Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Einleitung.

Die nachfolgende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlieh mit den Nullstellen solcher ganzer Funktionen, die durch bestimmte Integrale von der Form

$$(1) \qquad \int_0^1 f(t) \cos zt\, dt = U(z),$$

$$(2) \qquad \int_0^1 f(t) \sin zt\, dt = V(z)$$

dargestellt werden. Die Bezeichnungen $U(z)$ und $V(z)$ für die beiden Funktionen (1) und (2) will ich im folgenden ständig beibehalten. Ich nehme der Einfachheit halber die obere Grenze der Integrale gleich 1 an, aber die Resultate übertragen sich selbstverständlich auf den Fall einer beliebigen endlichen oberen Grenze. Der Fall der unendlichen oberen Grenze, der mit Hinsicht auf die Riemannsche ξ-Funktion besonders interessant wäre, scheint hingegen den darzulegenden Methoden nicht ohne weiteres zugänglich zu sein.

Man begegnet in der mathematischen Physik mehreren Integralen von der Form (1) und (2). Ich führe nur zwei sehr bekannte Beispiele an:

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\, n!} = J_0(z),$$

$$(4) \qquad \int_0^1 t \sin zt\, dt = \frac{\sin z - z \cos z}{z^2} = \frac{\cos z}{z^2} (\operatorname{tg} z - z).$$

Die Nullstellen dieser beiden letzteren Funktionen sind ziemlich genau bekannt: Sie sind alle reell und einfach und auf eine sehr regelmäßige Weise verteilt. Von den Nullstellen der Funktion (3) befindet sich je eine im Innern der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, 6\pi\right), \ldots$$

und wenn man zu diesen positiven Nullstellen die spiegelbildlichen negativen hinzunimmt, erhält man sämtliche Nullstellen von (3). Ähnlicherweise sind die positiven Nullstellen von (4) in die Intervalle

$$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(3\pi, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

eingeschlossen. Ich werde im folgenden diese gemeinsamen Eigenschaften der Nullstellen auf gemeinsame Eigenschaften der angegebenen Integralausdrücke der beiden Funktionen zurückführen, auf so einfache und augenfällige Eigenschaften, daß man sie durch bloßen Anblick der angeschriebenen Formeln feststellen kann. Ich werde nämlich zeigen, daß *die Funktionen $U(z)$ und $V(z)$ nur reelle Nullstellen haben, unter der einzigen Bedingung, daß $f(t)$ positiv und nicht abnehmend ist.* Ich werde ferner zeigen, *daß die fraglichen Nullstellen sicher einfach sind, wenn $f(t)$ stetig anwächst.* Die regelmäßige Verteilung, die wir an den Nullstellen von (3) wahrgenommen haben, kommt den Nullstellen aller solchen Funktionen $U(z)$ zu, deren zugehöriges $f(t)$ nicht nur stetig anwächst, sondern auch konvex ist, und ähnlich läßt sich die analoge Beobachtung über (4) auf eine ganze Klasse von Funktionen übertragen, zu denen auch die Funktion

$$J_1(z) = -J_0'(z) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\,\overline{n+1}!} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t \sin zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

gehört. — Es scheint mir merkwürdig zu sein, daß derartig einfache Bedingungen, wie die Monotonie oder Konvexität von $f(t)$, so präzise und erschöpfende Eigenschaften der Nullstellen zufolge haben.

Ich werde die Untersuchung nach zwei verschiedenen Methoden durchführen, die, wenn auch ihre Ergebnisse sich teilweise decken, den Gegenstand von ganz anderen Seiten her zu betrachten lehren. Die erste Methode beruht auf einer Kombination einfachster und geläufigster algebraischer Sätze. Sie ist in den Paragraphen 1 bis 3 dargelegt. Die zweite Methode ging aus von einem Satze, den Herr Hurwitz schon vor längerer Zeit gefunden hatte und der, mit gütiger Erlaubnis des hochverehrten Herrn Verfassers, in dieser Arbeit zuerst mitgeteilt wird (vgl. § 5 und § 6). Der Paragraph 4 enthält einen längeren Exkurs und der letzte § 7 ist einer ergänzenden Untersuchung gewidmet, die die Dichtigkeit der Nullstellen analoger Funktionen betrifft und in den Bereich der Hadamardschen Theorie fällt.

Damit der Leser durch die hie und da notgedrungen minutiöse Darstellung nicht über die Einfachheit der Sache getäuscht wird, will ich die Hauptschlüsse der ersten Methode schon hier in kurzen Worten mitteilen. Herr Kakeya hat unlängst[1]) den höchst einfachen, aber wie es scheint recht nützlichen Satz gefunden, daß alle Nullstellen eines Polynoms, dessen Koeffizienten positiv und wachsend sind, den absoluten Betrag kleiner als 1 haben. Ist zum Beispiel $f(t)$ eine monoton wachsende positive Funktion, so liegen alle Wurzeln der Gleichung

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)z+f\left(\frac{2}{n}\right)z^2+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}=0$$

im Innern des Einheitskreises. Daraus schließt man, durch eine geläufige Überlegung, daß alle Wurzeln der Gleichung

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)\cos z+f\left(\frac{2}{n}\right)\cos 2z+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cos(n-1)z=0$$

reell sind (vgl. § 2). Durch einen Grenzübergang folgt hieraus, daß alle Nullstellen der ganzen Funktion

$$\int_0^1 f(t)\,e^{zt}\,dt=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right)e^{\frac{z\nu}{n}}$$

in der linken Halbebene und die von

$$\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\nu-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\cos\frac{z\nu}{n}$$

auf der reellen Achse liegen. Meine weiter unten folgende Darstellung unterscheidet sich von diesem Gedankengange nur darin, daß ich den Kakeyaschen Satz nicht durch einen Grenzübergang, sondern durch eine sinngemäße Nachbildung der präziseren Behandlung, die Herr Hurwitz diesem Satze zuteil werden ließ, auf das „kontinuierlich Unendliche" übertrage. Bei diesem etwas mühsameren Verfahren erhält man genauere Resultate.

§ 1.

Analogon des Kakeyaschen Satzes.

Ich will im Verlauf des vorliegenden Paragraphen über die im Intervalle $0 < t < 1$ definierte Funktion $f(t)$ folgende Voraussetzungen machen:

---

[1]) S. Kakeya, On the Limits of the Roots of an Algebraic Equation with Positive Coefficients, The Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 2, (1912), Nr. 3.

$f(t)$ positiv, d. h. $f(t) > 0$,
$f(t)$ nicht abnehmend, d. h. $f(t') \geqq f(t)$, wenn $t' > t$.

Darüber hinaus wird ferner angenommen, daß

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} f(t)\,dt \quad \text{existiert.}$$

Ich unterscheide zwei Fälle (diese Fallunterscheidung ist für die ganze Untersuchung von Wichtigkeit): ich sage, daß die Funktion $f(t)$ sich im Ausnahmefall befindet, wenn sie streckenweise konstant ist, nur endlich viele Sprungstellen hat und ihre sämtlichen Sprungstellen rationale echte Brüche sind. — Liegt der Ausnahmefall nicht vor, so befindet sich $f(t)$ im allgemeinen Falle.

Ich will jetzt den folgenden Satz beweisen:

Befindet sich die positive nicht abnehmende Funktion $f(t)$ im allgemeinen Falle, so liegen alle Nullstellen der ganzen Funktion

$$F(z) = \int_0^1 f(t)\,e^{zt}\,dt \tag{5}$$

im Innern der linken Halbebene, d. h. $z = x + iy$ gesetzt, im Gebiete $x < 0$. Im Ausnahmefalle liegen unendlich viele Nullstellen von $F(z)$ auf der imaginären Achse $x = 0$ und alle in der abgeschlossenen linken Halbebene $x \leqq 0$.

Ich werde den Beweis in mehreren Schritten erbringen und zuerst das Verhalten von $F(z)$ auf der imaginären Achse untersuchen.

I. Ich will den Ausdruck von $F(z)$ mit Hilfe eines Stieltjesschen Integrals umformen. Sei, der Einfachheit halber, τ eine Stetigkeitsstelle von $f(t)$, dann ist, $\lim\limits_{t=0} f(t) = f(0)$ gesetzt,

$$iyF(iy) = f(\tau)e^{iy\tau} - f(0) - \int_0^\tau e^{iyt}\,df(t) + iy\int_\tau^1 f(t)\,e^{iyt}\,dt.$$

Daraus folgt weiter

$$|iyF(iy)| \geqq f(\tau) - f(0) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right| - |y| \int_\tau^1 f(t)\,dt,$$

$$|iyF(iy)| + |y| \int_\tau^1 f(t)\,dt \geqq \int_0^\tau df(t) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right|.$$

Der Ausdruck rechts kann offenbar nicht abnehmen, wenn τ zunimmt, und das zweite Glied links hat für $\tau = 1$ den Grenzwert 0. Wir erhalten also:

$$\lim_{\tau=1} \left\{ \int_0^\tau df(t) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right| \right\} = \Omega(y) \tag{6}$$

existiert für alle y. Ist $\Omega(y) > 0$, so ist sicher $F(iy) \neq 0$.

Man hat $\Omega(0) = 0$, aber offenbar $F(0) > 0$. Da $F(iy)$ und $F(-iy)$ konjugiert komplex sind, genügt es überhaupt, nur den Fall $y > 0$ zu betrachten.

Man kann noch die linke Seite von (6) etwas anders schreiben. Denn sei φ so bestimmt, daß

$$\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t) = e^{i\varphi}\left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right|,$$

dann ist φ, bei festem y, nur eine Funktion von τ, $\varphi = \varphi(\tau)$. Ferner ist

$$(7)\quad \int_0^\tau df(t) - \left|\int_0^\tau e^{iyt}\,df(t)\right| = \int_0^\tau \bigl(1-\cos(yt-\varphi)\bigr)\,df(t) = 2\int_0^\tau \sin^2\frac{yt-\varphi}{2}\,df(t).$$

II. Hat $f(t)$ unendlich viele Sprungstellen, so ist $\Omega(y) > 0$ für $y > 0$.

In der Tat, seien t' und t'' zwei verschiedene Sprungstellen von $f(t)$, Δ' und Δ'' die dazu gehörigen Sprünge. Wählt man $\tau > t'$, $\tau > t''$, so ergibt sich

$$\Omega(y) \geqq 2\int_0^\tau \sin^2\frac{yt-\varphi}{2}\,df(t) \geqq 2\Delta'\sin^2\frac{yt'-\varphi}{2} + 2\Delta''\sin^2\frac{yt''-\varphi}{2}.$$

Ist $\Omega(y_0) = 0$, so gibt es zwei ganze Zahlen m' und m'', so daß

$$y_0 t' - \varphi = 2\pi m', \quad yt'' - \varphi = 2\pi m'',$$

und für $y_0 > 0$ folgt weiter

$$(8)\qquad |t'' - t'| = \frac{2\pi}{y_0}|m'' - m'| \geqq \frac{2\pi}{y_0}.$$

Gibt es aber unendlich viele Sprungstellen, so gibt es unter ihnen beliebig benachbarte, und die Relation (8) kann nicht für zwei beliebige Sprungstellen t' und t'' richtig sein. Damit ist II. erwiesen.

III. Ist $f(t)$ im Intervalle $a \leqq t \leqq b$ stetig, und ist $f(b) > f(a)$, so ist $\Omega(y) > 0$ für $y > 0$.

Hält man y fest, und läßt man m alle ganze Zahlen durchlaufen, so fallen in das Intervall $a < t < b$ nur endlich viele Punkte der Form

$$t = \frac{\varphi(b) + 2\pi m}{y},$$

etwa $t_1, t_2, \ldots, t_{r-1}$. Es sei

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{r-1} < t_r = b.$$

Da nach Voraussetzung

$$f(t_1) - f(t_0) + f(t_2) - f(t_1) + \ldots + f(t_r) - f(t_{r-1}) = f(b) - f(a) > 0$$

ist, gibt es ein Intervall (t_{s-1}, t_s), so daß

$$f(t_s) - f(t_{s-1}) > 0.$$

Und weiter, wegen der vorausgesetzten Stetigkeit, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$f(t_s - \varepsilon) - f(t_{s-1} + \varepsilon) > 0.$$

Aber im Intervall $t_{s-1} + \varepsilon \leqq t \leqq t_s - \varepsilon$ verschwindet $\sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}$ nicht, hat also daselbst ein bestimmtes positives Minimum, etwa μ. Alles zusammengefaßt, ist

$$\Omega(y) \geqq 2\int_0^b \sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}\, df(t) \geqq 2\int_{t_{s-1}+\varepsilon}^{t_s-\varepsilon} \sin^2 \frac{yt-\varphi}{2}\, df(t)$$
$$\geqq 2\mu\left(f(t_s - \varepsilon) - f(t_{s-1} + \varepsilon)\right) > 0,$$

w. z. b. w.

IV. Wenn $F(z)$ auf der imaginären Achse verschwindet, so liegt für $f(t)$ der Ausnahmefall vor.

Verschwindet $F(z)$ auf der imaginären Achse, so darf $f(t)$ nur endlich viele Sprungstellen haben (nach II.) und in den Stetigkeitsintervallen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sprungstellen muß $f(t)$ konstant sein (nach III.). Sind also die Sprungstellen von $f(t)$ die Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1;$$

so ist im Intervall $t_\nu < t < t_{\nu+1}$ die Funktion $f(t)$ konstant, $f(t) = c_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$, wobei

$$0 < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n. \tag{9}$$

$F(z)$ muß also die Form haben

$$zF(z) = c_0(e^{zt_1} - 1) + c_1(e^{zt_2} - e^{zt_1}) + \ldots + c_n(e^z - e^{zt_n}) \tag{10}$$
$$= c_n e^z - c_0 - (c_1 - c_0)e^{zt_1} - (c_2 - c_1)e^{zt_2} - \ldots - (c_n - c_{n-1})e^{zt_n}.$$

Daraus folgt

$$|iyF(iy)| \geqq c_n - c_0 - (c_1 - c_0) - (c_2 - c_1) - \ldots - (c_n - c_{n-1}) = 0. \tag{11}$$

In der Ungleichung (11) kann das Gleichheitszeichen dann und nur dann erreicht werden, wenn alle Größen

$$e^{iy},\quad e^{iyt_1},\quad e^{iyt_2},\ \ldots,\ e^{iyt_n}$$

positiv ausfallen. Darum ist es nötig, daß es ganze Zahlen $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, derart, daß

$$y = 2\pi q,\quad yt_1 = 2\pi p_1,\quad yt_2 = 2\pi p_2,\ \ldots,\ yt_n = 2\pi p_n.$$

Da $y > 0$, und folglich auch $q > 0$ sein muß, wird

$$t_1 = \frac{p_1}{q},\quad t_2 = \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ t_n = \frac{p_n}{q} \tag{12}$$

sein. So ist IV. und damit der wesentlichste Teil des am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satzes erwiesen.

V. In der positiven Halbebene

$$x > 0 \tag{13}$$

kann $F(z)$ nicht verschwinden.

Denn es ist

$$F(x+iy) = \int_0^1 e^{xt} f(t) e^{iyt} dt.$$

Unter der Bedingung (13) ist $e^{xt} f(t)$ zugleich mit $f(t)$ positiv und nichtabnehmend und befindet sich sicher nicht im Ausnahmefall.

Was das Vorhandensein des Ausnahmefalles eigentlich bedeutet, kann durch folgende Bemerkung aufgeklärt werden:

VI. Der Ausnahmefall für $f(t)$ tritt dann und nur dann ein, wenn es eine Konstante q gibt, so beschaffen, daß $F(q \lg u) \lg u$ eine ganze rationale Funktion von u wird.

Soll

$$F(q \lg u) \lg u = P(u) \tag{14}$$

sein, wo $P(u)$ ein Polynom bedeutet, so muß $P(1) = 0$, also

$$P(u) = (u-1) P_1(u) \tag{15}$$

sein, wo $P_1(u)$ wieder ein Polynom ist. Setzt man $q \lg u = z$, so folgt aus (5), (14) und (15):

$$z F(z) = q(e^{\frac{z}{q}} - 1) P_1(e^{\frac{z}{q}}) = z \int_0^1 f(t) e^{zt} dt.$$

Daher muß $F(z)$ für $z = \pm 2q\pi i, \ \pm 4q\pi i, \ldots$ verschwinden, also $f(t)$ sich (nach IV.) im Ausnahmefall befinden. Dies war zuerst zu zeigen.

Im Ausnahmefall ist nach (10) und (12), $u = e^{\frac{z}{q}}$ gesetzt,

$$\begin{aligned} q \lg u \, F(q \lg u) &= c_0 (u^{p_1} - 1) + c_1 (u^{p_2} - u^{p_1}) + \ldots + c_n (u^q - u^{p_n}) \\ &= (u-1)(c_0 + c_0 u + \ldots + c_0 u^{p_1 - 1} + c_1 u^{p_1} + \ldots + c_n u^{q-1}). \end{aligned} \tag{16}$$

Die fragliche Funktion ist also wirklich ein Polynom in u.

Genauer ist auf der rechten Seite von (16) der Faktor von $u-1$ ein Polynom mit nicht abnehmenden, positiven Koeffizienten. Da q eine positive ganze Zahl bedeutet, kommt die Ungleichung $\Re (q \lg u) \leqq 0$ auf $|u| \leqq 1$ hinaus. So haben wir beiläufig auch den Kakeyaschen Satz bewiesen, allerdings ohne die von Herrn Hurwitz [2]) hinzugefügte Präzisierung.

[2]) A. Hurwitz, Über einen Satz des Herrn Kakeya, The Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 4, Nr. 3. Vgl. auch Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 20.

§ 2.

Trigonometrische Polynome mit nur reellen Nullstellen.

Ich betrachte das Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \tag{17}$$

von dem ich folgende Voraussetzungen mache:

1. Alle Koeffizienten sind reell, $a_n > 0$.

2. Alle Nullstellen liegen im Innern des Einheitskreises, d. h. im Gebiete $|z| < 1$.

Beide Voraussetzungen sind z. B. dann erfüllt, wenn

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \tag{18}$$

ist, und zwar infolge des Kakeyaschen Satzes.

I. Beide trigonometrischen Polynome:

$$u(z) = a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + \dots + a_n \cos nz, \tag{19}$$

$$v(z) = \quad a_1 \sin z + a_2 \sin 2z + \dots + a_n \sin nz \tag{20}$$

haben im Intervalle $0 \leqq z < 2\pi$ genau $2n$ einfache Nullstellen.

In der Tat, bezeichnen wir mit $w_1, w_2, \dots, w_n$ die Nullstellen des Polynoms (17), mehrfache mit ihrer Vielfachheit geschrieben. Setzt man, bei reellem x,

$$e^{ix} - w_\nu = \varrho_\nu e^{i\psi_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n)$$

so wird der Winkel ψ_ν sich stetig mit x vergrößern und um 2π zunehmen, wenn x um 2π zunimmt. Daher nimmt auch der Winkel

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n$$

ständig zu mit zunehmendem x und vergrößert sich um $2n\pi$, wenn sich x um 2π vergrößert. Setzt man

$$\begin{aligned} P(e^{ix}) &= a_n(e^{ix} - w_1)(e^{ix} - w_2) \quad \dots \quad (e^{ix} - w_n) \\ &= a_n \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n e^{i(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n)} \\ &= R e^{i\Psi}, \end{aligned}$$

so ist (x noch immer reell angenommen)

$$u(x) = R \cos \Psi, \quad v(x) = R \sin \Psi. \tag{21}$$

Aus diesen Formeln (21) ist die Behauptung I ohne weiteres ersichtlich, und noch manche andere, z. B. folgende Tatsachen: Läßt man x alle reellen Werte durchlaufen, so liegt zwischen je zwei Nullstellen von $u(x)$ genau eine von $v(x)$ und zwischen je zwei Nullstellen von $v(x)$ genau eine von $u(x)$. Es ist

$$(22)\qquad u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u^2(x)\frac{d\,\mathrm{tg}\,\Psi}{dx} = R^2\frac{d\Psi}{dx} > 0$$

usw.

II. Die trigonometrischen Polynome (19) und (20) haben nur reelle Nullstellen.

Setzt man

$$e^{iz} = \zeta,$$

so ist

$$u(z) = a_0 + a_1\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} + a_2\frac{\zeta^2 + \zeta^{-2}}{2} + \dots + a_n\frac{\zeta^n + \zeta^{-n}}{2},$$

$$v(z) = \qquad a_1\frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} + a_2\frac{\zeta^2 - \zeta^{-2}}{2i} + \dots + a_n\frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{2i}.$$

und beide Gleichungen

$$u(z) = 0, \qquad v(z) = 0$$

ergeben je eine Gleichung $2n$-ten Grades für ζ. Von diesen letzteren haben wir schon $2n$ verschiedene Wurzeln unter I. gefunden. Diese müssen also alle Wurzeln sein, und folglich entsprechen alle Wurzeln reellen Werten von z, w. z. b. w.

III. Seien λ und μ reell, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Dann haben die beiden trigonometrischen Polynome

$$(23)\qquad \lambda u(z) - \mu v(z),$$

$$(24)\qquad \mu u(z) + \lambda v(z)$$

nur reelle einfache Nullstellen, die sich gegenseitig trennen.

Setzt man

$$\lambda + i\mu = \varrho e^{i\alpha},$$

so ist für reelles x, die vorangehenden Bezeichnungen beibehalten,

$$\lambda u(x) - \mu v(x) = R\varrho\cos(\Psi + \alpha), \qquad \mu u(x) + \lambda v(x) = R\varrho\sin(\Psi + \alpha),$$

und der Beweis geht so weiter wie unter I. und II.

Man kann von diesen Sätzen durch Grenzübergang noch manche andere ableiten, z. B. den folgenden Satz:

IV. Ist α reell und bestehen die Ungleichungen

$$a > 0, \qquad d > 0,$$

$$(25)\qquad 0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n,$$

so hat die Funktion

$$a_0\cos(ax + \alpha) + a_1\cos((a + d)x + \alpha) + a_2\cos((a + 2d)x + \alpha) + \dots$$
$$+ a_n\cos((a + nd)x + \alpha)$$

nur reelle Nullstellen.

Ist das Verhältnis $\frac{a}{d}$ rational, $\frac{a}{d} = \frac{p}{r}$, wo p und r ganze Zahlen sind, und ist nicht nur (25), sondern auch (18) erfüllt, so folgt IV. ohne weiteres aus dem Vorangehenden durch die Betrachtung des Polynoms

$$a_0 x^p + a_1 x^{p+r} + a_2 x^{p+2r} + \ldots + a_n x^{p+nr},$$

das alle seine Nullstellen im Innern des Einheitskreises hat. Sonst kann man IV. durch Grenzübergang ableiten, auf Grund eines heute geläufigen, zuerst von Herrn Hurwitz[3]) hervorgehobenen und bewiesenen Satzes über Folgen analytischer Funktionen.

Im nächsten Paragraphen will ich auf andere Grenzfälle eingehen.

§ 3.

Trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen.

Ich will jetzt zu meinem eigentlichen Gegenstand, zur Untersuchung der Funktionen

(1) $$U(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt \, dt,$$

(2) $$V(z) = \int_0^1 f(t) \sin zt \, dt,$$

übergehen.

Die Funktion $f(t)$ soll den in § 1 aufgezählten Bedingungen genügen, d. h. sie sei positiv, nicht abnehmend und im Intervall $(0, 1)$ (eventuell uneigentlich) integrabel. Es besteht folgender Satz:

Die Funktionen $U(z)$ und $V(z)$, oder allgemeiner, die Funktion $\lambda U(z) - \mu V(z)$, wobei λ und μ beliebige reelle Konstanten sind, haben nur reelle Nullstellen, und zwar sind alle ihre Nullstellen einfach, wenn in bezug auf $f(t)$ der (im § 1 definierte) allgemeine Fall vorliegt.

Ich setze

$$U_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{\frac{\nu}{n^2}} \cos \frac{\nu z}{n}, \qquad V_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}\right) e^{\frac{\nu}{n^2}} \sin \frac{\nu z}{n}.$$

Die Funktionen $U_n(z)$ und $V_n(z)$ haben nur reelle Nullstellen, die übrigens einfach sind und sich gegenseitig trennen, wegen der hinzugefügten Faktoren $e^{\frac{\nu}{n^2}}$ (vgl. § 2). Wie ich wohl hier nicht näher auszuführen brauche[4]),

---

[3]) A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion, Math. Annalen. Bd. 33 (1889), S. 246–266. Vgl. S. 249.

[4]) Man kann sich auch zuerst auf den Fall beschränken, wo $\lim_{t=1} f(t)$ endlich ist, und dann nochmaligen Grenzübergang vornehmen.

ist in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} U_n(z) = U(z), \qquad \lim_{n=\infty} V_n(z) = V(z).$$

Daher haben die Funktionen $U(z)$, $V(z)$, $\lambda U(z) - \mu V(z)$ sicherlich nur reelle Nullstellen.

Daß die Nullstellen im allgemeinen Falle tatsächlich einfach sind, genügt es bloß für die Funktion $V(z)$ zu zeigen.

I. Eine m-fache Nullstelle von $V(z)$ ist eine mindestens $m-1$-fache Nullstelle von $U(z)$.

Man bezeichne mit z_0 die fragliche m-fache Nullstelle von $V(z)$. In einen beliebigen Kreis, der z_0 zum Mittelpunkte hat, fallen nach dem oben zitierten Satze von Herrn Hurwitz genau m Nullstellen von $V_n(z)$, sobald nur n eine gewisse Grenze übersteigt. Die Nullstellen von $V_n(z)$ werden durch die von $U_n(z)$ getrennt. Folglich liegen in dem fraglichen Kreis mindestens $m-1$ Nullstellen von $U_n(z)$ für genügend großes n. Daher ist I. richtig.

Ich brauche nur noch folgendes zu zeigen:

II. Befindet sich $f(t)$ im allgemeinen Fall, so haben $U(z)$ und $V(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen.

Dies ist aber in der Tat richtig. Denn eine gemeinsame, notwendigerweise reelle Nullstelle von $U(z)$ und $V(z)$ würde eine rein imaginäre Nullstelle des Integrals

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt} dt \tag{5}$$

liefern. Solche gibt es aber nach § 1 nicht, wenn $f(t)$ sich im allgemeinen Falle befindet.

Man beachte, daß, wenn $f(t)$ sich im Ausnahmefalle befindet, $U(z)$ und $V(z)$ unendlich viele gemeinsame Nullstellen haben, und zwar immer auch solche, die für $V(z)$ doppelte Nullstellen sind. Dies geht aus der Formel (16) von § 1 leicht hervor. $U(z)$ hat auch im Ausnahmefalle keine mehrfachen Nullstellen. Vgl. weiter unten § 6, I.

Den eben bewiesenen Sätzen lassen sich noch manche andere hinzufügen, z. B. der folgende Satz:

III. Liegt für $f(t)$ der allgemeine Fall vor, so ist für alle reellen Werte x

$$U(x)V'(x) - U'(x)V(x) > 0.$$

Durch Grenzübergang aus der für trigonometrische Polynome gültigen Formel (22) kann nur $\geqq$ an Stelle von $>$ gefolgert werden. Würde aber ein Wert x_0 existieren, so beschaffen, daß

$$U(x_0)\,V'(x_0) - U'(x_0)\,V(x_0) = 0$$

wäre, so könnte man zwei reelle Zahlen λ, μ bestimmen, so daß $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ und

$$\lambda\, U(x_0) - \mu\, V(x_0) = 0,$$
$$\lambda\, U'(x_0) - \mu\, V'(x_0) = 0$$

wäre. Dann hätte die Funktion $\lambda\, U(x) - \mu\, V(x)$ für $x = x_0$ eine mehrfache Nullstelle. Dies ist bei allgemeinem $f(t)$ ausgeschlossen, und damit der Satz III bewiesen.

IV. Hat $f_1(t)$ die von $f(t)$ vorausgesetzten Eigenschaften, und wird

$$U_1(z) = \int_0^1 f_1(t)\cos zt\, dt, \quad V_1(z) = \int_0^1 f_1(t)\sin zt\, dt$$

gesetzt, so haben die Funktionen

$$U(z)\,U_1(z) - V(z)\,V_1(z), \qquad U(z)\,V_1(z) + V(z)\,U_1(z)$$

nur reelle Nullstellen.

Man beweist IV durch Betrachtung des Polynoms

$$\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right)z + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}\right)\left(f_1(0) + f_1\left(\frac{1}{n}\right)z + \ldots + f_1\left(\frac{n-1}{n}\right)z^{n-1}\right)$$

und anschließenden Grenzübergang.

Man sieht, wie man dieselben Überlegungen noch auf mannigfache Weisen kombinieren kann[5]. — Um die Resultate zu erläutern, kann man zu der Funktion von Typus $U(z)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n)^2},$$

d. h. zu der 0-ten Besselschen Funktion, die Funktion

$$\int_0^1 \frac{\sin zt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(3\cdot 5\cdot 7 \ldots 2n+1)^2}$$

vom Typus $V(z)$ als „Gefährten" zuordnen. Diese Funktionen haben nur reelle Nullstellen, die einfach sind und sich gegenseitig trennen usw.

---

[5] Die Sätze III und IV sind im folgenden Satz enthalten, dessen Beweis uns jetzt zu weit vom Wege ablenken würde: Die positiven Nullstellen von $U(z)$ seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, die von $V(z)$ etwa $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ Dann sind die Partialbruchentwicklungen

$$-\frac{V(z)}{U(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\,V(\alpha_n)\,z}{U'(\alpha_n)\,(z^2-\alpha_n^2)}, \qquad \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{U(0)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,U(\beta_n)\,z}{V'(\beta_n)\,(z^2-\beta_n^2)}$$

durchgehends gültig und haben nur positive Residuen. Dabei ist, der Einfachheit halber, vorausgesetzt, daß $f(t)$ sich im allgemeinen Falle befindet.

§ 4.

Nachträge und Beispiele zu § 1.

Es ist häufig bequem, einen Teil der Ergebnisse des § 1 so zu formulieren:

I. *Die Funktion $f(t)$ sei für $a < t < b$ stetig, positiv (d. h. > 0) und, abgesehen ev. von endlich vielen Punkten, differenzierbar. Ist für $a < t < b$*

$$\alpha \leqq -\frac{f'(t)}{f(t)} \leqq \beta, \tag{26}$$

so kann das Integral

$$\int_a^b f(t) e^{zt}\, dt \tag{27}$$

nur für solche Werte z verschwinden, die im offenen Streifen

$$\alpha < x < \beta \tag{28}$$

liegen ($z = x + iy$), abgesehen von dem einzigen Ausnahmefall

$$f(t) = e^{ct+d}. \qquad (c \text{ und } d \text{ konstant}) \tag{29}$$

D. h. der einzige Ausnahmefall stellt sich dann ein, wenn der Streifen (28) sich auf eine vertikale Gerade reduziert. Wie man leicht nachrechnet, liegen in diesem Ausnahmefall alle Nullstellen auf der betreffenden Geraden, oder diese Gerade ist die Konvergenzgrenze für das Integral (27).

Sind a und b beide endlich, so kann man sich auf die Betrachtung von $a = 0$, $b = 1$ beschränken, wie die Formel

$$\int_a^b f(t) e^{zt}\, dt = (b-a)\, e^{az} \int_0^1 f(a + (b-a)t)\, e^{(b-a)zt}\, dt$$

zeigt. Lineare ganze reelle Transformationen von z und t fügen nichts Neues dem ausgesprochenen Satze hinzu.

Nun ist,

$$F(z) = \int_0^1 f(t) e^{zt}\, dt$$

gesetzt,

$$F(\beta + z) = \int_0^1 f(t) e^{\beta t} e^{zt}\, dt,$$

$$F(\alpha - z) = \int_0^1 f(t) e^{\alpha t} e^{-zt}\, dt = e^{\alpha - z} \int_0^1 f(1-t)\, e^{-\alpha t} e^{zt}\, dt.$$

Die eine oder die andere dieser Formeln kann versagen, wenn α oder β unendlich ist. Dann ist aber auch der betreffende Teil des Satzes nichtssagend. Nach Voraussetzung (26) ist

$$\frac{d}{dt} f(t) e^{\beta t} = f(t) e^{\beta t} \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + \beta\right) \geqq 0,$$

$$\frac{d}{dt} f(1-t) e^{-\alpha t} = -f(1-t) e^{-\alpha t} \left(\frac{f'(1-t)}{f(1-t)} + \alpha\right) \geqq 0,$$

und zwar nicht identisch gleich 0, wenn der Fall (29) ausgeschlossen ist. Dies vorausgesetzt, sind also beide positive Funktionen

$$f(t) e^{\beta t}, \qquad f(1-t) e^{-\alpha t}$$

nicht abnehmend und nicht konstant. Damit ist aber auch die einzig mögliche Art ausgeschlossen, auf die sich der anfangs definierte Ausnahmefall für stetige Funktionen einstellen kann. Die Nullstellen von $F(\beta + z)$ und $F(\alpha - z)$ haben also negativen reellen Teil, w. z. b. w.

Ist a oder b unendlich, so ergibt sich der Satz durch die Überlegungen in § 1, I und § 1, III, wie ich das hier nicht ins einzelne ausführen will. Wenn man sich mit $\leqq$ an Stelle von $<$ zufrieden gibt, folgt er auch durch Grenzübergang aus dem schon bewiesenen Teil. Anwendbar ist er selbstverständlich nur im Innern des Konvergenzgebietes des Integrals (27).

Als Beispiel diene die ganze Funktion

$$\int_1^\infty u^{z-1} e^{-u} du = \int_0^\infty e^{zt - e^t} dt,$$

die man hie und da in Zusammenhang mit der Γ-Funktion zu betrachten pflegt. Man hat in diesem Falle

$$\frac{d}{dt}\left(-\lg f(t)\right) = e^t,$$

also ist $\alpha = 1$ und $\beta = \infty$. Daher liegen alle Nullstellen in der Halbebene $x > 1$.

Man kann zeigen, daß die obere Grenze der Realteile der Nullstellen wirklich $+\infty$ ist. Der Maximalbetrag der Funktion auf dem Kreise $|z| = r$ ist nach der Stirlingschen Formel $\sim \sqrt{2\pi}\, e^{(r-\frac{1}{2})\lg r - r}$. Daraus schließt man nach den Elementen der Hadamardschen Theorie, daß es unendlich viele Nullstellen gibt (oder genauer, daß der Konvergenzexponent der Nullstellen gleich 1 ist und daß die Summe der reziproken Nullstellen absolut divergiert). Man hat

$$\int_1^\infty u^{z-1} e^{-u} du = -\frac{1}{ez} - \frac{1}{ez(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)} \int_1^\infty u^{z+1} e^{-u} du,$$

und daher ist in jedem vertikalen Streifen $1 \leqq x \leqq a$, gleichmäßig in x,

$$\lim_{y=\infty} (x+iy) \int_1^\infty u^{(x+iy)-1} e^{-u} du = -\frac{1}{e}.$$

Folglich gibt es in einem solchen Streifen von endlicher Dicke $a-1$ nur endlich viele Nullstellen. So gibt es beliebig weit nach rechts gelegene Nullstellen, w. z. b. w.

II. Man bezeichne mit γ die obere Grenze von $\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|$. Dann liegen die Nullstellen des Integrals

$$U(z)=\int_0^a f(t)\cos zt\,dt,$$

$z=x+iy$ gesetzt, im offenen Streifen $-\gamma<y<+\gamma$.

Ein Ausnahmefall stellt sich ein für

$$\int_0^a c\cos zt\,dt=c\frac{\sin az}{z},$$

wo $\gamma=0$ und kein offener Streifen vorhanden ist.

Wird $f(t)$ als eine gerade Funktion aufgefaßt, $f(-t)=f(t)$, so ist

$$U(iz)=\tfrac{1}{2}\int_{-a}^{+a} f(t)\,e^{zt}\,dt,$$

und II kommt auf I zurück.

Z. B. liegen alle Nullstellen der Funktion

$$\int_0^a e^{-t}\cos zt\,dt=\frac{e^{-a}(z\sin az-\cos az)+1}{z^2+1} \tag{30}$$

$$=\frac{i}{2}\left\{\frac{e^{a(-1-iz)}-1}{z-i}-\frac{e^{a(-1+iz)}-1}{z+i}\right\}$$

im horizontalen Streifen

$$-1<y<+1. \tag{31}$$

Ich will zeigen, daß die Ungleichung (31) nicht verbessert werden kann, wenn man a frei variieren läßt.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, daß die Funktion (30) nur endlich viele imaginäre Nullstellen hat. Sie ist für großes z (a wird fest gedacht) $\sim\frac{e^{-a}\sin az}{z}$, also stimmen ihre Nullstellen asymptotisch mit denjenigen von $\sin az$ überein; sie sind, abgesehen von endlich vielen, einfach und reell, letzteres aus Symmetriegründen[6]). Die Anzahl der imaginären Nullstellen wächst aber mit a ins Unendliche. Man betrachte

[6]) Die durch (1) gegebene Funktion $U(z)$ hat nur endlich viele imaginäre Nullstellen, wenn $f(t)$ reell, $f(1)\gtrless 0$, $f'(t)$ existiert und gewisse einfache Regularitätsbedingungen erfüllt. Auf die rechte Seite von (30) ist auch die bei Hurwitz, Über die Wurzeln einiger transzendenter Gleichungen, Mitteilungen d. Mathem. Gesellschaft in Hamburg, II (1890), S. 25—31, dargelegte Methode anwendbar.

nämlich die Punkte $z = i + \frac{2n\pi}{a}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ und man schlage um jeden einen Kreis vom Radius $\frac{1}{a}$. Auf der Peripherie dieser Kreise ist

$$(32) \qquad z = i + \frac{2n\pi}{a} - \frac{i\zeta}{a}$$

$$\zeta = e^{i\varphi} \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Auf den Kreislinien (32) wird die Funktion (30) gleich

$$\frac{ia}{2}\left\{\frac{e^{-\zeta}-1}{2n\pi - i\zeta} - \frac{e^{\zeta-2a}-1}{2n\pi - i\zeta + 2ai}\right\} = \frac{ia}{2}\{\Phi(\zeta) - \varphi(\zeta)\}.$$

Die Funktion $\Phi(\zeta)$ verschwindet für $\zeta = 0$, also als Funktion von z im Mittelpunkte des Kreises (32). Auf der Peripherie ist aber

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\Phi(\zeta)} = \frac{2n\pi - i\zeta}{2n\pi + 2ai - i\zeta} \cdot \frac{e^{\zeta-2a}-1}{e^{-\zeta}-1}.$$

Bezeichnet man mit M das Maximum von $\frac{1}{|e^{-\zeta}-1|}$ auf dem Kreisrand (32), so ist von einem gewissen a an sicher

$$(33) \qquad \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}\right| < \frac{2n\pi+1}{\sqrt{4n^2\pi^2+4a^2}-1}(\mathsf{M}+1).$$

Es gibt mit wachsendem a immer mehr ganze Zahlen n, für welche die rechte Seite der Ungleichung (33), und folglich auch die linke < 1 wird. Also gibt es, wenn a wächst, immer mehr Kreise (32), in deren Innern die Funktion (30) sicher verschwindet. Die Anzahl der imaginären Nullstellen der Funktion (30) wächst also mit a über alle Grenzen und gewisse dieser Nullstellen schmiegen sich immer enger den beiden Geraden $y = \pm 1$ an.

Übrigens kann die Funktion (30) in irgendeinem festen, endlichen, abgeschlossenen Bereiche, das ganz im Streifen (31) liegt, keine Nullstellen haben, wenn a genügend groß ist. Man hat nämlich in diesem Streifen

$$\lim_{a=\infty} \int_0^a e^{-t} \cos zt\, dt = \frac{1}{z^2+1},$$

und die Grenzfunktion hat überhaupt keine Nullstellen. Dies Zusammendrängen der Nullstellen an der Konvergenzgrenze steht im Einklang mit gewissen neueren Untersuchungen über Folgen analytischer Funktionen [7]).

[7]) Vgl. E. Lindwart und G. Pólya, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matematico, Palermo, Bd. 37 (1914), S. 297–304; R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, Acta Mathematica, Bd. 41, S. 219–251.

§ 5.

Über einen Satz von Hurwitz.

Herr Hurwitz machte mich, als ich ihm meine bisher dargelegten Untersuchungen mitteilte, auf einen verwandten Satz aufmerksam, den er vor Jahren fand und der so lautet:

Die im Intervalle $-1 < t < +1$ *definierte Funktion* $f(t)$ *sei gerade,* $f(-t) = f(t)$. *Ihre Fourier-Koeffizienten seien alternierend, d. h.*

$$f(t) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \pi t + a_2 \cos 2\pi t + a_3 \cos 3\pi t + \ldots \tag{34}$$

gesetzt, sei

$$a_0 > 0, \quad a_1 < 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0, \ldots \tag{35}$$

Dann hat die ganze Funktion $U(z) = \int\limits_0^1 f(t) \cos zt\, dt$ *nur reelle einfache Nullstellen, die so verteilt sind, daß jedes der Intervalle*

$$\ldots (-2\pi, -\pi), \quad (-\pi, 0), \quad (0, \pi), \quad (\pi, 2\pi), \ldots \tag{36}$$

genau eine Nullstelle enthält, und zwar im Innern.

Dieser Satz scheint auf den ersten Blick in einer andern Richtung zu liegen als die bisher behandelten Fragen. Sein Beweis eröffnet aber, wie wir bald sehen werden, einen neuen Weg, auf dem die Ergebnisse von § 3 teilweise neu bewiesen und sehr verfeinert werden können. Diesen Beweis will ich im vorliegenden Paragraphen darlegen mit einigen leichten, aber für den vorliegenden Zweck nicht belanglosen Erweiterungen.

Nur eine Bemerkung sei vorausgeschickt. Daß die Funktion $U(z)$ unendlich viele reelle Nullstellen hat, ist in der Voraussetzung des Satzes sozusagen unmittelbar enthalten, denn die „Äquivalenz" (34) bedeutet nur das Bestehen der Gleichungen

$$a_n = \int\limits_{-1}^{+1} f(t) \cos n\pi t\, dt = 2\,U(n\pi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Voraussetzung (35) besagt also eigentlich, daß

$$U(0) > 0, \quad U(\pi) < 0, \quad U(2\pi) > 0, \quad U(3\pi) < 0, \ldots \tag{37}$$

Daher ist evident, daß sich in jedem der Intervalle (36) mindestens eine Nullstelle von $U(z)$ befindet. Der springende Punkt ist zu zeigen, daß die so erhaltenen Nullstellen überhaupt alle Nullstellen von $U(z)$ ausmachen.

Der Beweis von Herrn Hurwitz stützt sich auf die Partialbruchentwicklung

$$\frac{U(z)}{\sin z} = \frac{U(0)}{z} - U(\pi)\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + U(2\pi)\left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \ldots \tag{38}$$

Ich will diese Entwicklung unter der Voraussetzung beweisen, daß die (Riemannschen, eventuell uneigentlichen) Integrale

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \qquad \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

existieren.

I. Zu gegebenem $\eta > 0$ kann man eine Konstante $M = M(\eta)$ finden, derart, daß für solche z, die allen Ungleichungen

(39) $$|z - n\pi| \geqq \eta. \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

genügen,

(40) $$\left|\frac{U(z)}{\sin z}\right| \leqq M.$$

Mit anderen Worten: Schneidet man aus der komplexen Ebene unendlich viele Kreise aus, die alle mit demselben Radius η um die Nullstellen von $\sin z$ herum beschrieben sind, so ist in der übrigbleibenden durchlöcherten Ebene die Funktion $\frac{U(z)}{\sin z}$ beschränkt.

In der Halbebene $y \geqq 1$ ist

$$|\sin(x+iy)| = \left|\frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}\right| \geqq \tfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y}),$$

$$|U(x+iy)| = \left|\tfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,(e^{(ix-y)t} + e^{(-ix+y)t})\,dt\right| < e^{y}\int_0^1 |f(t)|\,dt,$$

$$\left|\frac{U(x+iy)}{\sin(x+iy)}\right| \leqq \frac{2\int_0^1 |f(t)|\,dt}{1-e^{-2y}} \leqq \frac{2\int_0^1 |f(t)|\,dt}{1-e^{-2}},$$

also beschränkt. Ähnlich in der Halbebene $y \leqq -1$.

In dem übrigbleibenden durchlöcherten Streifen ist $\frac{1}{\sin z}$ regulär und periodisch, also sicher beschränkt. Und sogar im vollen Streifen $-1 \leqq y \leqq +1$ ist

$$|U(x+iy)| \leqq e\int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Damit ist der Beweis von I. erbracht.

II. Die Reihe

$$\frac{U(0)}{z} - U(\pi)\left(\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z+\pi}\right) + U(2\pi)\left(\frac{1}{z-2\pi} + \frac{1}{z+2\pi}\right) - \cdots$$

konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen abgeschlossenen Bereich, der die Punkte $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ nicht enthält.

Die Folge $U(0), U(\pi), U(2\pi), \ldots$ ist beschränkt, nach einer Bemerkung am Ende von I. So kommt man auf die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

deren absolute und gleichmäßige Konvergenz genügend bekannt ist.

III. Die in der ganzen Ebene analytische Funktion

$$\varphi(z) = \frac{U(z)}{\sin z} - \left\{ \frac{U(0)}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 2\, U(\nu\pi) z}{z^2 - \nu^2\pi^2} \right\}$$

ist eine Konstante.

Man bezeichne mit C_n die Kreislinie $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Wenn z innerhalb C_n liegt, was von einem gewissen n an sicher der Fall ist, so besteht

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{U(w)}{\sin w} \frac{dw}{w-z} = \frac{U(z)}{\sin z} + \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{U(\nu\pi)}{\cos \nu\pi\, (\nu\pi - z)},$$

das Integral in positivem Umlaufssinn erstreckt. Anders ausgedrückt, ist

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{U(w)}{\sin w} \frac{dw}{w-z} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu 2\, U(\nu\pi) z}{z^2 - \nu^2\pi^2}. \tag{41}$$

Auf sämtlichen Kreisen C_n besteht nach I. eine Ungleichung (40). Daher ist

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{U(w)}{\sin w} \frac{dw}{w-z} \right| \leqq \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi (n+\frac{1}{2})\pi}{(n+\frac{1}{2})\pi - |z|},$$

woraus man auf Grund von II. leicht schließt, daß in der ganzen Ebene

$$|\varphi(z)| \leqq M.$$

Die Funktion $\varphi(z)$ ist also eine Konstante, und zwar die Null, da sie ungerade ist, $\varphi(-z) = -\varphi(z)$. Damit ist die Partialbruchentwicklung (38) bewiesen.

Das eben Bewiesene kann auch durch die Formel

$$\frac{U(z)}{\sin z} = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{(-1)^\nu U(\nu\pi)}{z - \nu\pi} \tag{42}$$

ausgedrückt werden. Die rationale Funktion, die unter dem Limes-Zeichen an der rechten Seite von (42) steht, kann für höchstens $2n$ verschiedene Werte von z verschwinden und variiert von $+\infty$ bis $-\infty$, wenn z die reelle Achse entlang von $\nu\pi$ bis $(\nu+1)\pi$ wandert, $\nu = -n, \ldots -2, -1, 0, 1, \ldots n-1$. Daher liegt je eine ihrer Nullstellen in diesen Intervallen $(\nu\pi,\ (\nu+1)\pi)$, und sie hat außer diesen $2n$ einfachen Nullstellen keine anderen. Überträgt man diese Verhältnisse durch Grenzübergang auf die Funktion $\frac{U(z)}{\sin z}$, so erhält man den vorausgeschickten Satz von Herrn

Hurwitz. Daß sich die Nullstellen während des Grenzübergangs auf die Endpunkte eines Intervalls $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$ heranschieben, ist durch die Voraussetzung (37) a priori ausgeschlossen.

Verschiedene Erweiterungen des eben dargelegten Hurwitzschen Gedankenganges liegen auf der Hand. Der Partialbruchentwicklung (38) lassen sich mehrere ähnliche zur Seite stellen, z. B. die folgenden (man beachte, daß $U(z)$ gerade und $V(z)$ ungerade ist):

$$(43)\quad \frac{U(z)}{z\cos z}=\frac{U(0)}{z}-\frac{U\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{U\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}}\left(\frac{1}{z-\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{z+\frac{3\pi}{2}}\right)-\ldots,$$

$$(44)\quad \frac{V(z)}{z\sin z}=\frac{V'(0)}{z}-\frac{V(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}\right)+\frac{V(2\pi)}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}\right)-\ldots,$$

die sich besonders nützlich erweisen werden und ebenso oder noch etwas kürzer bewiesen werden können als (38). Man kann ferner mit denselben Hilfsmitteln, d. h. durch Beachtung der Vorzeichenänderungen der Funktion zwischen zwei konsekutiven Polen und durch Abzählung der Nullstellen noch manche andere Sätze über die Nullstellen rationaler Funktionen aufstellen, die geeignet sind, auf gewisse meromorphe Funktionen durch Grenzübergang übertragen zu werden. Ich will hier einen einfachen Fall durchdiskutieren, der uns später nützlich sein wird.

IV. Es sei

$$0<a_1<a_2<a_3<\ldots<a_n,$$
$$A_1>0,\quad A_2>0,\quad A_3>0,\ \ldots,\ A_n>0$$

und B reell. Die rationale Funktion

$$(45)\quad \frac{A_n}{z+a_n}+\ldots+\frac{A_2}{z+a_2}+\frac{A_1}{z+a_1}+\frac{B}{z}+\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{z-a_n}$$

hat eine und nur eine Nullstelle in jedem der Intervalle

$$(-a_n, -a_{n-1}),\ldots,(-a_3,-a_2),\ (-a_2,-a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{n-1},a_n),$$

wie auch B beschaffen sein mag. Außer diesen $2n-2$ kann es noch zwei Nullstellen geben, die entgegengesetzt gleich sind und sich folgendermaßen nach B richten:

1. $$B>0.$$

Beide Nullstellen sind reell, die positive liegt im Intervalle $(0, a_1)$.

2. $$-2(A_1+A_2+\ldots+A_n)<B<0.$$

Beide Nullstellen sind rein imaginär.

3. $$B<-2(A_1+A_2+\ldots+A_n).$$

Beide Nullstellen reell, die positive liegt im Intervalle $(a_n, +\infty)$.

Zum Beweise ist es am einfachsten, (45) mit z zu multiplizieren und dann als Funktion von z^2 zu betrachten. Man erhält IV., indem man die Vorzeichenänderungen beim Einsetzen von $z^2 = -\infty,\ 0,\ a_1^2 - 0,\ a_1^2 + 0,\ a_2^2 - 0,\ a_2^2 + 0, \ldots, a_n^2 - 0,\ a_n^2 + 0,\ +\infty$ beachtet. Der Fall 1) ist uns kürzlich auf der rechten Seite von (42) begegnet.

Die Entscheidung darüber, ob der Fall 2) oder ob der Fall 3) vorliegt, wird in einigen nachfolgenden Anwendungen nicht eben bequem sein. Achten wir aber nur auf die Nullstellen der Grenzfunktion, so kann uns folgende einfache Bemerkung aus der Verlegenheit helfen:

V. Die Funktion $U(z)$ hat keine rein imaginäre Nullstelle, wenn alle Glieder der Folge

$$(46)\qquad \int_0^1 f(t)\,dt,\quad \int_0^1 f(t)\,t^2\,dt,\quad \int_0^1 f(t)\,t^4\,dt,\ \ldots$$

gleiches Vorzeichen haben, und sie hat genau zwei rein imaginäre Nullstellen, wenn die Folge (46) einen Vorzeichenwechsel aufweist.

Die erste Behauptung leuchtet aus der Formel

$$(47)\qquad U(iy) = \int_0^1 f(t)\cos iyt\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n!}\int_0^1 f(t)\,t^{2n}\,dt$$

ohne weiteres ein. Hat aber die Folge (46) einen Zeichenwechsel, so lehrt dieselbe Formel (47), daß $U(0)$ und $U(i\infty)$ entgegengesetztes Zeichen haben und es mindestens zwei rein imaginäre Nullstellen gibt. Daß es nicht mehr gibt, ist eine Folge der von Laguerre[8]) verallgemeinerten Descartesschen Zeichenregel. (Dieser letzte Teil ist für unsern Zweck nicht so wesentlich.) Man kann in bezug auf $V(z)$ analoge Betrachtungen anstellen. Insbesondere gilt: ist $f(t)$ positiv, so hat keine der beiden Funktionen $U(z)$ und $V(z)$ rein imaginäre Nullstellen.

§ 6.

Die Trennung der Nullstellen.

Ich werde in diesem Paragraphen die Nullstellen der Funktionen

$$(1)\qquad U(z) = \int_0^1 f(t)\cos zt\,dt,$$

$$(2)\qquad V(z) = \int_0^1 f(t)\sin zt\,dt$$

separieren, d. h. ich werde Intervalle angeben, in denen eine und nur eine Nullstelle liegt. Da $U(z)$ gerade und $V(z)$ ungerade ist, genügt es in

[8]) Laguerre, Œuvres, Bd. I, S. 3–5.

beiden Fällen, nur die Lage der positiven Nullstellen festzustellen. Über die Funktion $f(t)$ werde ich verschiedene Voraussetzungen machen, aber bis zur Erwähnung des Gegenteils sollen die folgenden festgehalten werden:

$f(t)$ ist für $0 < t < 1$ definiert und das Integral $\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert.

I. Es sei $f(t) > 0$ und nicht abnehmend. Dann hat $U(z)$ nur reelle einfache Nullstellen. Das Intervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ enthält keine Nullstelle und jedes der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right), \ldots$$

genau eine, und zwar im Innern.

Man hat

$$U(0) = \int_0^1 f(t)\,dt > 0.$$

Ferner ist für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^1 f(t) \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt = \int_0^{\frac{1}{4n+1}} f(t) \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\frac{4\nu-3}{4n+1}}^{\frac{4\nu+1}{4n+1}} f(t) \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt \geqq \int_0^{\frac{1}{4n+1}} f(t) \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt > 0,$$

$$\int_0^1 f(t) \cos(4n+3)\frac{\pi}{2} t \cdot dt = \left(\int_0^{\frac{2}{4n+3}} + \int_{\frac{2}{4n+3}}^{\frac{3}{4n+3}} + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\frac{4\nu-1}{4n+3}}^{\frac{4\nu+3}{4n+3}}\right) f(t) \cos(4n+3)\frac{\pi}{2} t \cdot dt$$

$$\leqq \int_{\frac{2}{4n+3}}^{\frac{3}{4n+3}} f(t) \cos(4n+3)\frac{\pi}{2} t \cdot dt < 0.$$

D. h. es ist

$$(48) \quad U(0) > 0, \quad U\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \quad U\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \quad U\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0, \quad U\left(\frac{7\pi}{2}\right) < 0, \ldots$$

In der Partialbruchentwicklung

$$(43) \quad \frac{U(z)}{z \cos z} = \frac{U(0)}{z} - \frac{U\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{\pi}{2}}\right) + \frac{U\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1}{z - \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{z + \frac{3\pi}{2}}\right) - \cdots$$

ist also das Residuum im Pole $z = 0$ positiv, in allen übrigen Polen negativ. Die bei einem beliebigen n abgebrochene Partialbruchentwicklung ist also, abgesehen von einem unwesentlichen Faktor -1, vom Typus (45), und der Satz § 5, IV. wird anwendbar, wobei es nur unentschieden bleibt, ob wir uns im Falle 2) oder 3) befinden. Die reellen Nullstellen von $U(z)$ sind also auf alle Fälle so verteilt, wie angegeben wurde; es bleibt (vom Standpunkte des § 5) vorderhand nur noch unentschieden, ob $U(z)$ noch ein paar rein imaginäre Nullstellen hat oder nicht. Der Satz § 5, V. entscheidet aber dafür, daß $U(z)$ nur reelle Nullstellen hat[9]).

II. Es sei $f(t)>0$ und nicht abnehmend. Wenn $f(t)$ nicht dem Ausnahmefall (im Sinne von § 1) angehört, so hat $V(z)$ nur reelle einfache Nullstellen. Das Intervall $(0, \pi)$ enthält nur die Nullstelle $z=0$, und jedes der Intervalle

$$(\pi, 2\pi), \quad (2\pi, 3\pi), \quad (3\pi, 4\pi), \ldots$$

enthält genau eine Nullstelle, und zwar im Innern.

Es ist zuerst

$$V(\pi)=\int_0^1 f(t)\sin \pi t\cdot dt>0,$$

ersichtlicherweise. Ferner ist

$$V(2\pi)=\int_0^1 f(t)\sin 2\pi t\cdot dt=\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi t\,(f(t)-f(1-t))\,dt.$$

Die Funktion $-f(t)+f(1-t)$ ist definiert und nicht zunehmend für $0<t\leqq\frac{1}{2}$ und verschwindet für $t=\frac{1}{2}$. Da $f(t)$ keine Konstante ist, so muß

$$\lim_{t=0}(f(t)-f(1-t))<0$$

sein. Daraus leuchtet dann

$$V(2\pi)<0$$

(nicht $=0$) ein. Nun sieht man, daß allgemein für $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}V((2n+1)\pi)&=\int_0^{\frac{1}{2n+1}} f(t)\sin(2n+1)\pi t\cdot dt+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\frac{2\nu-1}{2n+1}}^{\frac{2\nu+1}{2n+1}} f(t)\sin(2n+1)\pi t\cdot dt\\ &\geqq\int_0^{\frac{1}{2n+1}} f(t)\sin(2n+1)\pi t\cdot dt>0\end{aligned}$$

---

[9]) Definiert man $f(t)$ durch $f(-t)=f(t)$, $f(t+2)=-f(t)$ für alle reellen nicht ganzzahligen Werte von t, so ist

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty} 2\,U\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\cos\frac{2n+1}{2}\pi t,$$

$$U(0)=\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,2\,U\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\frac{2n+1}{2}\pi}.$$

Letztere Formel zeigt, daß die annähernden rationalen Funktionen sich im Falle 3) des § 5, IV. befinden. — Man könnte dieselbe Formel auch durch Residuenrechnung finden.

und

$$V(2n\pi)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^{\frac{1}{2n}}\sin 2\pi n t\left\{f\left(\frac{\nu-1}{n}+t\right)-f\left(\frac{\nu}{n}-t\right)\right\}dt<0$$

ist. Denn $V(2n\pi)$ könnte nur dann gleich 0 sein, wenn die Funktion $f(t)$ in jedem Intervall von der Form $\frac{\nu-1}{n}<t<\frac{\nu}{n}$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ konstant wäre, also dem Ausnahmefall angehörte.

Zusammenfassend ist

$$(49)\qquad V(\pi)>0,\quad V(2\pi)<0,\quad V(3\pi)>0,\quad V(4\pi)<0,\ \ldots$$

Nimmt man noch

$$V'(0)=\int_0^1 t f(t)dt>0$$

hinzu, so sieht man, daß die Partialbruchentwicklung

$$(44)\quad \frac{V(z)}{z\sin z}=\frac{V'(0)}{z}-\frac{V(\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{z-\pi}+\frac{1}{z+\pi}\right)+\frac{V(2\pi)}{2\pi}\left(\frac{1}{z-2\pi}+\frac{1}{z+2\pi}\right)-\ldots$$

im Pole $z=0$ ein positives Residuum, in den übrigen Polen $z=\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi,\ldots$ negative Residua hat. Satz II ergibt sich, wie I, aus § 5, IV. und § 5, V.[10]).

III. Es sei $f(t)$ wachsend, nirgends konkav und

$$\lim_{t=0} f(t)=0.$$

Dann hat $V(z)$ in jedem der Intervalle

$$(50)\qquad \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right),\quad \left(2\pi,\frac{5\pi}{2}\right),\quad \left(3\pi,\frac{7\pi}{2}\right),\quad \left(4\pi,\frac{9\pi}{2}\right),\ldots$$

eine einfache Nullstelle, und zwar im Innern, außerhalb derselben keine positive Nullstelle und überhaupt keine imaginäre Nullstelle.

In III. werden sowohl die Voraussetzungen wie die Behauptungen von II. vermehrt. Daß $f(t)$ (von unten gesehen) nirgends konkav ist, bedeutet das Bestehen der Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}\{f(t)+f(t')\}\geqq f\{\tfrac{1}{2}(t+t')\}$$

für beliebige t, t'. Es folgt[11]), daß $f(t)$ für $0<t<1$ eine bestimmte

[10]) Man kann mit Benutzung Fourierscher Reihen oder Cauchyschen Integralsatzes die Beziehung

$$V'(0)=\frac{2V(\pi)}{\pi}-\frac{2V(2\pi)}{2\pi}+\frac{2V(3\pi)}{3\pi}-\ldots$$

beweisen, wodurch direkt gezeigt wird, daß die annähernden rationalen Funktionen sich im Falle 3) des § 5, IV. befinden.

[11]) Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica, Bd. 30 (1906), S. 175–193. Vgl. S. 190.

rechte Derivierte hat, die ich kurz mit $f'(t)$ bezeichne, und daß $f'(t)$ eine nicht abnehmende Funktion ist. Die Voraussetzung, daß $f(t)$ wachsend sei, übersetzt sich daher in die Ungleichung

$$f'(t) > 0.$$

Man beachte, daß aus der ständigen Voraussetzung der Existenz des Integrals $\int_0^1 f(t)\,dt$

$$\lim_{t=1} (1-t) f(t) = 0$$

folgt, da $f(t)$ beständig zunimmt. Nun ergibt sich durch partielle Integration

$$V\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 f(t) \sin (2n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f'(t) \cos (2n+1)\frac{\pi}{2} t \cdot dt.$$

Die Funktion $f'(t)$ unterliegt denselben Bedingungen wie $f(t)$ in I. Daher wird

$$V\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0, \quad V\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0, \quad V\left(\frac{7\pi}{2}\right) < 0, \quad V\left(\frac{9\pi}{2}\right) > 0, \ldots .$$

Diese Ungleichungen zusammen mit denen unter (49) ergeben die Ergänzung, die III. dem Satz II hinzufügt.

Satz III ergibt die bekannte Verteilung der Nullstellen der Funktionen

$$\int_0^1 t \sin zt\,dt = -\frac{\cos z}{z} + \frac{\sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z^2}(\operatorname{tg} z - z),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t \sin zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}}{n!\; n+1!} = J_1(z).$$

Die Nullstellen der ersteren nähern sich asymptotisch dem rechten Ende, die der letzteren der Mitte der Intervalle (50).

IV. Es sei $f(t)$ wachsend, nirgends konkav, und seine rechte Derivierte $f'(t)$ gehöre nicht dem Ausnahmefalle des § 1 an. Dann sind die positiven Nullstellen von $U(z)$ in dem Innern der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right), \ldots$$

enthalten, und zwar liegt in jedem Intervall genau eine einfache Nullstelle.

Man erhält durch partielle Integration

$$U(n\pi) = \int_0^1 f(t) \cos n\pi t \cdot dt = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(t) \sin n\pi t \cdot dt. \tag{51}$$

Da $f'(t)$ denselben Bedingungen genügt, wie $f(t)$ unter II., so erhält man nun

$$(52) \qquad U(\pi) < 0, \quad U(2\pi) > 0, \quad U(3\pi) < 0, \quad U(4\pi) > 0, \ldots .$$

Diese Ungleichungen zusammen mit denen unter (48) setzen uns in Stand, den Satz I zu IV zu ergänzen.

Satz IV. kann auf die Besselsche Funktion

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\, n!} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

angewandt werden[12]).

V. Es sei $f(t)$ positiv, abnehmend, nirgends konvex; wird mit $f'(t)$ die rechte Derivierte von $f(t)$ bezeichnet, so gehöre $-f'(t)$ dem allgemeinen Fall vom § 1 an. Dann hat $U(z)$ nur reelle Nullstellen, von denen jedes Intervall

$$(\pi,\ 2\pi), \qquad (2\pi,\ 3\pi), \qquad (3\pi,\ 4\pi), \ldots$$

je eine und zwar im Innern enthält, während für $-\pi \leqq z \leqq +\pi$ die Funktion $U(z) > 0$ ist.

Satz V behandelt einen Typus von Funktionen, über den der § 3 nichts aussagt. Der Beweis ist ähnlich wie in den vorangehenden Fällen: durch partielle Integration wird für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$U(n\pi) = \int_0^1 f(t) \cos n\pi t\, dt = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \left(-f'(t)\right) \sin n\pi t\, dt,$$

also nach den Entwicklungen unter II.

$$U(\pi) > 0, \quad U(2\pi) < 0, \quad U(3\pi) > 0, \quad U(4\pi) < 0, \ldots .$$

Selbstverständlich ist $U(0) > 0$; jetzt schließt man aus der Hurwitzschen Partialbruchentwicklung (38), aus § 5, IV. und § 5, V., wie unter I. und II.

Um zu zeigen, wie viele Möglichkeiten es noch gibt, die vorangehenden Überlegungen mit andern zu kombinieren, gebe ich noch folgenden Satz:

VI. Es sei $f(t)$ zunehmend, konvex, und $f(\alpha) = 0$ $(0 < \alpha < 1)$. Die Funktion $U(z)$ hat dann keine oder zwei imaginäre Nullstellen, je nachdem

$$(53) \qquad \int_0^1 f(t)\, dt \gtrless 0.$$

---

[12]) Für diese Verteilung der Nullstellen der Besselschen Funktion hat auch Herr Hurwitz einen Beweis gegeben, der ebenfalls auf seinem Prinzip des Grenzübergangs vom Algebraischen aus beruht. Vgl. l. c. [6]).

Die Ungleichungen (52) folgen ebenso, wie unter IV. aus der durch partielle Integration gewonnenen Formel (51). Wendet man die Partialbruchzerlegung (38) an, so ergibt sich aus § 5, IV., daß nur die beiden in VI. genannten Möglichkeiten für die Nullstellen von $U(z)$ vorliegen können. Um diese auseinanderzuhalten, denke man sich ν von 0 bis $+\infty$ stetig variierend. Dann wächst die Funktion von ν

$$\frac{1}{\alpha^\nu}\int_0^1 f(t)\,t^\nu\,dt = -\int_0^\alpha |f(t)|\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\nu dt + \int_\alpha^1 |f(t)|\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\nu dt$$

beständig und strebt offenbar gegen $+\infty$. Die in § 5, V. betrachtete Folge (46) zeigt also keinen oder einen Zeichenwechsel, nach dem ersten oder zweiten Fall der Alternative (53). Somit ist VI. bewiesen.

Z. B. hat die transzendente Gleichung

$$J_0(z) - c\,\frac{\sin z}{z} = \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} - c\right)\cos zt\cdot dt = 0$$

keine imaginären Nullstellen, wenn $c < 1$, und genau zwei, wenn $c > 1$.

Endlich will ich noch einen sehr einfachen Fall betrachten, wo das Integrationsintervall unendlich ist.

VII. Es sei $f(t) > 0$ und beständig abnehmend. Dann kann das Integral

$$\int_0^\infty f(t)\sin zt\,dt$$

für keinen positiven Wert von z verschwinden. Ist $f(t)$ zugleich konvex, so kann das Integral

$$\int_0^\infty f(t)\cos zt\,dt$$

für keinen reellen Wert von z verschwinden.

Man hat

$$\int_0^\infty f(t)\sin zt\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{z}} \sin zt\left\{f(t) - f\left(t+\frac{\pi}{z}\right) + f\left(t+\frac{2\pi}{z}\right) - f\left(t+\frac{3\pi}{z}\right) + \ldots\right\}dt > 0,$$

$$z\int_0^\infty f(t)\cos zt\,dt = \int_0^\infty \left(-f'(t)\right)\sin zt\,dt.$$

Man könnte leicht, wie in vorangehenden Fällen, genau die sehr enge Funktionenklasse bestimmen, die den Ausnahmefall von VII. bildet.

Als Beispiel zu verschiedenen Sätzen dieses Paragraphen betrachte ich die ganze Funktion von z

$$1 - \frac{z^2}{(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{z^4}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)} - \cdots$$
$$= (\alpha+1)\int_0^1 (1-t)^\alpha \cos zt\,dt$$

und ich will die Veränderungen ihrer Nullstellen verfolgen, wenn der reelle Parameter α von $+\infty$ bis -1 abnimmt. Man hat, von einem positiven Faktor abgesehen,

$$f(t) = (1-t)^\alpha > 0, \quad f'(t) = -\alpha(1-t)^{\alpha-1}, \quad f''(t) = \alpha(\alpha-1)(1-t)^{\alpha-2}.$$

1. $\alpha > 1$. Demnach $f'(t) < 0$, $f''(t) > 0$.

Keine reellen Nullstellen nach den Schlüssen in VII.

2. $\alpha = 1$.

Die Funktion $2\frac{1-\cos z}{z^2}$ hat nur reelle doppelte Nullstellen. Die positiven sind $z = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$.

3. $0 < \alpha < 1$. Demnach $f'(t) < 0$, $f''(t) < 0$.

In Anwendung von V., nur reelle einfache Nullstellen, je eine positive im Innern der Intervalle $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, ...

4. $\alpha = 0$.

Die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ hat nur reelle einfache Nullstellen, $z = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$.

5. $-1 < \alpha < 0$. Demnach $f'(t) > 0$, $f''(t) > 0$.

In Anwendung von IV., nur reelle einfache Nullstellen, je eine positive im Innern der Intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{\pi}, 2\pi\right)$, ...

6. $\alpha = -1$. (Nur die Reihendarstellung gültig.)

Die Funktion $\cos z$ hat nur reelle einfache Nullstellen in $z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$.

Beachtet man den Weg der kleinsten positiven Nullstelle bei variierendem α, so sieht man, daß die Sätze IV und V möglichst enge Grenzen angeben. Von I., II., III. kann man dasselbe durch ebenso einfache Beispiele zeigen.

§ 7.

Bestimmung des Konvergenzexponenten.

Es sei $f(t)$ *im Intervalle* $0 < t < 1$ *definiert. Ich setze die Existenz der (Riemannschen, ev. uneigentlichen) Integrale*

$$\int_0^1 f(t)\,dt, \qquad \int_0^1 |f(t)|\,dt > 0$$

voraus. Die von 0 verschiedenen Nullstellen der ganzen Funktion

$$F(z) = \int_0^1 f(t)\,e^{zt}\,dt \tag{5}$$

seien, mehrfache mit ihrer Vielfachheit angeschrieben, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *bezeichnet. Es ist*

$$\frac{1}{|\alpha_1|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|\alpha_2|^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{|\alpha_3|^{1+\varepsilon}} + \cdots \tag{54}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ *konvergent, und*

$$\frac{1}{|\alpha_1|} + \frac{1}{|\alpha_2|} + \frac{1}{|\alpha_3|} + \cdots \tag{55}$$

divergent.

In diesem Satze ist die Voraussetzung der Endlichkeit des Intervalls wesentlich, wie das Beispiel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, e^{zt}\,dt = \sqrt{2\pi}\, e^{+\frac{z^2}{2}}$$

zeigt. — Von $f(t)$ ist nicht vorausgesetzt, daß es nur reelle Werte annimmt.

Es ist

$$|F(z)| \leqq e^{|z|} \int_0^1 |f(t)|\,dt. \tag{56}$$

Aus dieser Ungleichung folgt schon bekanntlich die Konvergenz der Reihe (54).

Der Ungleichung (56) zufolge ist $F(z)$ auf alle Fälle eine Funktion vom Geschlecht 0 oder 1. Wäre die Reihe (55) konvergent, so würde $F(z)$ die Form

$$F(z) = e^{cz}\, g(z) \tag{57}$$

haben, wo c eine Konstante und

$$g(z) = C z^r \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right)\cdots \tag{58}$$

eine Funktion vom Geschlecht 0 ist, die alle Nullstellen von $F(z)$ mit richtiger Vielfachheit ebenfalls zu Nullstellen hat. Als ganze Funktion vom Geschlecht 0, hätte $g(z)$ bekanntlich die Eigenschaft, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R = R(\varepsilon)$ auf die Weise anzugeben ist, daß für $|z| > R$ die Ungleichung

$$|g(z)| < e^{\varepsilon |z|}$$

besteht. Daher definierte nach einem wichtigen Satze des Herrn Wigert[13]) die für $|x| < |e^{-c}|$ konvergente Potenzreihe

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= g(0) + g(1)e^{c}x + g(2)e^{2c}x^2 + g(3)e^{3c}x^3 + \dots \\ &= F(0) + F(1)x + F(2)x^2 + F(3)x^3 + \dots,\end{aligned}$$

eine Funktion, die in der ganzen x-Ebene eindeutig und, ausgenommen im Punkte $x = e^{-c}$, überall regulär wäre.

Diese letzte Folge der Voraussetzung (57) ist aber sicher unrichtig. Denn nach (5) kann

$$(59) \qquad \begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^1 f(t)\,(1 + x e^{t} + x^2 e^{2t} + x^3 e^{3t} + \dots)\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{1 - x e^{t}} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{f(-\lg u)\,du}{u - x}\end{aligned}$$

gesetzt werden. Man schließt zuerst, daß die Darstellung (59) im Kreise $e|x| < 1$ und dann, nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung, daß sie überall gültig ist, ausgenommen höchstens die Punkte der Strecke $\frac{1}{e} < x < 1$ auf der positiven reellen Achse. Nun kann man aber sicher an dieser Strecke einen von e^{-c} verschiedenen Punkt γ finden, derart, daß $t = -\lg \gamma$ ein Stetigkeitspunkt der Funktion $f(t)$ und

$$f(-\lg \gamma) \neq 0$$

wird. Es ist aber bekanntlich, wenn η durch positive Werte gegen 0 strebt,

$$\lim_{\eta = 0} \left(\Phi(\gamma + i\eta) - \Phi(\gamma - i\eta)\right) = 2\pi i f(-\lg \gamma) \neq 0,$$

also entweder ist die Funktion $\Phi(x)$ mehrdeutig, oder sie ist im Punkte $x = \gamma \neq e^{-c}$ singulär. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn man die Voraussetzung (57) fallen läßt und damit die Divergenz der Reihe (55) zugibt, w. z. b. w.

---

[13]) Vgl. S. Wigert, Sur les fonctions entières, Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar (1900), S. 1001–1011. Vgl. auch G. Faber, Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen, Mathem. Annalen, Bd. 57 (1903), S. 369–388, oder auch das Lehrbuch von G. Vivanti, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen (deutsch von A. Gutzmer), Leipzig (1906), S. 452 ff.

Durch den bewiesenen Satz haben wir zugleich Aufklärung über die Nullstellen der ganzen Funktionen von der Form $\lambda U(z) - \mu V(z)$ gewonnen. Denn setzt man

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + i\mu}{2} f(t) & \text{für} \quad t > 0, \\ \frac{\lambda - i\mu}{2} f(-t) & \text{für} \quad t < 0, \end{cases}$$

so ist

$$\int_0^1 f(t)(\lambda \cos zt - \mu \sin zt)\,dt = \int_{-1}^{+1} h(t) e^{zt}\,dt.$$

Daß die Funktionen $\lambda U(z) - \mu V(z)$ unendlich viele Nullstellen mit dem Konvergenzexponenten 1 haben, und daß die Summe der reziproken Nullstellen nicht absolut konvergieren kann, war schon aus § 3 und § 6 in vielen Fällen ersichtlich[14]).

Ich will noch eine kleine Bemerkung über die benutzte Methode machen. Daß aus der Ungleichung (56) und aus der Annahme der Konvergenz der Reihe (55) die Gleichung (57) folgt — wobei

$$(58) \qquad g(z) = C z^r \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right)\cdots$$

eine Funktion vom Geschlecht 0 bedeutete —, wird in der Hadamardschen Theorie durch eine Reihe von Schlüssen hergeleitet, deren wichtigster auf folgendem Satze beruht: zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es Kreise $|x| = r_1$, $|x| = r_2$, ... mit unendlich wachsenden Radien $(\lim_{n=\infty} r_n = \infty)$, auf deren Peripherie die Ungleichung

$$(60) \qquad |g(z)| > e^{-\varepsilon|z|}$$

besteht. Ich will zeigen, daß dieser Satz auch als Folgerung des zitierten Wigertschen Satzes aufgefaßt werden kann. In der Tat, man betrachte neben der Funktion (58) die Funktion

$$G(z) = |C| z^r \left(1 - \frac{z}{|\alpha_1|}\right)\left(1 - \frac{z}{|\alpha_2|}\right)\left(1 - \frac{z}{|\alpha_3|}\right)\cdots,$$

die ebenfalls vom Geschlecht 0 ist und nur reelle positive Nullstellen hat. Die Funktionen $g(z)$ und $G(z)$ sind durch die Ungleichungen

$$(61) \qquad |G(|z|)| \leqq |g(z)| \leqq (-1)^r G(-|z|)$$

verbunden. Nach dem Wigertschen Satze hat die Potenzreihe

[14]) Hat $\lambda U(z) - \mu V(z)$ nur reelle Nullstellen, so ist es ein Grenzwert von Polynomen mit nur reellen Nullstellen. Vgl. G. Pólya und I. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Journal für Mathematik, Bd. 144, (1914), S. 89—113. Durch die Methoden dieser Arbeit lassen sich manche Einzelheiten in § 3 und § 6 von einer neuen Seite auffassen.

$$G(0) + G(1)z + G(2)z^2 + \dots$$

nur den Punkt $z = 1$, diesen aber ganz gewiß zum singulären Punkte. Darum muß

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|G(n)|} = 1$$

sein. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele ganze Zahlen n, so daß

$$|G(n)| > e^{-\varepsilon n}$$

gilt. Vergleicht man dies mit der linken Seite von (61), so findet man, daß die Ungleichung (60) auf unendlich vielen Kreisen (sogar mit ganzzahligen Radien) erfüllt ist, w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. April 1918.)