = 1 - i\operatorname{tg}\pi\alpha,$$

dann wird, wie man leicht erkennt, da $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ist,

$$1 - i\operatorname{tg}\pi\alpha = \varrho e^{-i\pi\alpha},$$

$$I_\nu = \Im\left(\int_0^\infty u^\nu e^{-\gamma\varrho e^{\alpha(\log u - i\pi)}} du\right). \tag{22}$$

Hierbei ist unter $\log u$ der reelle Wert des Logarithmus zu verstehen.

Die Beziehung (22) gilt nicht mehr für $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

[17]) In der Arbeit von Stieltjes VIII S. 105 sind die Integrale I_ν nur für den einfachsten Fall $\alpha = \frac{1}{4}$ angegeben, wo $\operatorname{tg}\pi\alpha = 1$ wird. Es wird dort ihr Verschwinden ohne Angabe des Beweises behauptet.

Vgl. auch unser Beispiel im § 4 S. 209. Dort wird eine Funktion $\Phi(u)$ angegeben, deren Momente $\int_0^\infty u^\nu \Phi(u)\, du$ sämtlich gleich Null werden und deren absoluter Betrag mit wachsendem u gegen Null wie die Funktion $e^{-\frac{\pi\sqrt{u}}{\log^2 u}}$ abnimmt. Dies ist mit Rücksicht auf das Lemma I die stärkste Abnahme gegen Null bei wachsendem u, die wir von $\Phi(u)$ erwarten dürfen, wenn alle Momente der Funktion verschwinden sollen.

[18]) Die Abkürzung $\Im(f(x))$ bezeichnet den imaginären Teil von $f(x)$. Ist also $f(x) = \varphi + i\psi$, so ist

$$\Im(f(x)) = \psi.$$

Substituiert man nun[19])

$$v = (1 - i \operatorname{tg} \pi\alpha)\gamma u^\alpha = \varrho\gamma(u e^{-i\pi})^\alpha,$$

$$u = -\left(\frac{v}{\varrho\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \qquad du = -\frac{1}{\alpha\varrho\gamma}\left(\frac{v}{\varrho\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} dv$$

in das Integral (21) für I_ν, so erhält man

$$I_\nu = \mathfrak{J}\left(\frac{(-1)^{\nu+1}}{\alpha\varrho\gamma}\int\limits_{\mathfrak{g}}\left(\frac{v}{\varrho\gamma}\right)^{\frac{\nu+1}{\alpha}-1} e^{-v}\,dv\right).$$

Der Integrationsweg $\mathfrak{g}$ ist ein Strahl durch den Nullpunkt, der mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich $-\pi\alpha$ bildet.

Setzt man

$$v = r e^{i\vartheta},$$

so wird die zu integrierende Funktion gleich

$$\left(\frac{r e^{i\vartheta}}{\varrho\gamma}\right)^{\frac{\nu+1}{\alpha}-1} e^{-r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}.$$

Da nun diese Funktion, wenn r über alle Grenzen wächst, für $0 \geqq \vartheta \geqq -\pi\alpha > -\frac{\pi}{2}$ von höherer Ordnung als $\frac{1}{r}$ gleichmäßig in ϑ verschwindet, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatze das Integral längs des Strahles $\mathfrak{g}$ gleich dem Integral längs der Achse der reellen Zahlen, und man erkennt daraus, da die zu integrierende Funktion dort wegen $\vartheta = 0$ reell ist, daß das Integral einen reellen Wert hat, das heißt aber, daß sein imaginärer Teil I_ν verschwindet. W. z. b. w.

§ 3.

Beweis der Vollständigkeit einiger Systeme von Orthogonalfunktionen.

Es seien β und γ zwei feste positive Zahlen. Man bestimme jetzt Konstanten $c_{\nu\mu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, \mu \leqq \nu)$ von der Beschaffenheit, daß die Funktionen

$$(23)\quad \begin{cases} \varphi_0(x) = c_{00}\, e^{-\gamma x}, \\ \varphi_1(x) = (c_{10} + c_{11} x^\beta)\, e^{-\gamma x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_\nu(x) = (c_{\nu 0} + c_{\nu 1} x^\beta + \ldots + c_{\nu\nu} x^{\nu\beta})\, e^{-\gamma x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

[19]) Man kann diese Substitution hier vermeiden und, wie dies bei dem Beispiel des § 4 S. 210 gezeigt wird, schon hier den Cauchyschen Integralsatz anwenden; indessen scheint uns, daß sich durch die Substitution die Rechnung etwas übersichtlicher gestaltet.

im Intervall $0 \leqq x < \infty$ ein System von normierten Orthogonalfunktionen bilden, daß also

$$(24)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = 0, & (\nu \neq \mu) \\ \int_0^\infty \varphi_\nu^2(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

wird.

Durch diese Forderung sind die Koeffizienten $c_{\nu\mu}$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Die hier noch bestehende Willkür wird dadurch beseitigt, daß man den Koeffizienten $c_{\nu\nu}$ ein positives Vorzeichen vorschreibt. Da nämlich die Funktionen $x^{\nu\beta}e^{-\gamma x}$ voneinander linear unabhängig sind, so nehmen die $c_{\nu\nu}$ sämtlich von Null verschiedene Werte an. Ist $\beta = 1$ und $\gamma = \frac{1}{2}$, so erhält man das aus den Laguerreschen Polynomen gewonnene System von Orthogonalfunktionen.

Man nennt nun ein System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ im Intervall $0 \ldots \infty$ *nicht abgeschlossen*, wenn sich eine Funktion $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß erstens das Integral

$$(25)\qquad \int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx$$

existiert und von Null verschieden ist, zweitens die Integrale

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx,$$

deren Konvergenz sich in der üblichen Weise mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichheitsbeziehung aus der Konvergenz der Integrale (24) und (25) ergibt, sämtlich verschwinden.

Existiert keine solche Funktion $\varphi(x)$, so sagt man, das Orthogonalsystem (23) ist *abgeschlossen*.

Wir behaupten nunmehr: *für $\beta \leqq 2$ ist das System (23) von Orthogonalfunktionen abgeschlossen, und für $\beta > 2$ ist es nicht abgeschlossen.* Der Beweis dieser Behauptung ist auf Grund der Sätze des vorigen Paragraphen unschwer zu erbringen.

Da die Konstanten $c_{\nu\nu}$ in (23) von Null verschieden sind, läßt sich eine neue Matrix von Koeffizienten $\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \ldots$ in der Weise bestimmen, daß

$$(26)\qquad x^{\mu\beta}e^{-\gamma x} = \sum_{\nu=0}^{\mu} \gamma_{\mu\nu}\,\varphi_\nu(x)$$

wird.

Wir machen die Annahme, es existiere für den Fall $\beta \leqq 2$ eine zu sämtlichen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonale Funktion $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, daß das mit ihr gebildete Integral (25) gegen einen von Null verschiedenen Wert konvergiert. Wegen (26) wäre dann $\varphi(x)$ auch zu den Funktionen $x^{\mu\beta} e^{-\gamma x}$ orthogonal, man hätte also

$$\int_0^\infty x^{\mu\beta} e^{-\gamma x} \varphi(x)\, dx = 0 \tag{27}$$

für alle μ.

Setzt man jetzt $\beta = \frac{1}{\alpha}$ und transformiert man das Integral (27) vermittels der Substitution

$$x = u^\alpha, \qquad u = x^\beta, \qquad \varphi(x) = \varphi(u^\alpha) = \chi(u),$$

so erhält man

$$\alpha \int_0^\infty u^{\alpha-1} \chi(u)\, u^\mu e^{-\gamma u^\alpha} du = 0 \quad \text{für alle } \mu \geqq 0.$$

Aus der Voraussetzung $\beta \leqq 2$ folgt $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

Es war ferner nach unserer Annahme das Integral

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)\, dx = \alpha \int_0^\infty u^{\alpha-1} \chi^2(u)\, du$$

konvergent; dann konvergiert aber auch das Integral

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, u^{\alpha-1} e^{-\delta\sqrt{u}}\, du$$

für jedes noch so kleine positive von Null verschiedene δ. Denn die Schwarzsche Ungleichheitsbeziehung ergibt

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\, u^{\alpha-1} e^{-\delta\sqrt{u}}\, du \leqq \sqrt{\int_0^\infty \chi^2(u)\, u^{\alpha-1}\, du \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-2\delta\sqrt{u}}\, du}.$$

Da man nun aber immer $\delta < \gamma$ wählen kann, so genügt die Funktion $u^{\alpha-1}\chi(u)$ allen Voraussetzungen des Lemmas I des § 2 bzw. seines Zusatzes, muß also bis auf eine Menge vom Maße Null verschwinden. Das System (23) von Orthogonalfunktion $\varphi_\nu(x)$ ist also für $\beta \leqq 2$ ein abgeschlossenes System.

Ist andererseits $\beta > 2$, $\alpha < \frac{1}{2}$, so setzen wir

$$\begin{cases} \chi(u) = u^{1-\alpha} \sin\left[(\operatorname{tg} \pi\alpha)\, 2\gamma u^\alpha\right] e^{-\gamma u^\alpha}, \\ \varphi(x) = x^{\beta-1} \sin\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{\beta}\right) 2\gamma x\right] e^{-\gamma x}. \end{cases} \tag{28}$$

Man erkennt unmittelbar, daß für die Funktion (28) das Integral (25) konvergent und von Null verschieden ist, ferner, daß auf Grund des Lemmas II des § 2 die Integrale

$$\int_0^\infty x^{\mu\beta} \varphi(x)\, e^{-\gamma x}\, dx = \alpha \int_0^\infty u^\mu u^{\alpha-1} \chi(u)\, e^{-\gamma u^\alpha} du$$
$$= \alpha \int_0^\infty u^\mu \sin\left[(\operatorname{tg} \pi\alpha)\, 2\gamma u^\alpha\right] e^{-2\gamma u^\alpha} du$$

für alle μ verschwinden. Endlich folgt dann auch

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

für alle ν, da nach (23) die $\varphi_\nu(x)$ sich linear aus den $x^{\mu\beta} e^{-\gamma x}$ zusammensetzen.

Die in Formel (28) definierte Funktion $\varphi(x)$ ist also zu sämtlichen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonal, d. h. das System (23) von Orthogonalfunktionen ist für $\beta > 2$ nicht mehr abgeschlossen. Damit ist unsere Behauptung im vollen Umfange bewiesen.

Es läßt sich ferner leicht nach oft angewandten Methoden zeigen, daß jedes abgeschlossene System von Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ im Intervall $0 \leqq x < \infty$ auch ein vollständiges Orthogonalsystem bildet, d. h. daß für jede Funktion $g(x)$, deren Quadrat im Lebesgueschen Sinne im Intervall $0 \leqq x < \infty$ integrabel ist, die sogenannte Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\, g(x)\, dx \right)^2 = \int_0^\infty g^2(x)\, dx$$

erfüllt ist. Umgekehrt kann andererseits ein nicht abgeschlossenes Orthogonalsystem auch nie vollständig sein, d. h. es muß in diesem Falle eine Funktion $g(x)$, deren Quadrat im Intervall $0 \leqq x < \infty$ integrabel ist, von der Beschaffenheit existieren, daß

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\, g(x)\, dx \right)^2 < \int_0^\infty g^2(x)\, dx$$

wird.

Diese letzte Behauptung ist unmittelbar einzusehen. Ist nämlich $\varphi(x)$ eine zu allen Funktionen $\varphi_\nu(x)$ orthogonale Funktion von der Beschaffenheit, daß das Integral $\int_0^\infty \varphi^2(x)\, dx$ konvergiert, ohne zu verschwinden, so wird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\, \varphi(x)\, dx \right)^2 = 0,$$

also gewiß

$$< \int_0^\infty \varphi^2(x)\, dx.$$

Um umgekehrt aus der Abgeschlossenheit des Orthogonalsystems seine Vollständigkeit zu erschließen, benutzt man die Substitution[20])

[20]) Vgl. H. Weyl, „Singuläre Integralgleichungen", Inaugural-Dissertation, Göttingen 1908, S. 18. Abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 66 (1909), S. 275–324. Vgl. insbesondere S. 277.

$$x = \frac{t}{1-t}, \qquad t = \frac{x}{1+x}, \tag{29}$$

die das Intervall $0 \leqq x < \infty$ in das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ überführt.

Setzt man

$$\Phi_\nu(t) = \frac{\varphi_\nu\left(\frac{t}{1-t}\right)}{1-t},$$

so wird

$$\int_0^\infty \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu(x)\,dx = \int_0^1 \Phi_\nu(t)\,\Phi_\mu(t)\,dt.$$

Die Funktionen $\Phi_\nu(t)$ bilden also ein im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ definiertes Orthogonalsystem, das offenbar gleichzeitig mit dem System der Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen oder nicht abgeschlossen ist. Für ein Orthogonalsystem im endlichen Intervall schließt man aber in bekannter Weise auf Grund eines Satzes von Herrn Fischer[21]), daß die Abgeschlossenheit des Systems auch seine Vollständigkeit zur Folge hat.

Geht man endlich wieder vermittelst der Substitution (29) von den Funktionen $\Phi_\nu(t)$ zu den Funktionen $\varphi_\nu(x)$ über, so zeigt sich, daß das System der im Intervall $0 \leqq x < \infty$ definierten Orthogonalfunktionen $\varphi_\nu(x)$ gleichfalls der Vollständigkeitsrelation genügt, wenn das Orthogonalsystem der $\Phi_\nu(t)$ vollständig ist.

Für das aus den Laguerreschen Polynomen gebildete Orthogonalsystem ist die Tatsache der Vollständigkeit bereits bekannt[22]), doch benutzen die in den bisherigen Veröffentlichungen angegebenen Beweise sämtlich tiefliegende Sätze aus der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Veränderlichen. Hier ist der Beweis dieser Tatsache auf elementarem Wege erbracht worden.

Andererseits ist hier aber auch wesentlich mehr bewiesen, denn man erhält das Laguerresche Orthogonalsystem, indem man aus den durch

---

[21]) E. Fischer, C. R. 144 (1907), S. 1022–1024. — Der Beweis des Fischerschen Satzes fußt auf der Lebesgueschen Theorie der bestimmten Integrale. Alle übrigen Gedankengänge unserer Arbeit lassen sich auch mit dem Riemannschen bzw. Stieltjesschen Integralbegriff durchführen.

[22]) Mit der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Laguerreschen oder den damit eng zusammenhängenden Hermiteschen Polynomen beschäftigen sich die Arbeiten von H. Kiehl, Dissertation, Greifswald 1866; O. Blumenthal, Dissertation, Göttingen 1898; Myller-Lebedeff, Dissertation, Göttingen 1906 (abgedruckt in den Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 388–416); W. Stekloff, Communications de la soc. Math. de Charkow 1907; H. Weyl, Dissertation, Göttingen 1908 l. c. Anm. [20]); Rudolf Neumann, Dissertation, Breslau 1912. Ein direkter Nachweis, daß das aus den Laguerreschen Polynomen gebildete Orthogonalsystem der Vollständigkeitsrelation genügt, findet sich nur in der zitierten Arbeit des Herrn Weyl.

Multiplikation von $e^{-\gamma x}$ mit den sämtlichen ganzzahligen, nicht negativen Potenzen von x gebildeten Funktionen $e^{-\gamma x}$, $x e^{-\gamma x}$, $x^2 e^{-\gamma x}$, ... zueinander orthogonale lineare Verbindungen $\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\nu\mu}\, x^{\mu}\, e^{-\gamma x}$ bildet. Der wesentliche Teil unserer Behauptung ist aber gerade, daß schon das aus den nicht negativen geraden Potenzen von x

$$e^{-\gamma x},\quad x^2 e^{-\gamma x},\quad x^4 e^{-\gamma x},\quad \ldots$$

gebildete System von Orthogonalfunktionen der Vollständigkeitsrelation genügt, wohingegen die aus den linearen Verbindungen der Potenzen

$$e^{-\gamma x},\quad x^{\beta} e^{-\gamma x},\quad x^{2\beta} e^{-\gamma x},\quad \ldots$$

gebildeten Orthogonalfunktionen der Vollständigkeitsrelation nicht mehr genügen, wenn $\beta > 2$ ist.

§ 4.

Das Stieltjessche Momentenproblem.

Satz. *Es sei eine Folge von Koeffizienten c_ν von der Beschaffenheit vorgelegt, daß die aus ihnen gebildeten, in den Formeln* (2) *und* (3) *der Einleitung definierten Determinanten C_n und B_n sämtlich positiv sind. Außerdem mögen sich die Koeffizienten c_ν durch die Beziehung*

$$c_\nu \leqq \varrho^\nu (2\nu)! \tag{30}$$

für alle ν abschätzen lassen, wobei ϱ eine feste positive Zahl bedeutet.

Dann hat das zu dieser Folge gehörige Momentenproblem eine und nur eine nicht negative Lösung und der Stieltjessche Kettenbruch ist konvergent.

Beweis. Wie in der Einleitung auseinandergesetzt worden ist, hat unter den Voraussetzungen unseres Satzes das zu der Folge von Koeffizienten c_ν gehörige Momentenproblem sicher mindestens eine Lösung.

Wir gehen von der Annahme aus, es seien im Gegensatz zur Behauptung unseres Satzes $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ zwei voneinander wesentlich verschiedene, nicht negative Lösungen des vorgelegten Momentenproblems, es sei also

$$\int_0^\infty u^\nu\, d\varphi(u) = \int_0^\infty u^\nu\, d\psi(u) = c_\nu. \tag{31}$$

Setzt man

$$\varphi(u) = \int_u^\infty d\varphi(u), \qquad \psi(u) = \int_u^\infty d\psi(u),$$

so sind die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ positiv und werden mit wachsendem u niemals zunehmen.

Wir behaupten zunächst, daß die Integrale

$$\int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du, \qquad \int_0^\infty u^\nu \psi(u)\,du$$

konvergieren und beide gleich $\frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}$ sind.

Man erhält nämlich, wenn man partiell integriert,

$$\int_0^a u^{\nu+1}\,d\varphi(u) = -a^{\nu+1}\varphi(a) + (\nu+1)\int_0^a u^\nu \varphi(u)\,du. \tag{32}$$

Andererseits ist aber

$$a^{\nu+1}\varphi(a) = a^{\nu+1}\int_a^\infty d\varphi(u) \leqq \int_a^\infty u^{\nu+1}\,d\varphi(u),$$

also auf Grund der Konvergenz der Integrale (31)

$$\lim_{a=\infty} a^{\nu+1}\varphi(a) = 0.$$

Es folgt also, wie behauptet, wenn man in (32) zur Grenze $a = \infty$ übergeht,

$$\int_0^\infty u^{\nu+1}\,d\varphi(u) = (\nu+1)\int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du = c_{\nu+1},$$

$$\int_0^\infty u^\nu \varphi(u)\,du = \frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}. \tag{33}$$

Entsprechend beweist man auch

$$\int_0^\infty u^\nu \psi(u)\,du = \frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}. \tag{34}$$

Wir setzen

$$\chi(u) = (\varphi(u) - \psi(u))\,e^{\gamma\sqrt{u}}, \tag{35}$$

wo γ eine positive Konstante bedeutet, über die noch später verfügt wird und wollen zeigen, daß wir auf die durch die Formel (35) definierte Funktion $\chi(u)$ das Lemma I anwenden können. Offenbar genügt die Funktion $\chi(u)$ wegen (33) und (34) der Voraussetzung

$$\int_0^\infty u^\nu \chi(u)\,e^{-\gamma\sqrt{u}}\,du = 0.$$

Es ist also nur noch nachzuweisen, daß sich eine positive Zahl $\delta < \gamma$ bestimmen läßt, so daß das Integral

$$\int_0^\infty |\chi(u)|\,e^{-\delta\sqrt{u}}\,du = \int_0^\infty |\varphi(u) - \psi(u)|\,e^{(\gamma-\delta)\sqrt{u}}\,du \tag{36}$$

konvergent ist. Dies geschieht vermittels des 2. Hilfssatzes aus § 1, der besagt, daß das Integral (36) sicher dann existiert, wenn die Reihe

$$(37)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{\nu}}{\nu!}\int_0^{\infty}u^{\frac{\nu}{2}}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^{\infty}u^{\nu}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\delta)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du=\Sigma_1+\Sigma_2$$

konvergiert.

Es ist aber nach der Voraussetzung (30)

$$(38)\quad \int_0^{\infty}u^{\nu}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du\leqq\int_0^{\infty}u^{\nu}(\varphi(u)+\psi(u))\,du=\frac{2c_{\nu+1}}{\nu+1}$$
$$\leqq\frac{2\varrho^{\nu+1}(2\nu+2)!}{\nu+1}\leqq 4\varrho\,\varrho^{\nu}(2\nu+1)!$$

Um auch noch die Koeffizienten der Reihe Σ_2 abzuschätzen, bemerke man zunächst, daß, da $\varphi(u)$ sowohl wie $\psi(u)$ mit wachsendem u nirgends zunehmende Funktionen sind,

$$\varphi(u)\leqq\varphi(0)=c_0,\qquad \psi(u)\leqq\psi(0)=c_0$$

ist.

Es ergibt sich demzufolge

$$\int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,\varphi(u)\,du=\int_0^{1}+\int_1^{\infty}\leqq c_0+\int_0^{\infty}u^{\nu+1}\varphi(u)\,du=c_0+\frac{c_{\nu+2}}{\nu+2}$$
$$\leqq c_0+\varrho^{\nu+2}\frac{(2\nu+4)!}{\nu+2}\leqq C\varrho^{\nu}(2\nu+3)!,$$

wo C eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Dieselbe Abschätzung findet man aber auch für

$$\int_0^{\infty}\sqrt{u}\,u^{\nu}\,\psi(u)\,du.$$

Man erhält also schließlich

$$(39)\quad \int_0^{\infty}u^{\nu}\sqrt{u}\,|\varphi(u)-\psi(u)|\,du\leqq 2C\varrho^{\nu}(2\nu+3)!.$$

Man setze nunmehr

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{\varrho}},\qquad \delta=\frac{\vartheta}{\sqrt{\varrho}},\qquad (0<\vartheta<1),$$

so daß also wie verlangt $\gamma>\delta$, ferner

$$(40)\quad (\gamma-\delta)^2\varrho=(1-\vartheta)^2$$

wird. Dann ergibt sich, wenn man das Ergebnis der Abschätzungen (38), (39) und (40) in (37) einsetzt:

$$\Sigma_1\leqq 4\varrho\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)(1-\vartheta)^{2\nu},\quad \Sigma_2\leqq\frac{2C}{\sqrt{\varrho}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+3)(2\nu+2)(1-\vartheta)^{2\nu+1}.$$

Die Reihen Σ_1 und Σ_2 sind aber wegen $\vartheta < 1$ absolut konvergent und damit konvergiert nach dem 2. Hilfssatz auch das Integral (36).

Nunmehr sind wir in der Lage, das Lemma I aus § 2 anzuwenden, da die in Formel (35) definierte Funktion $\chi(u)$ allen Voraussetzungen dieses Satzes genügt. Wir erhalten also $\chi(u) = 0$ und damit auch $\varphi(u) = \psi(u)$ für alle Werte von u im Intervall $0 \leqq u < \infty$ bis auf eine Menge vom Maße Null. Da außerdem $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ monotone Funktionen sind, so folgt auf Grund des 3. Hilfssatzes, daß $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in allen Stetigkeitspunkten übereinstimmen.

Wie in der Einleitung ausgeführt worden ist, folgt aber aus der Eindeutigkeit des Momentenproblems auch die Konvergenz des zugehörigen Kettenbruchs. Damit ist der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

Wir wollen jetzt Beispiele von Koeffizientenfolgen anführen, die den Bedingungen für die Determinanten $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen und weiter die Eigenschaft besitzen, daß das zugehörige Momentenproblem unbestimmt ist.

Als erstes Beispiel wählen wir die Folge von Koeffizienten

$$c_\nu = (2+\delta)\,\varrho^{\nu+1}\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)], \tag{41}$$

wo ϱ und δ beliebige feste positive Zahlen bezeichnen.

Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{1}{2+\delta}, \qquad \gamma = \frac{1}{\varrho^\alpha},$$

so liefert, wie sich leicht durch Rechnung nachprüfen läßt, das Differential

$$d\varphi(u) = \Phi(u)\,du = e^{-\gamma u^\alpha}\,du\,,$$

eine zu der Koeffizientenfolge (41) gehörige Lösung des Momentenproblems. Da die Funktion $\Phi(u)$ positiv ist, genügt die Koeffizientenfolge (41) sicher den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$.

Sei ϑ eine beliebige positive reelle Zahl zwischen 0 und 1. Dann ist auch die Funktion

$$\Psi(u, \vartheta) = e^{-\gamma u^\alpha}\,[1 + \vartheta \sin(\gamma u^\alpha \operatorname{tg} \pi\alpha)]$$

positiv. Da ferner auf Grund des Lemmas II des § 2 die Integrale

$$\int_0^\infty u^\nu \sin(\gamma u^\alpha \operatorname{tg} \pi\alpha)\, e^{-\gamma u^\alpha}\, du$$

für alle nicht negativen ganzzahligen ν verschwinden, so wird offenbar

$$\int_0^\infty u^\nu\, \Psi(u, \vartheta)\, du = c_\nu\,;$$

das Differential $d\psi(u,\vartheta) = \Psi(u,\vartheta)\,du$ liefert also für jeden Wert von ϑ zwischen 0 und 1 eine nicht negative Lösung des vorgelegten Momentenproblems.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Folge von Koeffizienten

$$(42)\qquad c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du\,^{[28]},$$

wobei wir zur Abkürzung $\exp(x)$ für e^x schreiben und behaupten:

I. zu jeder noch so kleinen Zahl δ läßt sich eine Zahl N finden, die nur von δ abhängt, so daß

$$c_\nu \leqq 4\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

für alle $\nu \geqq N$ ist;

II. das zur Koeffizientenfolge (42) gehörige Momentenproblem ist unbestimmt.

Dieses Beispiel zeigt, daß das nach dem zu Anfang dieses Paragraphen formulierten Satze zulässige Anwachsen der Koeffizienten c_ν das stärkste ist, bei dem man in jedem Falle die Bestimmtheit des zu dieser Folge gehörigen Momentenproblems erschließen kann.

Um den ersten Punkt zu beweisen, bestimme man eine nur von δ abhängige Konstante ϱ_δ von der Beschaffenheit, daß für alle $u \geqq \varrho_\delta$

$$(43)\qquad (\pi u^{\frac{1}{2}} - \log u)\, u^{-\frac{1}{2+\delta}} = \pi u^{\frac{\delta}{2(2+\delta)}} - u^{-\frac{1}{2+\delta}} \log u \geqq \log^2 u + \pi^2$$

wird. Eine solche Konstante ϱ_δ muß existieren, da jede noch so kleine Potenz von u stärker wächst als jede noch so große Potenz des Logarithmus. Aus (43) folgt unmittelbar

$$\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) \leqq \exp\left(-u^{\frac{1}{2+\delta}}\right) \quad \text{für} \quad u \geqq \varrho_\delta,$$

und man erhält

$$(44)\quad \int_{\varrho_\delta}^\infty u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du \leqq \int_{\varrho_\delta}^\infty u^\nu \exp\left(-u^{\frac{1}{2+\delta}}\right) du \leqq (2+\delta)\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

Andererseits ist

$$(45)\qquad \int_0^{\varrho_\delta} u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u} - \log u}{\log^2 u + \pi^2}\right) du \leqq \int_0^{\varrho_\delta} u^\nu\, du = \frac{\varrho_\delta^{\,\nu+1}}{\nu+1}.$$

[28]) Das Integral (42) konvergiert für jeden nicht negativen Wert von ν, denn für $u = \infty$ wird der Exponent von e negativ unendlich groß wie $-\frac{\pi\sqrt{u}}{\log^2 u}$ und für $u=0$ verschwindet der Exponent wie $\frac{1}{\log u}$.

Da aber $\Gamma[2(\nu+1)]$ mit zunehmendem ν stärker wächst als die Exponentialfunktion $\varrho_\delta^{\nu+1}$, so läßt sich wegen (45) eine Zahl $N = N(\delta)$, die nur von δ abhängt, von der Beschaffenheit finden, daß für $\nu \geqq N$

$$(46)\quad \int_0^{\varrho_\delta} u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right) du \leqq \Gamma[2(\nu+1)] < \Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

ist.

Aus (44) und (46) folgt

$$c_\nu \leqq (3+\delta)\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)] \leqq 4\,\Gamma[(2+\delta)(\nu+1)]$$

für $\nu \geqq N$. Damit ist der erste Punkt erledigt.

Für den Nachweis der Behauptung II genügt es, wenn gezeigt wird, daß für alle nicht negativen ganzzahligen ν die Integrale

$$(47)\quad \int_0^\infty u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right) du$$

verschwinden; denn dann ist für jedes ϑ, das der Beziehung $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ genügt, das Differential

$$d\psi(u,\vartheta) = \Psi(u,\vartheta)\,du = \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right)\left[1+\vartheta \sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right)\right] du$$

eine nirgends negative Lösung des zu der Folge (42) gehörigen Momentenproblems.

Um das Verschwinden der Integrale (47) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß

$$(48)\quad u^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{u}-\log u}{\log^2 u+\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{u}\log u+\pi}{\log^2 u+\pi^2}\right) = \Im\left(u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right)\right)$$

ist.

Wir untersuchen nunmehr das Integral

$$\int_0^R u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du,$$

auf das wir den Cauchyschen Integralsatz anwenden wollen, und zwar integrieren wir längs eines geschlossenen Weges, der sich aus dem Stücke der reellen Achse von $-R$ bis $+R$ und dem über dieser Strecke als Durchmesser in der Halbebene der Zahlen mit positivem Imaginärteil errichteten Halbkreis K_R zusammensetzt. Man erhält demzufolge

$$(49)\quad \int_0^R u^\nu \exp\left(\frac{1+i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du = \int_0^{-R} - \int_{K_R},$$

da die zu integrierende Funktion im Innern des von dem Integrationswege umschlossenen Gebietes keine Singularitäten besitzt und sich ihren Randwerten stetig nähert, wie gleich noch näher geprüft werden soll.

Führt man nämlich Polarkoordinaten $u = re^{i\alpha}$ ein, dann wird die zu integrierende Funktion

$$F_\nu(r, \alpha) = r^\nu \exp\left\{\nu i\alpha - \frac{\sqrt{r}\left(\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}\right) - 1}{\log r - i(\pi - \alpha)}\right\}$$

und ihr absoluter Betrag

$$(50)\qquad F_\nu(r, \alpha) = r^\nu \exp\left\{-\frac{\sqrt{r}\left[\log r \sin\frac{\alpha}{2} + (\pi - \alpha)\cos\frac{\alpha}{2}\right] - \log r}{\log^2 r + (\pi - \alpha)^2}\right\}.$$

Für $u = -1$ bzw. $r = 1$, $\alpha = \pi$ verschwinden Zähler und Nenner des Exponenten in $F_\nu(r, \alpha)$ beide von erster Ordnung in u; die Stelle ist also regulär. Die einzige Singularität von $F_\nu(r, \alpha)$ auf dem Rande des betrachteten Gebietes befindet sich an der Stelle $u = 0$. Doch zeigt Formel (50), daß für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ die Funktion $F_\nu(r, \alpha)$ in der Umgebung der Stelle $r = 0$ beschränkt bleibt und sich dem Randwert stetig nähert, da der Exponent von e für $r = 0$ wie $\frac{1}{\log r}$ verschwindet.

Andererseits wird

$$(51)\qquad \int_{K_R} = i\int_0^\pi F_\nu(R, \alpha) Re^{i\alpha} d\alpha.$$

Nun erkennt man aber aus (50), daß gleichmäßig in α für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$

$$\lim_{R=\infty} R\,|F_\nu(R, \alpha)| = 0$$

wird, daß also das Integral (51) im Grenzfall $R = \infty$ verschwindet.

Geht man nunmehr auch in (49) zur Grenze $R = \infty$ über, so ergibt sich

$$(52)\qquad \int_0^\infty u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du = \int_0^{-\infty} u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du.$$

Das Integral rechter Hand von (52) wird aber, wenn man $u = e^{i\pi} v = -v$ substituiert, für nicht negative, ganzzahlige ν gleich

$$(-1)^{\nu+1}\int_0^\infty v^\nu \exp\left(\frac{1 - \sqrt{v}}{\log v}\right) dv,$$

und ist also reell: folglich muß der imaginäre Teil des Integrals linker Hand von (52)

$$(53)\qquad \Im\left(\int_0^\infty u^\nu \exp\left(\frac{1 + i\sqrt{u}}{\log u - i\pi}\right) du\right)$$

für alle ganzzahligen nicht negativen Werte von ν verschwinden.

Wegen (48) ist aber das Integral (53) nichts anderes als das Integral (47) und hiermit ist auch die Behauptung II bewiesen.

§ 5. Über eine Verallgemeinerung des Stieltjesschen Momentenproblems.

Es sei eine Koeffizientenfolge c_ν von der Beschaffenheit vorgelegt, daß die in der Einleitung Formel (2) angegebenen, aus den c_ν gebildeten Hankelschen Determinanten C_n für jedes n positiv sind, wohingegen über die Determinanten B_n der Formel (3) nichts vorausgesetzt werden soll. Aus $C_n > 0$ folgt, daß die Koeffizienten $c_{2\nu}$ sämtlich positiv sind, während das Vorzeichen der Koeffizienten $c_{2\nu+1}$ keiner einschränkenden Bedingung unterliegt.

Unter diesen Voraussetzungen ist die formale Existenz des zu dieser Folge gehörigen Stieltjesschen Kettenbruchs nicht mehr in allen Fällen gesichert. Indessen kann man der mit diesen Koeffizienten gebildeten formalen Potenzreihe

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots \tag{54}$$

einen anderen Kettenbruch zuordnen, den Herr Perron den zu $S(z)$ assoziierten Kettenbruch nennt; dieser ist von der Form

$$K(z) = \cfrac{k_1}{z + l_1 + \cfrac{k_2}{z + l_2 + \cfrac{k_3}{z + l_3 + \dots}}} \text{ [24]}, \tag{55}$$

seine Koeffizienten k_ν sind sämtlich negativ mit Ausnahme von k_1, das > 0 ist. Die l_ν ergeben sich als beliebige reelle Größen.

Der n-te Näherungsbruch des Kettenbruchs (55) ist eine rationale Funktion und läßt sich in der Umgebung der Stellen $z = \infty$ in eine Potenzreihe

$$S_n(z) = \frac{c_{n,0}}{z} - \frac{c_{n,1}}{z^2} + \frac{c_{n,2}}{z^3} - \dots$$

entwickeln, die für genügend große Werte von z konvergiert.

Für den mit einer Potenzreihe $S(z)$ der Form (54) assoziierten Kettenbruch ist charakteristisch, daß die $2n$ ersten Koeffizienten der Entwicklung $S_n(z)$ seines n-ten Näherungsbruches mit den $2n$ ersten Koeffizienten der Reihe $S(z)$ übereinstimmen, so daß also

$$c_{n,0} = c_0, \quad c_{n,1} = c_1, \quad \dots, \quad c_{n,2n-1} = c_{2n-1} \tag{56}$$

wird[25]).

Durch die Form des Kettenbruches (55) und die Beziehung (56) ist der assoziierte Kettenbruch $K(z)$ eindeutig bestimmt.

---

[24]) Vgl. O. Perron, Lehrbuch, S. 322 und S. 377. Stieltjes erwähnt diesen Kettenbruch auch in der Einleitung seiner Arbeit VIII, S. 3 Formel (I d).

[25]) In der Dissertation des Herrn Grommer wird der Kettenbruch $K(z)$ aus der Reihe $S(z)$ durch formale Entwickelung gewonnen. Vgl. Journal f. Math., l. c. Anm. [12]) S. 118–121.

Wie sich auf einfache Weise zeigen läßt, ist die Bedingung für die Koeffizientendeterminanten, $C_n > 0$, notwendig und hinreichend dafür, daß der mit der Potenzreihe $S(z)$ der Form (54) assoziierte Kettenbruch $K(z)$ formal existiert und daß seine Koeffizienten k_ν mit Ausnahme des immer positiven k_1 sämtlich negativ werden[26]).

Wenn außer dem Koeffizientendeterminanten C_n auch die Determinanten B_n sämtlich positiv und von 0 verschieden sind, so daß auch der zu dieser Folge gehörige Stieltjessche Kettenbruch existiert, so zeigt sich, daß der n-te Näherungsbruch des assoziierten Kettenbruchs mit dem $2n$-ten Näherungsbruch des Stieltjesschen Kettenbruchs übereinstimmt. In diesem Falle ist also (vgl. die Fälle I und II S. 186 u. 187 der Einleitung) der assoziierte Kettenbruch sicher konvergent. Dies ist aber, wie Herr Grommer an einem Beispiel gezeigt hat, im allgemeinen nicht der Fall[27]).

An die Stelle der Konvergenz des Kettenbruches tritt hier vielmehr die Konvergenz einer passend ausgewählten Folge von Näherungsbrüchen von $K(z)$, wie aus dem folgendem Satze des Herrn Grommer hervorgeht[28]):

Ist $K(z)$ ein formaler mit einer Potenzreihe $S(z)$, deren Koeffizienten den Bedingungen $C_n > 0$ genügen, assoziierter Kettenbruch, so läßt sich eine unendliche Folge von Näherungsbrüchen $K_{n_\nu}(z)$ des Kettenbruches $K(z)$, $(n_1 < n_2 < \ldots \to \infty)$, so auswählen, daß die $K_{n_\nu}(z)$ mit wachsendem ν in jedem abgeschlossenen Bereiche der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$ konvergieren. Die Funktion $f(z)$ läßt sich ferner in der Form

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}$$

darstellen.

Hier bedeutet $d\varphi(u)$ ein nicht negatives Differential von der Beschaffenheit, daß die Funktion

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\varphi(v)$$

nirgends abnimmt. Endlich kann man auch zeigen[29]), daß die Integrale

[26]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 122; vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 324.

[27]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 143 ff. Eine erschöpfende Untersuchung über die Konvergenztheorie der Kettenbrüche der Form (55) gedenken wir an anderer Stelle zu veröffentlichen.

[28]) Vgl. J. Grommer, Dissertation, S. 137 ff.

[29]) Der Beweis dieser Behauptung, die unseres Wissens bisher noch nicht ausgesprochen worden ist, bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, und soll an andrer Stelle veröffentlicht werden.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \, d\varphi(u)$$

sämtlich konvergieren und gleich den Koeffizienten c_ν sind.

Die Frage nach einer nirgends abnehmenden Funktion $\varphi(u)$ mit der Eigenschaft, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \, d\varphi(u) = c_\nu$$

sind, wollen wir das Momentenproblem im weiteren Sinne nennen. Das Grommersche Auswahlverfahren liefert uns also zu jeder Koeffizientenfolge c_ν, die den Determinantenbedingungen $C_n > 0$ genügt, eine Lösung des erweiterten Momentenproblems. Umgekehrt läßt sich leicht einsehen, daß jede Folge von Koeffizienten c_ν von der Beschaffenheit, daß mindestens eine Lösung des zugehörigen Momentenproblems im weiteren Sinne existiert, den Bedingungen $C_n > 0$ genügt.

Das Grommersche Auswahlverfahren läßt ferner erkennen, daß, falls der zu $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ nicht konvergiert, sich mindestens zwei untereinander verschiedene Folgen von Näherungsbrüchen $K_{n_\nu}(z)$ und $K_{m_\nu}(z)$ von der Beschaffenheit auswählen lassen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} K_{n_\nu}(z) = f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_1(u)}{z+u},$$

$$\lim_{\nu=\infty} K_{m_\nu}(z) = f_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_2(u)}{z+u}$$

wird. Hierbei sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bzw. $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ voneinander verschieden. Daraus folgt umgekehrt, daß der assoziierte Kettenbruch jedenfalls dann konvergiert, wenn das zugehörige Momentenproblem im weiteren Sinne nur eine einzige Lösung hat[30]).

Wir wollen jetzt — analog zu dem im vorigen Paragraphen aufgestellten Satz über das Stieltjessche Momentenproblem — den folgenden Satz beweisen:

Satz: *Ist eine Folge von Koeffizienten c_ν vorgelegt, die den Bedingungen $C_n > 0$ genügen und für die sich eine Zahl ϱ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß für alle ν*

$$(57) \qquad |c_\nu| \leqq \varrho^\nu \nu!$$

[30]) Umgekehrt braucht, wenn der assoziierte Kettenbruch $K(z)$ konvergiert, das zugehörige erweiterte Momentenproblem nicht bestimmt zu sein. Genügt z. B. die Koeffizientenfolge c_ν den Bedingungen $C_n > 0$ und $B_n > 0$, so ist, wie wir oben gesehen haben, der zugehörige assoziierte Kettenbruch immer konvergent, obgleich dann sogar das Momentenproblem im engeren Sinne mehrere Lösungen haben kann, also um so mehr das erweiterte Momentenproblem.

wird, so ist das zu dieser Folge gehörige erweiterte Momentenproblem bestimmt und damit auch der zugehörige assoziierte Kettenbruch konvergent[31]).

Beweis. Unter den Voraussetzungen unseres Satzes hat das zu der Folge von Koeffizienten c_ν gehörige erweiterte Momentenproblem sicher mindestens eine Lösung.

Wir gehen wieder von der Annahme aus, es seien $d\varphi(u)$ und $d\psi(u)$ zwei voneinander wesentlich verschiedene, positive Lösungen des vorgelegten Momentenproblems, so daß also die Funktionen

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\varphi(u), \qquad \psi(u) = \int_{-\infty}^{u} d\psi(v)$$

nirgends abnehmen; dann wird, wenn man $\varphi(u) - \psi(u) = \chi(u)$ setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu\, d\chi(u) = 0. \tag{58}$$

Es ist nun aber wegen (57):

$$\int_0^\infty u^{2\nu} |d\chi(u)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu}(d\varphi(u) + d\psi(u)) \leqq 2\varrho^{2\nu}(2\nu)!, \tag{59}$$

[31]) In einer Arbeit, die demnächst an andrer Stelle erscheinen wird, habe ich die Konvergenz des zu einer Potenzreihe, deren Koeffizienten den Bedingungen $C_n > 0$ und der Abschätzung (57) genügt, assoziierten Kettenbruches direkt ohne Zuhilfenahme der Stieltjesschen Integraldarstellungen bewiesen, und zwar wird dort gezeigt, daß unter den angegebenen Bedingungen die überall divergente Potenzreihe nach der Borelschen Methode summierbar ist und der Kettenbruch gegen die durch die Borelsche Summationsmethode aus der Potenzreihe gewonnene Funktion konvergiert.

Das allgemeinste unter den bisher bekannten Resultaten dieser Art war im Anschluß an die S. 191 Anm. [9]) zitierte Arbeit des Herrn Perron von Herrn Szász angegeben worden in einer Arbeit: „Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche", Math. Ann. Bd. 76 (1915); S. 301–314.

Der Szászsche Satz lautet: Ist eine reelle nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ im Intervall $-\infty < u < +\infty$ von der Beschaffenheit definiert, daß alle Integrale

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu\, d\varphi(u)$$

konvergieren, und gilt außerdem für unendlich viele ν (also nicht notwendig für alle ν) die Beziehung

$$c_{2\nu} \leq \varrho^{2\nu}\, \nu!,$$

so konvergiert der zu der Reihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch gegen die Funktion

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u}.$$

$$(60)\qquad \int_0^\infty |u^{2\nu-1}\, d\chi(u)| \leqq \int_0^1 |d\chi(u)| + \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu}(d\varphi(u)+d\psi(u))$$
$$\leqq 2c_0 + 2\varrho^{2\nu}(2\nu)! \leqq C\varrho^{2\nu}(2\nu)!,$$

wo C eine passend gewählte Konstante bedeutet.

Entsprechend ergibt sich

$$(61)\qquad \int_0^{-\infty} u^{2\nu}\,|d\chi(u)| \leqq 2\varrho^{2\nu}(2\nu)!,$$

$$(62)\qquad \int_0^{-\infty} |u|^{2\nu-1}\,|d\chi(u)| \leqq C\varrho^{2\nu}(2\nu)!.$$

Sei γ eine positive Zahl $< \frac{1}{\varrho}$.

Bildet man die Integrale

$$(63)\qquad F(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma u}\, d\chi(u), \qquad G(-\gamma) = \int_0^{-\infty} e^{-\gamma u}\, d\chi(u),$$

so kann man, wenn man sich für $e^{\gamma u}$ bzw. $e^{-\gamma u}$ ihre Darstellungen durch Potenzreihen in die Integrale (63) substituiert denkt, auf Grund der Beziehungen (59), (60), (61), (62) und wegen $\gamma\varrho < 1$ den 2. Hilfssatz des § 1 über gliedweise Integration von Reihen auf die Integrale (63) anwenden und erkennt, daß die Integrale (63) absolut konvergent sind.

Andererseits ist, wenn

$$\int_u^\infty |d\chi(v)| = \tilde{\chi}_1(u), \qquad \int_0^\infty |d\chi(v)| = \tilde{b}_1$$

gesetzt wird,

$$\int_0^R e^{\gamma u}\,|d\chi(u)| = \tilde{b}_1 - \tilde{\chi}_1(R)\, e^{\gamma R} + \gamma \int_0^R e^{\gamma u}\, \tilde{\chi}_1(u)\, du.$$

Es ist aber

$$\tilde{\chi}_1(R)\, e^{\gamma R} = e^{\gamma R} \int_R^\infty |d\chi(u)| \leqq \int_R^\infty e^{\gamma u}\,|d\chi(u)|,$$

also ist wegen der absoluten Konvergenz des Integrals (63)

$$\lim_{R=\infty} \tilde{\chi}_1(R)\, e^{\gamma R} = 0,$$

$$\int_0^\infty e^{\gamma u}\,|d\chi(u)| = \tilde{b}_1 + \gamma \int_0^\infty e^{\gamma u}\, \tilde{\chi}_1(u)\, du.$$

Setzt man nunmehr

$$(64)\qquad \int_u^\infty d\chi(v) = \chi_1(u), \qquad \int_0^\infty d\chi(u) = b_1,$$

so wird offenbar, da

$$|\chi_1(u)| \leqq \tilde{\chi}_1(u)$$

ist,

$$(65) \qquad F(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma u}\, d\chi(u) = b_1 + \gamma \int_0^\infty e^{\gamma u} \chi_1(u)\, du,$$

wobei das Integral rechter Hand absolut konvergiert.

Entsprechend erhält man für $G(-\gamma)$ die absolut konvergente Integraldarstellung

$$(66) \qquad G(-\gamma) = b_2 + \gamma \int_0^{-\infty} e^{-\gamma u} \chi_2(u)\, du,$$

wenn zur Abkürzung

$$(67) \qquad \int_u^{-\infty} d\chi(v) = \chi_2(u), \qquad \int_0^{-\infty} d\chi(u) = b_2$$

gesetzt wird.

Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$(68) \qquad \begin{cases} F(z) = \int_0^\infty e^{zu}\, d\chi(u) = b_1 + z \int_0^\infty e^{zu} \chi_1(u)\, du, \\ G(z) = \int_0^{-\infty} e^{zu}\, d\chi(u) = b_2 + z \int_0^{-\infty} e^{zu} \chi_2(u)\, du \end{cases}$$

und erkennen, daß wegen der absoluten Konvergenz der Integrale (65) und (66) die beiden Integraldarstellungen von $F(z)$ für $\Re(z) \leqq \gamma$ und die beiden Integraldarstellungen von $G(z)$ für $\Re(z) \geqq -\gamma$ absolut und gleichmäßig gegen eine analytische Funktion konvergieren. Die Funktion $F(z)$ bleibt also in der ganzen unendlichen Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma$ unterhalb einer festen Schranke; das gleiche gilt von $G(z)$ in der Halbebene $\Re(z) \geqq -\gamma$.

Der 2. Hilfssatz zeigt nun weiter, daß für $|z| \leqq \gamma$ wegen (59), (60), (61) und (62) die Integrale

$$\int_0^\infty e^{zu}\, d\chi(u) = \int_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(zu)^\nu}{\nu!}\right) d\chi(u) \quad \text{und} \quad \int_0^{-\infty} e^{zu}\, d\chi(u) = \int_0^{-\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(zu)^\nu}{\nu!}\right) d\chi(u)$$

gliedweise integriert werden dürfen; es ergeben sich demnach für $F(z)$ und $G(z)$ die Darstellungen durch Potenzreihen

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \int_0^\infty u^\nu\, d\chi(u), \qquad G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \int_0^{-\infty} u^\nu\, d\chi(u),$$

die mindestens für $|z| \leqq \gamma$ konvergieren.

Andererseits erkennt man aus (58), daß

$$\int_0^{\infty} u^{\nu}\, d\chi(u) = \int_0^{-\infty} u^{\nu}\, d\chi(u) \qquad \text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

ist. Es ergibt sich also

$$F(z) = G(z). \tag{69}$$

Da nun $F(z)$ in der Halbebene $\Re(z) \leqq \gamma$, $G(z)$ in der Halbebene $\Re(z) \geqq -\gamma$ beschränkt ist, so ist $F(z)$ wegen (69) in der ganzen Ebene beschränkt, ist also nach dem Liouvilleschen Satze gleich einer Konstanten. Für $z = 0$ wird aber wegen (68) $F(z) = b_1$, folglich, da diese Beziehung in der ganzen Ebene bestehen muß, erhält man identisch in z

$$z \int_0^{\infty} e^{zu} \chi_1(u)\, du = 0,$$

und nach dem Eindeutigkeitssatze des Herrn Lerch[32])

$$\chi_1(u) = 0$$

bis auf eine Menge vom Maße Null.

Es ist aber nach Formel (64) für $u \geqq 0$

$$\chi_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi(v) - \int_{-\infty}^{u} d\chi(v) = -\chi(u) = -(\varphi(u) - \psi(u)).$$

Daraus folgt, da $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ monotone Funktionen sind, unter Benutzung des 3. Hilfssatzes, daß für $u \geqq 0$ die Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in allen Stetigkeitspunkten übereinstimmen müssen.

Dasselbe beweist man für negative u, indem man berücksichtigt, daß in Hinblick auf die Identität (69) das Integral

$$z \int_0^{-\infty} e^{z}$$

und damit auch die Funktion $\chi_2(u)$ bis auf eine Menge vom Maße Null verschwinden muß. Nun ist aber nach Formel (67) für $u \leqq 0$

$$\chi_2(u) = -\int_{-\infty}^{u} d\chi(v) = -\chi(u) = -(\varphi(u) - \psi(u));$$

also ist auf Grund des 3. Hilfssatzes auch für $u \leqq 0$ in allen Stetigkeitspunkten $\varphi(u) = \psi(u)$. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Ähnlich wie im § 4 soll nunmehr gezeigt werden, daß das nach dem eben bewiesenen Satze zulässige Anwachsen der Koeffizienten c_ν das stärkste ist, das in allen Fällen die Bestimmtheit des zu dieser Folge gehörigen

[32]) Vgl. Anm. [16]) S. 198.

Momentenproblems im weiteren Sinne und die Konvergenz des zugehörigen assoziierten Kettenbruches sichert.

Wir wollen jetzt nämlich eine im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte positive reelle Funktion $\Phi(u)$ von der Beschaffenheit angeben, daß *erstens* die mit Hilfe dieser Funktion gebildeten Integrale

$$(70) \qquad c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \, \Phi(u)\, du$$

für alle nicht negativen Werte von ν existieren und sich zu jeder noch so kleinen positiven Zahl δ eine Zahl N, die nur von δ abhängt, in der Weise bestimmen läßt, daß für alle $\nu \geqq N$

$$(71) \qquad |c_\nu| \leqq \Gamma[(1+\delta)(\nu+1)]$$

ist, *zweitens*, daß das zu der Folge (70) von Koeffizienten c_ν gehörige Momentenproblem im weiteren Sinne unbestimmt ist, und *drittens*, daß der mit der aus den Koeffizienten (70) gebildeten Potenzreihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ divergent ist. Zu diesem Zwecke setze man

$$\Phi(u) = |u| \exp\left(-\frac{\pi|u| - 2\log|u|}{4\log^2|u| + \pi^2}\right).$$

Die Funktion $\Phi(u)$ ist eine gerade Funktion, d. h. es ist

$$\Phi(-u) = \Phi(u).$$

Folglich erhält man

$$(72) \qquad c_{2\nu+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu+1}\, \Phi(u)\, du = 0,$$

$$(73) \qquad c_{2\nu} = 2\int_0^\infty u^{2\nu}\, \Phi(u)\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu+1} \exp\left(-\frac{\pi u - 2\log u}{4\log^2 u + \pi^2}\right) du$$
$$= \int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right) dv,$$

wenn man in dem Integral (73) die Substitution $v = u^2$ ausführt.

Da die Koeffizienten $c_{2\nu+1}$ sämtlich $= 0$ sind, so genügen sie sicher der Abschätzung (71); die Integraldarstellungen (73) für $c_{2\nu}$ sind aber mit den Integralen (42) des § 4 identisch und genügen, wie dort gezeigt worden ist, für jede beliebig kleine positive Zahl δ bei hinreichend großem $\nu \geqq N'(\delta)$ der Abschätzung

$$(74) \qquad c_{2\nu} \leqq \Gamma[(2+\delta)(\nu+1)].$$

Man wähle jetzt eine positive Zahl $N = N(\delta)$, so daß **erstens** $N \geqq N'(\delta)$, **zweitens** $N \geqq \frac{1}{\delta}$ wird. Wegen dieser zweiten Bedingung für N ist dann für alle $\nu \geqq N(\delta)$

$$(75) \qquad (2+\delta)(\nu+1) \leqq (1+\delta)(2\nu+1).$$

Aus (74) und (75) folgt nunmehr für alle $\nu \geqq N$

$$c_{2\nu} \leqq \Gamma[(1+\delta)(2\nu+1)],$$

womit der erste Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Um den zweiten Teil unserer Behauptung nachzuweisen, betrachte man die Funktion

$$\Psi(u, \vartheta) = |u| \exp\left(-\frac{\pi|u| - 2\log|u|}{4\log^2|u| + \pi^2}\right)\left(1 + \vartheta \sin\frac{2|u|\log|u| + \pi}{4\log^2|u| + \pi^2}\right),$$

die für jedes ϑ, das der Beziehung $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ genügt, sicher nicht negativ ist. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß für jedes feste ϑ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^\nu \Psi(u, \vartheta)\, du = c_\nu$$

wird.

Da auch $\Psi(u, \vartheta)$ für jedes feste ϑ eine gerade Funktion von u ist, so ist zunächst wegen (72)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu+1} \Psi(u, \vartheta)\, du = 0 = c_{2\nu+1},$$

$$(76) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2\nu} \Psi(u, \vartheta)\, du = 2\int_0^\infty u^{2\nu} \Psi(u, \vartheta)\, du$$

$$= \int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right)\left(1 + \vartheta \sin\frac{\sqrt{v}\log v + \pi}{\log^2 v + \pi^2}\right) dv,$$

wenn man wieder $u^2 = v$ in das Integral substituiert.

Nun verschwinden aber, wie in § 4 gezeigt worden ist, die Integrale

$$\int_0^\infty v^\nu \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{v} - \log v}{\log^2 v + \pi^2}\right) \sin\frac{\sqrt{v}\log v + \pi}{\log^2 v + \pi^2}\, dv$$

für alle nicht negativen ganzzahligen Werte von ν. Folglich sind die Integrale (76) wegen (73) für jeden Wert von ϑ zwischen 0 und 1 gleich $c_{2\nu}$, womit auch der zweite Teil unserer Behauptung bewiesen ist.

Es seien jetzt

$$S(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{2\nu}}{z^{2\nu+1}} \qquad \text{wegen (72)}$$

$$T(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_4}{x^3} - \ldots$$

Potenzreihen, die vermittels der den Formeln (72) und (73) entnommenen Koeffizienten c_ν gebildet sind. Die Integraldarstellung der Koeffizienten c_ν läßt erkennen, daß die Koeffizienten von $S(z)$ den Bedingnngen $C_n > 0$, und die Koeffizienten von $T(x)$ den Bedingungen $C_n > 0$, $B_n > 0$ genügen;

es existiert demzufolge der der Potenzreihe $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ und der der Potenzreihe $T(x)$ zugeordnete Stieltjessche Kettenbruch $H(x)$.

Der Kettenbruch $H(x)$ ist jedenfalls divergent, da das zu der Folge (78) von Koeffizienten $c_{2\nu}$ gehörige Stieltjessche Momentenproblem, wie in § 4 (vgl. vor allem Formel (47)) bewiesen worden ist, unbestimmt ist. Um endlich den dritten Punkt unserer Behauptung zu beweisen, soll jetzt gezeigt werden, daß auch der mit $S(z)$ assoziierte Kettenbruch $K(z)$ divergiert.

Substituiert man $x = -z^2$, so wird wegen $c_{2\nu+1} = 0$

$$T(-z^2) = -\frac{1}{z} S(z),$$

$$H(-z^2) = \cfrac{1}{-a_1 z^2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{-a_3 z^2 + \cfrac{1}{a_4 + \dotsb}}}},$$

wo die a_ν positive Konstanten bedeuten.

Man betrachte nunmehr den Kettenbruch

$$K^*(z) = \cfrac{-\frac{1}{z a_1}}{z + \cfrac{\frac{-1}{a_1 a_2}}{z + \cfrac{\frac{-1}{a_2 a_3}}{z + \dotsb}}}$$

Dann ist nach einem formalen Transformationssatze aus der Theorie der Kettenbrüche $K^*(z)$ äquivalent $H(-z^2)$ [33]). Hierbei sind unter äquivalenten Kettenbrüchen solche Kettenbrüche zu verstehen, deren sämtliche Näherungsbrüche gleicher Ordnung miteinander übereinstimmen, so daß also aus der Divergenz (Konvergenz) des einen Kettenbruches die Divergenz (Konvergenz) der anderen folgt. Da der Kettenbruch $H(-z^2)$, wie wir gesehen haben, divergent ist, ist folglich auch der Kettenbruch $K^*(z)$ divergent.

Nun ist aber

$$K^*(z) = -\frac{1}{z} K(z),$$

denn erstens hat $-z K^*(z)$ die formalen Eigenschaften der assoziierten Kettenbrüche der Form (55), und zwar sind die dort mit l_ν bezeichneten Koeffizienten gleich Null,

$$k_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad k_\nu = -\frac{1}{a_{\nu-1} a_\nu}, \qquad \nu \geqq 2,$$

also k_1 positiv und die übrigen k_ν negativ.

[33]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 196.

Zweitens: Bedeuten $T_n(x)$ bzw. $S_n(z)$ Potenzreihen, die für genügend große Werte von x bzw. z konvergieren und die n-ten Näherungsbrüche von $H(x)$ bzw. $-zH(-z^2) \sim -zK^*(z)$ darstellen, so wird nach den Gesetzen der Zuordnung von Stieltjesschem Kettenbruch und Potenzreihe zueinander

$$T_n(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_2}{x^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{c_{2n-2}}{x^n} + (-1)^n \frac{c_{n,2n}}{x^{n+1}} + \dots$$

und

$$S_n(z) = -zT_n(-z^2) = \frac{c_0}{z} + \frac{c_2}{z^3} + \dots + \frac{c_{2n-2}}{z^{2n-1}} + \frac{c_{n,2n}}{z^{2n+1}} + \dots \tag{77}$$

Formel (77) läßt aber erkennen, daß $S_n(z)$ den Bedingungen (56) genügt, also der n-te Näherungsbruch des zu der Potenzreihe $S(z)$ assoziierten Kettenbruches $K(z)$ ist.

Es ist folglich wie behauptet

$$-zH(-z^2) \sim -zK^*(z) \equiv K(z),$$

also $K(z)$ divergent. W. z. b. w.

Berlin-Adlershof, den 4. April 1918.

(Eingegangen am 22. Dezember 1918.)