Damit ist die Überleitung zur analytischen Geometrie gegeben, die ungefähr in dem Ausmaß wie in den meisten Lehrbüchern entwickelt wird. Doch werden die sonst zumeist nur durch Verwendung der Koordinatengleichung gelösten Ortsaufgaben hier auch rein geometrisch (mit Hilfe der projektiven Gebilde) behandelt und die Gleichung des Ortes wird aus der geometrischen Lösung abgeleitet. Eine sehr umfangreiche Sammlung von Ortsaufgaben bildet eine auch für den gewöhnlichen Unterricht in der analytischen Geometrie wertvolle Fundgrube. *F.*

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Von A. Hochheim, Heft 1 und 3, mit Auflösungsheften, zweite, bezw. vierte Auflage, Teubner, 1911.

Das erste Heft enthält Aufgaben über die Gerade, den Punkt und den Kreis. Besonders auch für Mittelschullehrer sind die Aufgaben über geometrische Örter und über Gleichungen höheren Grades, durch welche Systeme von Geraden definiert werden, zu beachten. Das 3. Heft gibt ein reiches Übungsmaterial über die projektive Erzeugung der Linien zweiter Ordnung. In beiden Heften kommen außer den rechtwinkligen auch homogene Punkt- und Linienkoordinaten zur Verwendung. *F.*

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. Par P. Dienes (Samml. Borel). Paris, 1913, Gauthier-Villars.

Bei dem Bestreben, einen eindeutigen analytischen Ausdruck über seine Konvergenzgrenze hinaus analytisch fortzusetzen, sieht man sich vor die Frage gestellt: Welche Beziehung besteht an einem Punkt jener Grenze zwischen dem Verhalten des Ausdrucks und dem Verhalten der durch den Ausdruck bestimmten monogenen Funktion? Mit dieser Frage beschäftigt sich die vorliegende Monographie, die somit in bestimmter Richtung Hadamards Untersuchungen über die Taylorsche Reihe weiterführt. Es werden folgende analytischen Ausdrücke behandelt: 1. die Taylorsche Reihe $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, 2. die „arithmetischen Mittel r^{ter} Ordnung“ dieser Reihe:

$$s_n^{(r)} x = n^{-r} \sum_{i=o}^{n} \frac{\Gamma(n-i+r)}{\Gamma(n-i)} a_i x^i,$$

3. die von Borel eingeführten „exponentiellen Mittel“:

$$B_n(x) = e^{-n} \sum_{i=o}^{\infty} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i) \frac{n^i}{i!},$$

4. die Mittelbildung von Mittag-Leffler, welche ähnliche Polynomfolgen gibt wie die Borel, nur daß die Exponentialfunktion durch andere ganze Transzendenten zu ersetzen ist, 5. die Polynome von Painlevé, die weit komplizierter gebaut sind, aber das Verhalten der Funktion an den singulären Stellen genauer charakterisieren. Jede dieser Mittelbildungen stellt im Grenzübergang die Funktion mindestens in demselben Gebiet wie die Taylorsche Reihe dar, setzt sie aber im allgemeinen noch darüber hinaus auf ein weiteres Gebiet fort, und zwar kann von den genannten fünf Darstellungen jede als

wirksamer als die vorherige bezeichnet werden. Die eingehende Behandlung dieser Entwicklungen bildet eine dankenswerte Vereinigung der in der Literatur zerstreuten Methoden polynomischer Summation. — Aus dem Verhalten des analytischen Ausdruckes in einem Punkt seiner Konvergenzgrenze kann man unter Umständen folgenden Schluß auf das Verhalten der Funktion in diesem Punkt ziehen: Ist der Ausdruck in dem Punkt konvergent, so ist der Grenzwert gleichzeitig ein Randwert der Funktion. Dies hat Abel für die Taylorsche Reihe nachgewiesen und der Verf. zeigt es für die arithmetischen Mittel jeder Ordnung (S. 58) und für Painlevés Darstellung als gültig. Umgekehrt, ist das Verhalten der Funktion in einem Punkte der Gültigkeitsgrenze einer der Darstellungen bekannt, so kann man daraus auf das Verhalten des betreffenden analytischen Ausdruckes schließen: Für die Taylorsche Reihe besagt ein bekannter Satz von Fatou (seither bedeutend einfacher als in der vorliegenden Darstellung bewiesen, vgl. Crelles J., Bd. 140, S. 89 ff.), daß sie in jedem Punkt des Konvergenzkreises, in dem die Funktion regulär ist, konvergiert, sofern ihre Koëffizienten a_n unbegrenzt abnehmen. Der Verf. zeigt, daß der Satz richtig bleibt, wenn die Funktion längs des Kreises in der Nähe der fraglichen Stelle auch nur beschränkter Schwankung ist. Für die arithmetischen Mittel r^{ter} Ordnung hat Hadamard gezeigt, daß sie in jedem regulären Punkt gegen den Funktionswert konvergieren, wenn die Koëffizienten a_n schwächer als n^r wachsen; der Verf. dehnt den Satz auf alle diejenigen singulären Punkte aus, in welchen die Funktion bestimmte Randwerte hat, doch scheint der bezügliche Beweis (S. 61, ebenso der Beweis für einen ähnlichen Satz, S. 43) nicht ganz stichhältig zu sein. Der gleiche Zweifel bezieht sich auf den Beweis der analogen Sätze (S. 91 ff., S. 115), in welchen statt der arithmetischen Mittel die Ausdrücke von Borel, bezw. Mittag-Leffler auftreten. Eine präzise Beziehung zwischen analytischen Ausdruck und Funktion wird für jeden der betrachteten analytischen Ausdrücke an solchen singulären Punkten x_0 als bestehend nachgewiesen, an welchen der überwiegende singuläre Teil der Funktion in der Form:

$$\frac{A \log^q (x-x_0)}{(x-x_0)^\varrho}$$

isolierbar ist; die Ordnung des Unendlichwerdens des approximierenden Ausdruckes an einer derartigen Stelle ist durch die Zahlen q und ρ in einfacher Weise ausdrückbar. Painlevés Polynome geben auch im allgemeinen Fall eine hinreichende Einsicht in die Natur der Singularität. *F.*

Die Elemente der analytischen Geometrie. Erster Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonschule in Aarau, und Dr. F. Rudio, Professor an der Techn. Hochschule in Zürich. Achte Auflage. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

Die neue achte Auflage dieses vortrefflichen Lehrbuches weist gegenüber der siebenten nur unwesentliche Veränderungen auf. Die Beschränkung des Stoffes auf die Untersuchung von Punkt, Gerade, Kreis und der Kegelschnitte bei Zugrundelegung recht- und schiefwinkliger Parallelkoordinaten und die ausführliche und klare Behandlung in Verbindung mit vielen lehrreichen Bei-