Sur un problème de probabilités relatif aux fractions continues.

Par

Émile Borel à Paris.

Dans un récent article de ce recueil*), M. Felix Bernstein croit découvrir une contradiction entre un de ses résultats et un énoncé que j'ai donné il y a quelques années.**) Il n'y a en réalité aucune contradiction; il suffit pour s'assurer qu'il ne peut pas y en avoir, de constater l'analogie complète entre les formules p. 267. 268 (Bo) et p. 425—427 (Be); cette analogie est parfois masquée par les différences de notations. De plus, M. Bernstein fait sur l'indépendance des probabilités une remarque qui, si elle n'infirme en rien mes résultats, est néanmoins juste en elle-même. Il ne me paraît donc pas inutile de reprendre brièvement la question.

Ce qui est exact dans l'objection de M. Bernstein, c'est que le raisonnement que j'ai donné p. 248—251 (Bo) suppose les probabilités indépendantes et doit être modifié lorsqu'elles ne le sont pas. Mais cette modification du raisonnement est aisée et n'entraine aucune modification dans le résultat, c'est ce que je voudrais montrer ici, en développant complètement le raisonnement dans le cas où les probabilités ne sont pas indépendantes. On constatera que cette nouvelle démonstration ne diffère pas sensiblement de ce que deviendrait la démonstration du Mémoire cité si l'on y développait tous les calculs *sous forme entière.*

Nous considérons une infinité dénombrable d'épreuves successives, qui sont numérotées à l'aide des nombres entiers dans leur ordre naturel; la probabilité du cas favorable est désignée par p_n pour l'épreuve de rang n; la probabilité du cas défavorable est $q_n = 1 - p_n$.

---

*) Felix Bernstein, Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herrührendes Problem, Math. Ann. 71 (1911), p. 417—439. Je désignerai ce travail par Be.

**) Emile Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), p. 247—271. Je désignerai ce travail par Bo.

Nous supposons que p_n et q_n désignent les probabilités globales, lorsque l'on ignore le résultat des $n-1$ premières épreuves; lorsque l'on connaît ces résultats, la probabilité, au lieu d'être p_n, aura généralement une valeur différente, comprise cependant par hypothèse entre des limites connues p_n' et p_n'':

$$p_n' \leqq p_n \leqq p_n''.$$

Nous supposerons essentiellement tous les p_n' et tous les p_n'' différents de 0 et de 1. Nous dirons que nous sommes dans le cas de convergence si les deux séries

$$(1)' \qquad \sum p_n',$$

$$(1)'' \qquad \sum p_n''$$

sont convergentes et que nous sommes dans le cas de divergence lorsque ces deux séries sont divergentes.*) Nous allons étudier le cas de convergence**); nous désignerons par A_0 la probabilité pour que le cas favorable ne se produise jamais, par A_k la probabilité pour ce cas favorable se produise k fois et k fois seulement, par A_∞ la probabilité pour qu'il se produise une infinité de fois. Il est évident que l'on a:

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_\infty = 1.$$

Notre but est de démontrer que l'on a:

$$A_\infty = 0.$$

Il suffit donc de prouver la relation

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_k + \cdots = 1.$$

Cette série à termes positifs ayant une somme bien déterminée, il suffit évidemment de prouver qu'elle diffère de l'unité aussi peu que l'on veut. Pour cela nous remarquerons que, la série $(1)''$ étant convergente, on peut à tout nombre donné ε faire correspondre un nombre k tel que l'on ait

$$\prod_{n=k+1}^{\infty} (1 - p_n'') > 1 - \varepsilon.$$

Nous allons évaluer la somme

$$S_k = A_0 + A_1 + \cdots + A_k$$

et démontrer que cette somme est supérieure à $1 - \varepsilon$; il en résultera que la série à termes positifs, qui ne peut dépasser 1, est bien égale à 1.

*) On voit que dans le cas où les probabilités ne sont pas indépendantes, il peut arriver que la série $(1)'$ converge et que la série $(1)''$ diverge; c'est un cas nouveau que je laisse de côté aujourd'hui.

**) On verrait d'une manière analogue que les conclusions de mon mémoire subsistent dans le cas de divergence.

Calculons les divers termes de cette somme et, pour cela, précisons les notations.

La probabilité du cas favorable à la première épreuve a été désignée par p_1 et celle du cas défavorable par q_1; nous poserons, pour rendre les notations symétriques:

$$q_1 = p_0.$$

Dans le cas où la première épreuve a été favorable, nous désignerons par p_{11} la probabilité du cas favorable à la deuxième épreuve et par p_{10} la probabilité du cas défavorable; si la première épreuve a été défavorable, la probabilité du cas favorable à la deuxième épreuve sera p_{01} et la probabilité du cas défavorable sera p_{00}.

De même p_{011} désigne la probabilité du cas favorable à la troisième épreuve lorsque la première a été défavorable et la seconde favorable; et p_{0000} désigne la probabilité du cas défavorable à la quatrième épreuve lorsque les trois premières ont été défavorables, etc.

On a évidemment:

$$\begin{gathered}
p_1 p_{11} + p_0 p_{01} = p_2, \\
p_1 p_{10} + p_0 p_{00} = q_2, \\
p_1 p_{11} p_{111} + p_1 p_{10} p_{101} + p_0 p_{01} p_{011} + p_0 p_{00} p_{001} = p_3, \\
p_1 p_{11} p_{110} + p_1 p_{10} p_{100} + p_0 p_{01} p_{010} + p_0 p_{00} p_{000} = q_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

On a, de plus, d'après nos hypothèses, $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ désignant 0 ou 1,

$$\begin{gathered}
p_2' \leqq p_{\alpha 1} \leqq p_2'', \\
p_3' \leqq p_{\alpha\beta 1} \leqq p_3'', \\
p_4' \leqq p_{\alpha\beta\gamma 1} \leqq p_4'', \\
\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Les valeurs de $A_0, A_1, A_2, \cdots$ sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
A_0 &= p_0 p_{00} p_{000} \cdots, \\
A_1 &= p_1 p_{10} p_{100} p_{1000} \cdots + \cdots + p_0 p_{01} p_{010} p_{0100} \cdots + \cdots + p_0 p_{00} p_{001} p_{0010} \cdots \\
A_2 &= p_1 p_{11} p_{110} p_{1100} p_{11000} \cdots \\
&\quad + p_1 p_{10} p_{101} p_{1010} p_{10100} \cdots \\
&\quad + p_1 p_{10} p_{100} p_{1001} p_{10010} \cdots \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + p_0 p_{01} p_{011} p_{0110} p_{01100} \cdots \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + p_0 p_{00} p_{001} p_{0011} p_{00110} \cdots \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

On voit que, si l'on désigne par $\Pi_4, \Pi_4', \cdots$ des produits tels que le suivant, α, β, γ désignant 0 ou 1

$$\Pi_4 = p_{\alpha\beta\gamma 0} p_{\alpha\beta\gamma 00} p_{\alpha\beta\gamma 00} p_{\alpha\beta\gamma 000} \cdots$$

on peut écrire, tous les $p_{\alpha\beta\gamma}\cdots$ étant positifs, et par suite tous les termes des sommes $A_1, A_2, \cdots$ étant positifs:

$$\begin{aligned}
&A_0 = p_0 p_{00} p_{000} \Pi_4,\\
&A_1 > p_1 p_{10} p_{100} \Pi_4' + p_0 p_{01} p_{010} \Pi_4'' + p_0 p_{00} p_{001} \Pi_4''',\\
&A_2 > p_1 p_{11} p_{110} \Pi_4^{(4)} + p_1 p_{10} p_{101} \Pi_4^{(5)} + p_0 p_{01} p_{011} \Pi_4^{(6)},\\
&A_3 > p_1 p_{11} p_{111} \Pi_4^{(7)}.
\end{aligned}$$

Si donc on désigne par P_4 la plus petite des quantités $\Pi_4, \Pi_4', \cdots, \Pi_4^{(7)}$, on a

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 > (p_0 p_{00} p_{000} + \cdots + p_1 p_{11} p_{111}) P_4.$$

Mais on a évidemment:

$$p_0 p_{00} p_{000} + \cdots + p_1 p_{11} p_{111} = p_3 + q_3 = 1$$

et par suite, nous avons

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 > P_4.$$

On démontrerait de même la relation

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_k > P_{k+1},$$

P_{k+1} désignant le plus petit des produits Π_{k+1} (au nombre de 2^k):

$$\Pi_{k+1} = p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 0} p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 00} p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 000} \cdots,$$

les indices $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ désignant 0 ou 1.

Mais l'on a, par exemple:

$$p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 00} = 1 - p_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k 01} \geqq 1 - p_{k+2}''$$

et par suite:

$$\Pi_{k+1} > \prod_{n=k+1}^{\infty} (1 - p_n'') > 1 - \varepsilon.$$

Il en résulte successivement:

$$\begin{aligned}
&P_{k+1} > 1 - \varepsilon,\\
&A_0 + A_1 + \cdots + A_k > 1 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Considérons la fraction continue, comprise entre 0 et 1:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

et cherchons la probabilité pour que l'on ait:

$$a_n \geqq \varphi(n). \tag{2}$$

On peut se poser, à ce sujet, plusieurs problèmes.

Problème I. — Déterminer la probabilité A_0 pour que l'inégalité (2) ne soit jamais vérifiée.

Problème II. — Déterminer la probabilité A_k pour que l'inégalité (2) soit vérifiée pour k valeurs de n et k seulement.

Problème III. — Déterminer la probabilité A_∞ pour que l'inégalité (2) soit vérifiée pour une infinité de valeurs de n.

Les problèmes I, II et III correspondent respectivement à ceux que j'ai désignés ainsi p. 248—250 (Bo); dans le cas que j'ai appelé *cas de convergence*, les probabilités A_0, A_k ont des valeurs déterminées, ni nulles ni infinies, et l'on a

$$A_\infty = 0. \tag{3}$$

C'est le résultat que conteste M. Bernstein; en réalité, la probabilité qui est différente de zéro, c'est la probabilité A_0 et la probabilité complémentaire $1 - A_0$.

On peut déduire ce résultat des calculs même de M. Bernstein (Be, p. 429); la formule (61) montre en effet que si n est pris assez grand, les produits infinis qui y figurent diffèrent aussi peu qu'on veut de l'unité et il en est de même de la mesure de l'ensemble des points pour lesquels l'inégalité (2) n'est vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de n, c'est à dire cesse d'être vérifiée à partir d'une valeur de n suffisamment grande (non fixée d'avance).

Si l'on se place au point de vue que j'ai adopté dans mon mémoire, tout revient à démontrer que si l'on appelle *cas favorable* le cas où l'inégalité (2) est vérifiée, et si l'on suppose la série

$$\sum \frac{1}{\varphi(n)} \tag{4}$$

convergente, on se trouve dans le cas que j'ai appelé *cas de convergence*.

Or, la probabilité $Q_{n,k}$ pour que l'on ait

$$a_n \geqq k$$

$\left(\text{probabilité que j'ai appelée } 1 - P_{n,k} \text{ et que M. Bernstein appelle } \frac{C_{n,k}}{C_{n,1}}\right)$ vérifie des inégalités de la forme

$$\frac{A}{k} < Q_{n,k} < \frac{B}{k} \tag{5}$$

A et B étant des constantes indépendantes de k (Be, formule (42), p. 426; Bo, formules (23) et suivantes, p. 268). M. Bernstein fait observer très justement que cette probabilité $Q_{n;k}$ n'est pas indépendante des valeurs de $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$; mais, *quelles que soient ces valeurs*, elle vérifie les inégalités (5); comme toutes les démonstrations, celle de M. Bernstein comme la mienne, sont basées, non sur la valeur exacte et très compliquée de $Q_{n,k}$, mais sur les inégalités (5), ces démonstrations ne sont en rien modifiées par le fait que $Q_{n,k}$ est variable.

Si l'on suppose $k = \varphi(n)$, on posera

$$Q_{n,\varphi(n)} = p_n$$

et l'on trouvera la notation avec laquelle j'ai traité les problèmes I, II et III (Bo. p. 248—250); la série

$$\sum p_n$$

est bien convergente puisqu'elle se réduit à la série (4) multipliée par un facteur inconnu, mais compris entre les nombres fixes A et B. On peut dire aussi que p'_n et p''_n vérifient les inégalités (5). Le fait que les p_n ne sont pas constants entraîne comme on l'a vu une modification de forme dans la démonstration, mais n'altère pas le résultat essentiel; si la série (4) est *convergente*, la probabilité pour que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de n,

$$a_n > \varphi(n)$$

est égale à zéro; il y a une probabilité égale à *un* pour que l'inégalité

$$a_n < \varphi(n)$$

soit vérifiée, non pour *toute* valeur de n, mais pour les valeurs de n suffisamment grandes. En d'autres termes, il y a une probabilité égale à un pour que a_n soit *asymptotiquement inférieur* à $\varphi(n)$. Il y a de même une probabilité égale à *un* pour que a_n soit *asymptotiquement supérieur* à $\varphi(n)$, si la série (4) est *divergente*. De sorte qu'il est infiniment probable que la croissance asymptotique de a_n est comprise entre toute fonction $\varphi(n)$ *donnée* telle que la série (4) soit divergente et toute autre fonction *donnée* telle que cette série soit convergente.

Puisque l'occasion m'a été donnée de parler du mémoire de M. Bernstein, je voudrais dire aussi quelques mots de son *Axiome* (Be, p. 419). J'ai souvent pensé à des considérations de ce genre et je suis convaincu, avec M. Bernstein, que la théorie de la mesure, et en particulier de la mesure nulle, est appelée à jouer un rôle important dans les questions de mécanique statistique. La difficulté essentielle dans ces problèmes est en effet l'existence possible de mouvements ordonnés, qui sont très peu probables, mais dont la probabilité n'est pas rigoureusement égale à zéro. En particulier, pour le théorème du minimum de H de Boltzmann, il est bien connu que les mouvements tels que H croisse, soit dans *l'avenir*, soit dans *le passé* à partir de sa valeur actuelle, sont infiniment moins probables que les mouvements tels que H décroisse (ou conserve sa valeur minimum, si elle est atteinte). En réalité, si le nombre des molécules n'est pas *infini*, l'ensemble des trajectoires correspondant à la croissance de H n'est pas de mesure *nulle*; sa mesure est seulement extrêmement petite. Il suffira donc d'une perturbation extérieure excessivement faible, d'une action stellaire sur un système terrestre par exemple, pour que l'irréversibilité ne soit pas possible*). C'est en ce sens que je comprends l'axiome de M. Bernstein; il revient à ceci: *pratiquement, une probabilité nulle ou extrêmement petite doit être considérée comme équivalente à l'impossibilité.* Nous entendons par *extrêmement petite* une probabilité telle que l'évènement attendu doive se produire une fois, en moyenne, dans l'univers accessible à l'homme au cours d'une période de temps très grande par rapport à la durée du système solaire.

---

*) Voir mon article *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz* (Ann. Ec. Norm. 1906) et ma Note: *Modèles arithmétiques et analytiques de l'irréversibilité apparente* (C. R. 154, p. 1148).