12.

Beweis eines geometrischen Satzes.

(Von dem Prem. Lieut. a. D. Herrn *A. Jacobi* zu Breslau.)

Im 9ten Bande dieses Journals sind auf Seite 411. vom Herrn Professor *Plücker* zwei neue Sätze in Bezug auf das einem Kegelschnitte eingeschriebene und umgeschriebene Sechseck aufgestellt. Es scheint dabei ein Druckfehler vorgekommen zu sein, von dem ich nicht weiss, ob er später verbessert worden ist. Der eine Satz folgt aus dem andern mit Hülfe des Princips der Reciprocität, und ich will daher nur den zweiten Satz zu beweisen versuchen, welcher heisst:

„Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein in demselben beschriebenes Sechseck gegeben sind, so lassen sich irgend zwei Winkel-Puncte dieses Sechsecks mit den vier übrigen durch 8 neue gerade Linien verbinden. Diese 8 Linien schneiden sich in 12 neuen Puncten. Diese 12 neuen Puncte lassen sich durch 42 neue gerade Linien verbinden. Von diesen 42 Linien gehen 6 nach einem allbekannten Satze durch den Pol derjenigen geraden Linie, welche jene beiden ersten Winkel-Puncte des eingeschriebenen Sechsecks verbindet; 12 schneiden sich zu vier in drei Puncten; 24 schneiden sich paarweise in solchen 12 Puncten, welche zu drei auf den vier Tangenten der vier übrigen Winkel-Puncte des Sechsecks liegen."

Sind A, A', B, B', C und C' die 6 gegebenen Puncte des Kegelschnitts, so sind nach den 4 letztern Puncten von jedem der beiden Puncte A und A' 4 Gerade g, also im Ganzen 8 Gerade g möglich. Jede Gerade g, die durch den Punct B geht, wird von den 4 durch A' gehenden Geraden g offenbar in 3 neuen Puncten p geschnitten, so dass im Ganzen 12 Puncte p entstehen. Werden irgend zwei der durch A gehenden Geraden g genommen, so lassen sich bekanntlich die 6 Puncte p derselben paarweise durch 9 Gerade k verbinden, unter denen aber offenbar 2 sich in A' schneidende Gerade g befindlich sind, so dass also nur 7 neue Gerade k entstehen. Die 4 den

Punct A enthaltenden Geraden g lassen sich auf 6 verschiedene Arten zu 2 verbinden, und es giebt daher im Ganzen 42 Gerade k.

In meiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie No. V." in diesem Journal ist z. B. der Durchschnitt der beiden Geraden AB' und $A'B$ durch $\frac{A,\,B}{A',\,B'}$, und das Sechseck im Kegelschnitte, in welchem die Durchschnitte der Seitenpaare AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ liegen, durch $\frac{A,\,B,\,C}{A',\,B',\,C}$ bezeichnet; daher lassen sich die 12 Puncte p in folgenden Formen darstellen:

$$1.\ \frac{A,\,B}{A',\,B'}\quad 2.\ \frac{A,\,B'}{A',\,B}\quad 3.\ \frac{A,\,C}{A',\,C'}\quad 4.\ \frac{A,\,C'}{A',\,C}\quad 5.\ \frac{A,\,B}{A',\,C'}\quad 6.\ \frac{A,\,C'}{A',\,B}$$

$$7.\ \frac{A,\,B}{A',\,C}\quad 8.\ \frac{A,\,C}{A',\,B}\quad 9.\ \frac{A,\,B'}{A',\,C}\quad 10.\ \frac{A,\,C}{A',\,B'}\quad 11.\ \frac{A,\,B'}{A',\,C'}\quad 12.\ \frac{A,\,C'}{A',\,B'}.$$

Die 6 Geraden k, welche die Puncte 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8, 9 und 10, 11 und 12 verbinden, schneiden sich in dem Pole der Geraden AA' in Bezug auf den Kegelschnitt. Wir erinnern hier an die Eigenschaft zweier Vierecke eines Kegelschnitts, von denen das eine demselben umschrieben, das andere ihm eingeschrieben ist, und wo die Berührungspuncte des einen die Eckpunkte des andern sind.

Den 4 Sechsecken

$$\frac{A,\,B,\,C}{A',\,B',\,C'},\quad \frac{A,\,B',\,C'}{A',\,B,\,C},\quad \frac{A,\,B,\,B'}{A,\,C,\,C'},\quad \frac{A,\,C,\,C'}{A',\,B,\,B'}$$

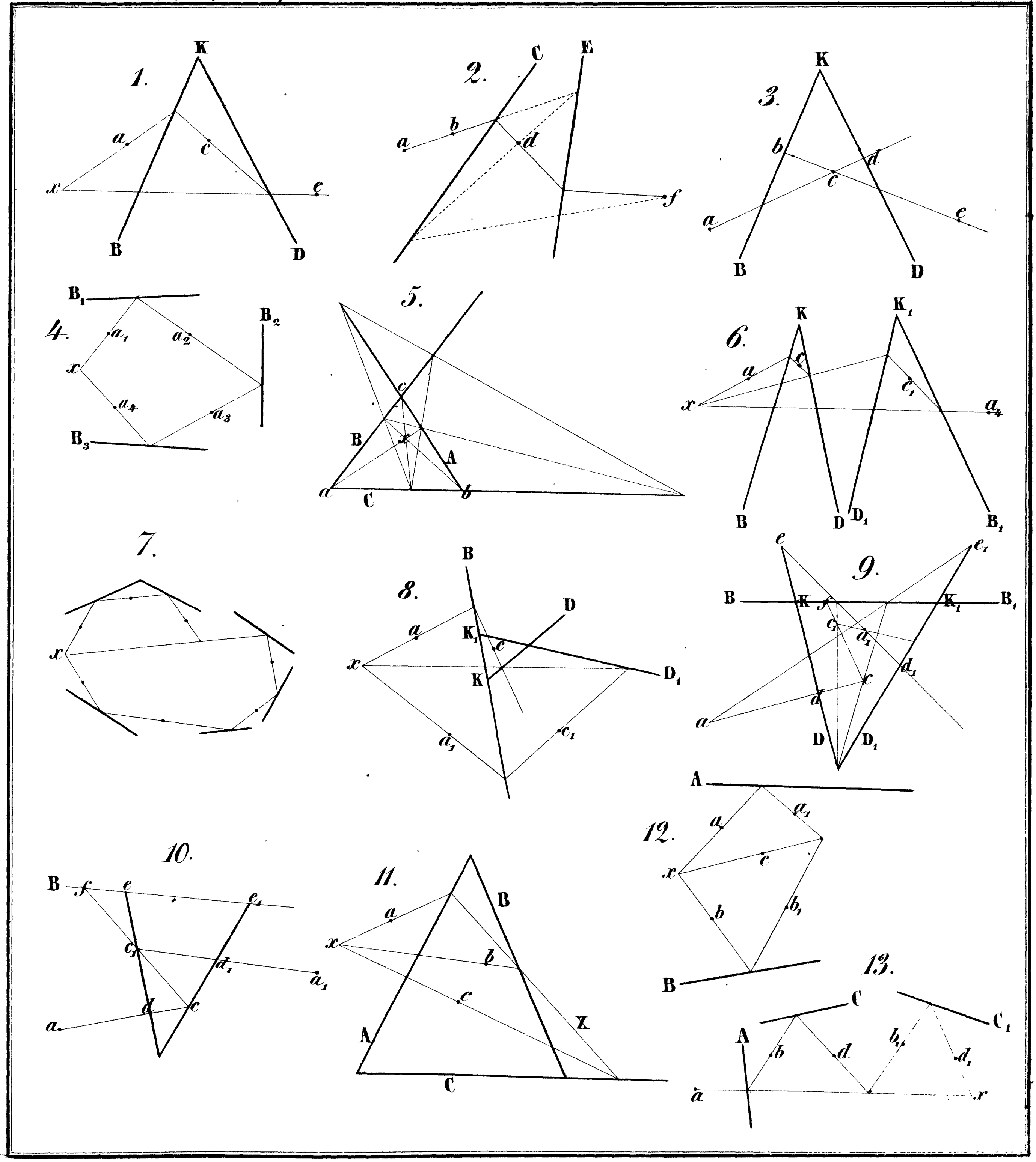
gehören 4 Gerade zu, die durch den Durchschnitt der Geraden BC' und $B'C$ gehen, und die der Reihe nach die Puncte 1 und 3, 2 und 4, 7 und 11, 8 und 12 verbinden. Ebenso lassen sich zwei Systeme von 4 Sechsecken bilden, deren zugehörige Geraden die Durchschnitte von BB' und CC', BC und $B'C'$ enthalten; folglich schneiden sich 12 Gerade k zu 4 in 3 Puncten.

Ein Fünfeck im Kegelschnitte kann als ein Sechseck angesehen werden, in welchem die eine Seite unendlich klein ist; zwei solche Fünfecke sind z. B.

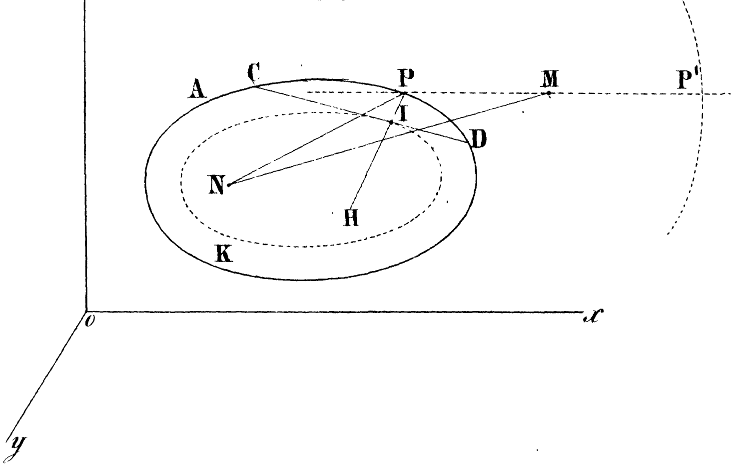
$$\frac{A,\,B,\,C'}{A',\,B',\,B},\quad \frac{A,\,B,\,B'}{A',\,C',\,B},$$

und im ersten liegen nach einem bekannten Satze die Durchschnitte von AB' und $A'B$, AB und $A'C'$, $B'C'$ und BB in einer Geraden, wo BB die Tangente des Kegelschnitts im Puncte B darstellt. Die beiden Geraden dieser beiden Fünfecke verbinden die Puncte 1 und 6, 2 und 5, und schneiden sich im Durchschnitt von $B'C'$ und BB. Ebenso schneiden sich zwei Gerade k im Durchschnitt von BC' und zwei im Durchschnitt von CC' mit der Tangente durch B. Dieselben Folgerungen ergeben sich für die Tangenten durch die Puncte B', C und C'; wodurch der Satz bewiesen ist.

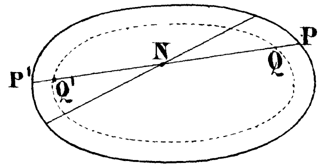
Breslau, den 6. Juli 1845.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.

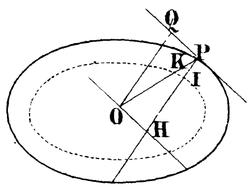
1.

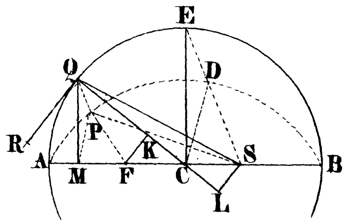


2.



3.





Crelle Journal d. Math. Bd. XXXI. Heft. 2

Fac-simile einer Handschrift von Condorcet

L'Europe voit aujourd'hui un spectacle nouveau dans l'histoire du monde, deux rois occupés de fonder sur les seuls principes de la justice naturelle une constitution vraiment libre, et renfermant en elle même les germes de son perfectionnement, aucun sacrifice d'autorité ou de prerogative ne leur a couté des qu'il leur a paru utile a des vues si grandes et si genereuses. On a vu souvent des Rois elus prodiguer tous les artifices de la politique, tous les moyens de l'ambition pour assurer à leur famille un sceptre independant de la volonté publique Il etait reservé à votre majesté d'en montrer un, occupé d'établir l'heredité pour le seul interet du peuple, et donnant l'exemple du desinteressement le plus pur dans ce qui avait été avant lui le dernier terme de l'ambition humaine.

Je supplie votre majesté d'agréer l'hommage de la reconnaissance que je dois a toutes les marques d'interet et de bonté dont elle m'a comblé.

Je suis avec le plus profond respect,

Sire

de votre majesté,

le tres humble et très obeissant
serviteur. Condorcet