

Ein Bedeckungslichtwechsel ist bisher an η Orionis nicht beobachtet worden, also ist unbedingt

$$r_1 + r_2 \leq a \cos i.$$

Nach der voranstehenden Tafel sind also die entsprechenden Grenzwerte für n , i und a

$$n \leq 0.95 \quad i \leq 36^\circ \quad a \leq 26.7 \text{ Mill. km.}$$

Eine untere Grenze für i und eine obere Grenze für a könnte bei gegebener Parallaxe wieder aus der Tatsache abgeleitet werden, daß der spektroskopische Doppelstern η Orionis als hellere Komponente des visuellen Doppelsystems für sich selbst nicht als visuell doppelt bekannt ist. Setzt man die mittlere Parallaxe der Orionsterne vom Typus B nach *Kapteyn* zu $\pi = 0.0054$ und nimmt man an, daß die Winkeldistanz beider spektroskopischen Komponenten sicher nicht mehr als

Wien, 1922 April.

0.1 beträgt, da sie ja visuell nicht trennbar sind, so hätte man damit wieder

$$i \geq 0^\circ 2' \quad a \cos i \leq 27700 \text{ Mill. km.}$$

Jedenfalls müßte also sein

$$n \leq 0.95 \quad 0^\circ 2' < i < 36^\circ \quad 26.7 < a < 27700 \text{ Mill. km.}$$

Es ist wohl äußerst interessant, daß der Wert von $n = m_2/m_1 = 0.95$, den *Schlesinger* und *Baker* aus den Linien der schwächeren Komponente ableiten, hier unter Zuhilfenahme relativitäts-theoretischer Erwägungen gerade als Grenzwert auftritt, bei dem $r_1 + r_2 = a \cos i$, also eine Bedeckung beider Sterne zur Zeit ihrer Konjunktion eben unmöglich wird.

Es wäre unter solchen Umständen sicher nicht uninteressant, η Orionis photoelektrisch auf das Vorhandensein einer geringen Bedeckungsveränderlichkeit hin zu untersuchen.

A. Hnatek.

Nochmals: Zur Doppelsterntheorie der δ Cephei-Veränderlichen. Von *J. Stein*, S. J.

In Nr. 5145 (215.227) der A. N. hat Dr. *Pannekoek* einige Schwierigkeiten hervorgehoben, die der Doppelsterntheorie der δ Cephei-Veränderlichen überhaupt, und der von *A. Nijland* in der Jubiläumsnummer gegebenen Erklärung im besonderen entgegenstehen sollten. Die Hauptschwierigkeit war diese: Nimmt man an, daß die periodische Lichtsteigerung verursacht wird durch den Widerstand, welchen die dichtere Atmosphäre des Hauptsterns oder ein sonstiges widerstehendes Mittel dem Begleiter in seinem Periastron bietet, so müsse die gewonnene Wärme aus der mechanischen Energie des Systems stammen. Dieser Verlust an mechanischer Energie müßte sich aber in der Periode zeigen, und dieses werde durch die Beobachtungen nicht bestätigt.

Verfasser dieses hält es mit *Pannekoek* für wahrscheinlicher, daß die mechanische Energie des Systems nicht die einzige Quelle sein kann für die von dem Lichtwechsel geforderte Strahlungsenergie. Da es sich hier um einen für die Theorie der δ Cephei-Veränderlichen so wichtigen Schluß handelt, möchte er aber auf ein paar Berichtigungen und Ergänzungen zu *Pannekoeks* Artikel aufmerksam machen, die ihm zur völligen Klärung dieser Frage notwendig scheinen.

1. *Pannekoek* setzt voraus, daß die Rotationsbewegung der beiden Körper und ihre Umlaufbewegung gleichperiodisch sind. In dieser Voraussetzung ist die mechanische Energie des Systems:

$$E = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \right\} \omega^2.$$

(Für die Bedeutung der Bezeichnungen vergleiche man A. N. Nr. 5145). Dann sollte die Bewegungsgröße

$$H = \left\{ \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \right\} \omega$$

konstant bleiben, und durch diese Bedingung sei die Variation von a durch die von ω bestimmt.

Hier scheint sich ein doppeltes Versehen eingeschlichen zu haben. Erstens ist die Beziehung zwischen da und $d\omega$ schon unzweideutig bestimmt durch das dritte Keplersche Gesetz:

$$\omega^2 a^3 = f(m_1 + m_2)$$

woraus sich ergibt: $da/d\omega = -2a/3\omega$ (1)

eine Bedingung, die mit der Bedingung der konstanten Bewegungsgröße, wie *Pannekoek* diese formuliert, im Widerspruch steht. Zu bemerken ist aber, daß der richtige Ausdruck für diese Bewegungsgröße folgender ist:

$$H = \left\{ \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 (1 - e^2)^{1/2} \right\} \omega. \quad (2)$$

Es ist wohl selbstverständlich, daß der Faktor $(1 - e^2)^{1/2}$ bei den δ Cephei-Veränderlichen nicht vernachlässigt werden kann.¹⁾

Aus (2) ergibt sich

$$0 = H \frac{d\omega}{\omega} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega (1 - e^2)^{1/2} da^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega a^2 (1 - e^2)^{1/2} e de. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) kann man jetzt auch de als Funktion von $d\omega$ ausdrücken.

Für die Variation der mechanischen Energie findet man nun, mit Heranziehung von (1):

$$dE = \left\{ \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 - \frac{1}{3} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \right\} \omega d\omega. \quad (4)$$

Dieses ist genau $2/3$ des von *Pannekoek* gefundenen Wertes.

2. Um seine Resultate praktisch anzuwenden, hat *Pannekoek* zwei der von *Nijland* berechneten Fälle gewählt:

	m_1	m_2	$q_1 = q_2$	a	r_1	r_2
I.	50 \odot	2.4 \odot	0.003 \odot	39 $\cdot 10^{11}$	17.7 $\cdot 10^{11}$	6.4 $\cdot 10^{11}$
II.	17 \odot	1.2 \odot	0.001 \odot	27 $\cdot 10^{11}$	17.7 $\cdot 10^{11}$	7.3 $\cdot 10^{11}$

Aus diesen Daten, mit $m_\odot = 1.94 \cdot 10^{33}$, $\omega = 2\pi/500000$ ($P = 5.8$ Tage), findet *Pannekoek*:

$$\text{I. } E = (9.75 - 5.33) \cdot 10^{48} \text{ erg}$$

$$\text{II. } E = (3.32 - 2.56) \cdot 10^{48} \text{ erg.}$$

Wie sich bei Prüfung der Zahlen 9.75 und 3.32 ergab, wurden die Trägheitsmomente nach der Formel $\mathcal{F} = \frac{2}{5} M r^2$ berechnet, wie für eine homogene Kugel. Zu einem merklich verschiedenen Resultat kommt man aber, wenn man z. B. der

¹⁾ Auch in *B. Meyermanns* Inauguraldissertation: Resultate aus den Beobachtungen des veränderlichen Sterns δ Cephei (Göttingen 1902) findet sich dasselbe Versehen (Seite 43).

²⁾ Sollte sein 1.25. Wahrscheinlich ist die Zahl 2.56 gerechnet mit $a = 39 \cdot 10^{11}$ statt $27 \cdot 10^{11}$.

Rechnung die Zahlen zugrunde legt, welche von *Eddington* auf Grund der *Emdens* Rechnung für die Dichte in einem typischen Riesenstern abgeleitet sind.

Eddington betrachtet einen Stern, für welchen $M = 1.5 \odot$, $\rho = 0.002 \text{ g/cm}^3$, $r = 7 \cdot 10^{11}$. In seiner Tabelle ist der Abstand r vom Zentrum in *Emdens* Einheit $1/6.9011$ des Radius gegeben; M_r ist die Masse in einer Kugel vom Radius r . Nachstehende Zahlen sind dieser Tabelle entnommen.

r	0	1	2	3	4	5	6	6.9
M_r/M	0	0.125	0.518	0.821	0.952	0.992	1.000	1.000

Berechnet man hieraus näherungsweise das Trägheitsmoment eines Sterns mit Masse $= 1$ und $r = 6.9$, unter der Voraussetzung, daß die Dichte innerhalb der einzelnen Kugelschalen konstant ist, so hat man die Formel

$$\mathcal{I} = \frac{2}{5} \sum \frac{r_n^5 - r_{n-1}^5}{r_n^3 - r_{n-1}^3} \cdot \frac{M_{r_n} - M_{r_{n-1}}}{M}$$

und findet

$$\mathcal{I} = 3.157.$$

Dagegen wäre \mathcal{I} nach der Formel für eine homogene Kugel:

$$\mathcal{I} = \frac{2}{5} \cdot 6.9^2 = 19.099.$$

Das Trägheitsmoment des typischen Riesensterns nach *Eddington* ist also 6.05 mal kleiner als für eine homogene Kugel.

Die Konstanten des typischen Riesensterns sind nicht sehr verschieden von den Konstanten des Satelliten nach *Nijland*. Wie sich aber die Verteilung der Dichte in dem Hauptstern mit Masse $17 \odot$ oder sogar $50 \odot$ gestaltet, liegt wohl noch ganz im Dunklen. Jedenfalls ist klar, daß die von *Pannekoek* für \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 gegebenen Zahlen höchstens der Größenordnung nach genau sein können. (Auch ist keine Abplattung oder ellipsoidische Gestalt berücksichtigt.) Dividieren wir diese Zahlen mit roher Schätzung durch 6, und setzen wir mit *Pannekoek* den jährlichen Verlust des Veränderlichen an Energie gleich $19 \cdot 10^{48} \text{ erg}$, so erhalten wir:

- I. $-19 \cdot 10^{48} = \frac{2}{3}(29.2/6 - 5.33) 10^{48} d\omega/\omega = -0.44 d\omega/\omega$
 $d\omega/\omega = +43 \cdot 10^{-5}$
 II. $-19 \cdot 10^{48} = \frac{2}{3}(9.9/6 - 1.25) 10^{48} d\omega/\omega = +0.27 d\omega/\omega$
 $d\omega/\omega = -70 \cdot 10^{-5}$.

Im ersten Fall müßte sich die Periode jährlich um 215 sec. verringern, im zweiten um 350 sec. vergrößern.

Pannekoek findet in beiden Fällen eine Vergrößerung der Periode, und zwar im Fall I um 4 sec., im Fall II um 13 sec. pro Jahr, und bemerkt, daß eine so große Verlängerung durch die Beobachtungen völlig ausgeschlossen sei. Das gilt natürlich noch in viel stärkerem Maße für die oben gefundenen Zahlen, die aber — das sei hier nochmals wiederholt — kaum der Größenordnung nach genau sind. Jedenfalls scheint es unmöglich, unter den durch *Pannekoek* gesetzten Bedingungen, die vermehrte Wärmestrahlung aus dem Verlust an mechanischer Energie zu erklären.

3. Eine andere Frage ist aber die: sind diese Bedingungen wirklich geboten?

a) Erstens scheint es uns unwahrscheinlich, daß der Satellit, der nach *Ludendorff* und *Plummer* vermutlich nur ungefähr $1/10$ der Masse des Hauptsterns hat, dieselbe geringe

Dichte haben soll wie der Hauptstern, und folglich einen nur 2–3 mal kleineren Durchmesser wie dieser. Die Tatsache, daß das Spektrum des Satelliten sich nie zeigt, läßt die Annahme zu, daß der Satellit relativ klein und dunkel ist, und schon stark verdichtet.

b) Weshalb man nach *Pannekoek* annehmen muß, daß in einem solchen System die Rotationsbewegung gleichperiodisch mit der Umlaufbewegung sei, ist doch wohl nicht so selbstverständlich, wie *Pannekoek* meint. *Plummer* (On the Nature of Short-Period Stars, MN 80.518, 1920) urteilt, »that these systems are not in rotational equilibrium as a whole, and differ in nature and origin from those spectroscopic binaries which in suitable geometrical circumstances appear as eclipsing binaries«. Die große Bahnexzentrizität deutet auch auf ein grundverschiedenes Verhalten hin. So macht auch die Schärfe der Spektrallinien eine nicht so ernste Schwierigkeit, wenn man eine langsame Rotation annimmt.

4. Der Vollständigkeit wegen soll noch untersucht werden, ob die für die Lichtzunahme benötigte Energie durch die mechanische Energie des Systems geliefert werden kann, wenn man die Gleichheit der beiden Perioden fallen läßt. Nehmen wir an, daß nur die Rotationsenergie des Hauptsterns in Betracht kommt; die Winkelgeschwindigkeit sei $n = 2\pi/T$ (T = Umdrehungszeit). Dann wird die verfügbare Energie

$$E = \frac{1}{2} n^2 \mathcal{I}_1 - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \omega^2$$

Folglich: $\Delta E = n \mathcal{I}_1 dn - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \omega (a d\omega + \omega da)$

und, weil $\omega da = -\frac{2}{3} a d\omega$:

$$\Delta E = n \mathcal{I}_1 dn - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{3} a^2 \omega d\omega.$$

Da es nur auf die Größenordnung ankommt, setzen wir:

$$\mathcal{I}_1 \frac{1}{2} \omega^2 = 10^{48}.$$

Ferner sei $d\omega = 0$, da die Beobachtungen praktisch eine Änderung der Periode kaum verbürgen. So erhalten wir:

$$-19 \cdot 10^{48} = 2n \cdot 10^{48} \omega^{-2} dn$$

oder, mit genügender Annäherung:

$$-10^{-4} = n^2 \omega^{-2} \cdot dn/n.$$

Setzt man noch: $n = 2\pi/T$, $\omega = 2\pi/P$, $dn/n = -dT/T$, so findet man:

$$10^{-4} = P^2 \cdot dT/T^3$$

oder, da $P = 5 \cdot 10^5$, $dT = 50 T^3/P^6$.

Da jedenfalls vorauszusetzen ist, daß $T \gg P$, führt diese Rechnung zu einem unmöglichen Wert von dT .

5. Es scheint also, daß, auch wenn man die Bedingung des Rotationsgleichgewichts fallen läßt, die zusätzliche Strahlungsenergie nicht aus mechanischer Quelle geschöpft werden kann. Die Theorie des widerstehenden Mittels in der Doppelsterntheorie der δ Cephei-Veränderlichen ist deshalb weniger wahrscheinlich. Vielmehr sollte man annehmen, daß die geforderte Energie aus dem fast unerschöpflichen Vorrat im Sterninnern stammt, und daß durch Einwirkung des Satelliten in der Nähe des Periastrons periodische Lichtausbrüche hervorgerufen werden.