

akter hat wie bei einem homogenen Strahle. Diese Punkte werden definirt durch den Gangunterschied

$$x - x' = \frac{2n+1}{2r \pm 1} r \lambda.$$

Die gesuchte allgemeine Formel für die Lichtstärke als die Function des Gangunterschiedes ist gefunden in (13).

Eine einfache Untersuchung der GröÙse $\frac{\partial F}{\partial \delta}$ zeigt nun, daß mit Vernachlässigung äußerst kleiner GröÙsen Maximum und Minimum der Lichtstärken auch jetzt in den sub I und II betrachteten Punkten liegen werden, in welchen wir

$$F_1 = 4 A^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2r}$$

$$F_2 = 4 A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2r}$$

gefunden haben. Bei $n = \frac{r}{2}$ wird $F_1 = F_2$, die Interferenzstreifen verschwinden total.

St. Petersburg den $\frac{4}{16}$ Dec. 1875.

VIII. Ueber die Tiefe der Bilder bei optischen Apparaten; von Dr. Hugo Krüfs in Hamburg.

(Vom Verfasser aus der Zeitschrift des Akademischen Vereins der Polytechniker zu Hannover¹⁾ mitgetheilt.)

Vor Kurzem veröffentlichte ich unter dem obigen Titel eine Arbeit über ein Thema der Dioptrik, welchem bisher noch wenig Beachtung geschenkt wurde. In einem Aufsätze „Das Prüfen und Wählen der Photographen-Objective“ von Dr. Adolph Steinheil²⁾ findet sich eine Discussion dieses Gegenstandes, soweit derselbe in dem vorliegenden Falle in Betracht kam; die mathematischen

1) Helwing'sche Hofbuchhandlung, Hannover.

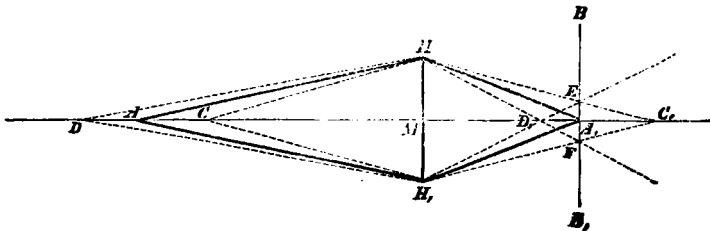
2) Photographische Correspondenz No. 57, März 1869, S. 59.

Entwicklungen, an welche sich die Schlussfolgerungen knüpfen, sind jedoch, als für den Zweck nicht erforderlich, an jener Stelle fortgelassen. Die Tabelle, aus deren Daten Steinheil die Gesetze über die Abhängigkeit der Tiefe von den Elementen eines optischen Systems ableitet, ist aber wohl nach ähnlichen Formeln berechnet wie die folgenden.

Man sagt, ein Apparat liefert tiefe Bilder, wenn er von ungleich weit entfernten Objecten in derselben Ebene gleichzeitig deutliche Bilder zu erzeugen vermag. Es ist klar, daß eine Tiefe der Bilder unmöglich ist, wenn absolut scharfe Bilder verlangt werden. Diese Forderung wird aber nie gestellt, es genügt, wenn die Bilder so deutlich sind, daß ihre Undeutlichkeit von einem normalen Auge nicht mehr erkannt wird.

Es sey nun in Fig. 1 das brechende System, gleichviel welcher Art dasselbe sey, mag es aus einer einzigen Linse bestehen, mag es ein achromatisches Objectiv oder mag es vielfach zusammengesetzt seyn, wie ein photographischer Apparat, nur dargestellt durch die gerade

Fig. 1.



Linie HH_1 , welche man sich als Durchschnitt einer Hauptpunktsebene mit der Ebene der Zeichnung vorstellen kann. Die Oeffnung des Systems sey dargestellt durch die Länge der Linie HH_1 , und die auf der Mitte derselben senkrecht stehende Gerade AA_1 sey die optische Axe des Systems. Das Bild des Axenpunktes A liege in A_1 , d. h. alle Strahlen (AH bis AH_1), welche von A aus auf das System fallen, sollen sich in A_1 wieder vereinigen; es wird also ein vollkommen fehlerfreier optischer Apparat

vorausgesetzt. Die Bilder aller Punkte der Axe, welche näher oder weiter entfernt liegen als A , werden nun nicht in die durch den Bildpunkt A_1 zur Axe senkrecht gelegte Ebene BB_1 fallen können, sie werden weiter oder näher zur Linse liegen als A_1 . Durch die Unfähigkeit des Auges, einen kleinen Kreis von einem Punkte zu unterscheiden, oder vielmehr durch seine Fähigkeit, einen Kreis von bestimmtem kleinen Durchmesser noch als Punkt zu sehen, ist es aber möglich, daß das betrachtende Auge die Bilder der Punkte C und D , welche eigentlich in C_1 und D_1 liegen, in der Ebene des Bildes A_1 ebenso deutlich eingestellt sieht wie A_1 selbst. Es ist hierzu nur erforderlich, daß die von C resp. von D kommenden Strahlen, welche sich nach der Brechung in C_1 resp. in D_1 wieder vereinigen, in der Ebene BB_1 Zerstreuungskreise bilden, deren Durchmesser so klein ist, daß sie vom einstellenden Auge als Punkte wahrgenommen werden.

Nimmt man an, daß EF gleich dem Maximum (d) dieses Durchmessers seyn soll, so findet man daraus leicht die demselben entsprechenden Bildpunkte C_1 und D_1 und die zugehörigen Objectpunkte C und D . Es ist dann die Strecke CD die Tiefe (T) des Apparates, wenn A streng eingestellt ist, wobei man AC die Tiefe in die Nähe (t_n) und AD die Tiefe in die Ferne (t_f) nennen kann.

Es sey die Brennweite des Systems $= p$, die Oeffnung $HH_1 = o$, die Objectabstände $AM = a$ und $CM = a'$, die Bildabstände $MA_1 = a_1$ und $MC_1 = a'_1$. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1} = \frac{1}{p} \\ 2) \quad \frac{1}{a'} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{p} \\ 3) \quad \frac{a'_1 - a_1}{d} = \frac{a'_1}{o} \end{array} \right.$$

Die ersten beiden Gleichungen stellen die allgemein bekannte Beziehung dar zwischen der Brennweite des Systems und zwei conjugirten Vereinigungsweiten; die dritte

Gleichung ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke HC_1H_1 und EC_1F .

Aus diesen drei Gleichungen findet sich die Tiefe in die Nähe, d. i. die Differenz $a - a'$ mit Leichtigkeit:

$$t_n = \frac{ad(a-p)}{op + d(a-p)}.$$

Auf die analoge Weise ergibt sich die Tiefe in die Ferne:

$$t_f = \frac{ad(a-p)}{op - d(a-p)}$$

und die Gesamttiefe des Apparates:

$$T = \frac{2aopd(a-p)}{o^2p^2 - d^2(a-p)^2}.$$

Aus der Betrachtung dieser Formel gehen alle Gesetze über den Zusammenhang der Tiefe und der Elemente des Systems hervor, welche Steinheil aus seinen Beispielen ableitet. Vernachlässigt man die Gröfse $d^2(a-p)^2$, welche im Verhältniß zu den übrigen immer sehr klein ist, so erlangt man die einfachere Formel

$$T = \frac{2a(a-p)d}{op}.$$

Hieraus folgt, daß die *Tiefe der Bilder* eines Apparates *proportional* ist der Gröfse d , d. i. dem Maximaldurchmesser des noch als Punkt wahrgenommenen Zerstreuungskreises. Ferner ist sie *proportional dem Producte* $a(a-p)$ oder dem Producte aus der Entfernung des Objectes und der Differenz dieser Entfernung und der Brennweite. Ist a sehr groß im Vergleich zu p , so kann man die Tiefe als proportional dem Quadrate der Entfernung des Objectes annehmen. Endlich ist die Tiefe bei gleichem Objectabstand *umgekehrt proportional der wirksamen Oeffnung des Systems* und *nahezu umgekehrt proportional der Brennweite* desselben.

Hier scheine ich in directem Widerspruch mit Steinheil zu stehen, denn Steinheil sagt¹⁾: „Hieraus folgt, daß die Tiefe der Bilder von der Helligkeit und vom

1) l. c. S. 64.

Größenverhältniß zwischen Object und Bild, *aber nicht von der Brennweite des Objectives abhängig ist*“. Diese Bemerkung Steinheil's gründet sich jedoch auf der Voraussetzung, daß die Helligkeit und das Größenverhältniß zwischen Object und Bild nicht geändert werde, denn die Beispiele, aus deren Vergleich er seinen Schluß ableitet, beziehen sich auf verschiedene Brennweiten des Systems bei derselben Helligkeit und derselben Vergrößerung. In demselben Verhältniß, in welchem nun die Brennweiten in den verschiedenen Fällen zu einander stehen, in demselben Verhältniß stehen demnach die Oeffnungen (gleiche Helligkeit) und die Objectabstände (gleiche Vergrößerung) und da die Tiefe umgekehrt proportional ist der Oeffnung und der Brennweite, aber gerade proportional dem Quadrate des Objectabstandes, so muß in den von Steinheil derartig zusammengestellten Fällen die Tiefe unverändert bleiben.

Zur Veranschaulichung der angeführten Verhältnisse möge folgende Zusammenstellung dienen, welche derjenigen Steinheil's sehr ähnlich ist.

p	o	a	d	t_n	t_f	T
100	20	1700	0,02	26,7	27,6	54,3
200	20	1700	0,02	12,4	12,9	25,3
100	10	1700	0,02	52,7	56,2	108,9
100	20	3400	0,02	108,6	119,1	227,7
100	20	1700	0,04	52,7	56,2	108,9

Die geringen Abweichungen der in dieser Tabelle enthaltenen Werthe von der oben abgeleiteten Proportionalität rühren her von der Berücksichtigung des vorher vernachlässigten Gliedes im Nenner von T . Die Tiefe in die Ferne ist immer etwas größer als die Tiefe in die Nähe, da der Nenner von t_f um $2d(a - p)$ kleiner ist als derjenige von t_n .

Bisher war ein vollkommen fehlerfreier optischer Apparat vorausgesetzt. Es ist leicht ersichtlich, daß die Tiefe der Bilder durch die Fehler des Apparates verrin-

gert wird. Wenn z. B. das Bild nicht eben ist, so wird gewöhnlich eine mittlere Einstellung zwischen der Mitte des Bildes und seinem Rande gewählt, diese Verrückung aus dem scharfen Bilde geht natürlich an der Tiefe verloren.

Ein ganz besonderes Interesse verdient die Anwendung der obigen Erörterungen auf das menschliche Auge. Hier ist die Sache jedoch etwas verwickelter, da das Auge für jede Entfernung des Objectes accommodirt; seine Wirkung entspricht demgemäß einem System von veränderlicher Brennweite p_1 , welche abhängig ist von der Entfernung a , für welche accommodirt wird. Es ist nämlich

$$p_1 = \frac{ap}{a+p}.$$

Vollzieht man noch einige aus dieser Betrachtung hervorgehende Aenderungen, so erlangt man für das auf einen Punkt in der Entfernung a accommodirende Auge die Formeln

$$t_s = \frac{a^2 d}{op + ad}$$

$$t_f = \frac{a^2 d}{op - ad}$$

$$T = \frac{2a^2 dop}{o^2 p^2 - a^2 d^2}.$$

Zum Zwecke einiger Beispiele ist es nothwendig, für die Größen d , o und p bestimmte Zahlenwerthe anzunehmen. Die hintere Brennweite p des Auges beträgt nach Helmholtz ¹⁾ 19,875^{mm}, in Listing's ²⁾ schematischem Auge ist sie zu 20,0746^{mm} angenommen. Die Oeffnung o der Pupille ist sehr veränderlich, man kann sie zum Zwecke eines Beispiels gleich $\frac{1}{6}p$ annehmen. Den Maximaldurchmesser des noch als Punkt auf der Netzhaut wahrgenommenen Zerstreuungskreises hat man übereinstimmend ge-

1) H. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, Leipzig 1867, S. 111.

2) J. B. Listing, Dioptrik des Auges in R. Wagner's Handwörterbuch der Physiologie IV, 1854, S. 451.

funden mit dem Durchmesser der Zapfen der Netzhaut und für diesen haben verschiedene Forscher Werthe von $0,0034^{\text{mm}}$ bis $0,0068^{\text{mm}}$ ermittelt. Es sey deshalb angenommen

$$p = 20^{\text{mm}}$$

$$o = 3\frac{1}{3}^{\text{mm}}$$

$$d = 0,0050.$$

Dann wird

a	t_n	t_r	T
25^{cm}	$4,61^{\text{mm}}$	$4,77^{\text{mm}}$	$9,38^{\text{mm}}$
40^{cm}	$11,68^{\text{mm}}$	$12,33^{\text{mm}}$	$24,02^{\text{mm}}$
100^{cm}	$70,26^{\text{mm}}$	$80,43^{\text{mm}}$	$150,69^{\text{mm}}$
∞			— 26,66 Meter.

Der Werth von T für $a = \infty$ hat eine etwas andere Bedeutung als diejenige, welche bisher der Tiefe beigelegt wurde. Es wird dadurch die Länge einer Strecke bezeichnet, deren Endpunkte je um $13\frac{1}{3}^{\text{mm}}$ vor oder hinter der Netzhaut liegen, d. h. Strahlen, welche aus einem Punkte kommen, der um $13\frac{1}{3}^{\text{mm}}$ vor dem Auge liegt, oder welche auf einen Punkt zielen, welcher um ebenso viel hinter demselben liegt, bilden auf der Netzhaut einen Zerstreuungskreis, der noch als Punkt erkannt wird. Es geht hieraus hervor, daß das Auge keinerlei Accommodationsanstrengungen zu machen braucht, wenn die gesehenen Gegenstände mehr als $13\frac{1}{3}^{\text{m}}$ entfernt sind; wenn man meilenweit entfernte Gebirge deutlich sieht, so bildet sich *zugleich* ein Gegenstand, welcher nur $13\frac{1}{3}^{\text{m}}$ entfernt ist (sowie alle dazwischen liegende Gegenstände), auf der Netzhaut deutlich ab.