

**V. Ueber einen neuen mechanischen Satz in
Bezug auf stationäre Bewegungen;
von R. Clausius.**

(Vorgetragen in der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde am 16. Juni 1873; mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

In einer im Jahre 1870 veröffentlichten Abhandlung¹⁾ habe ich für einen materiellen Punkt, welcher sich in geschlossener Bahn bewegt, eine Gleichung aufgestellt und bewiesen, die mit dem Satze von der kleinsten Wirkung und dem Hamilton'schen Princip in nahem Zusammenhange steht, aber sich doch noch wesentlich davon unterscheidet. Im weiteren Verlaufe jener Abhandlung habe ich dann versucht, die Gleichung auf die Wärmelehre anzuwenden. Der Gegenstand scheint mir aber auch vom rein mechanischen Gesichtspunkte aus von so großer Wichtigkeit zu seyn, daß ich bemüht gewesen bin, ihn in dieser Richtung noch weiter zu verfolgen, und der Gleichung eine möglichst allgemeine Form zu geben, wodurch natürlich auch ihre Anwendung auf besondere Fälle erleichtert wird und an Sicherheit gewinnt. Das Resultat dieser Untersuchung will ich mir erlauben im Nachfolgenden mitzutheilen.

1. Es wird zweckmäßig seyn, zunächst die Gleichung in ihrer bisherigen Form kurz anzuführen, um daran die weiteren Betrachtungen knüpfen zu können.

Es sey ein beweglicher materieller Punkt von der Masse m gegeben, welcher unter dem Einflusse einer Kraft steht, die eine *Kraftfunction* oder, nach anderer Benennungsweise, ein *Ergal* hat, und sich unter dem Einflusse dieser Kraft in geschlossener Bahn bewegt. Das Ergal werde

1) Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien. Sitzungsber. d. Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde 1870, S. 167 und Pogg. Ann. Bd. 142 S. 433.

mit U , die Geschwindigkeit des Punktes mit v und seine Umlaufszeit mit i bezeichnet. Von den Gröſsen, welche bei der Bewegung veränderlich sind, sollen Mittelwerthe genommen werden, und ein solcher Mittelwerth soll dadurch angedeutet werden, daß über das Zeichen, welches die veränderliche Gröſſe darstellt, ein waagrechter Strich gesetzt wird.

Neben jener ursprünglich gegebenen Bewegung des Punktes betrachten wir ferner eine unendlich wenig davon abweichende Bewegung. Die Abweichung kann dadurch veranlaßt seyn, daß der Punkt seine Bewegung von einer anderen Stelle aus begonnen oder zu Anfange andere Geschwindigkeitscomponenten gehabt hat, als bei der ursprünglichen Bewegung. Außerdem kann auch das Ergal eine Aenderung erlitten haben. Das Letztere wollen wir uns dadurch ausgedrückt denken, daß in der Function U auſſer den Raumcoordinaten des beweglichen Punktes noch eine oder mehrere Gröſſen c_1, c_2 etc. vorkommen, welche bei jeder Bewegung constant sind, aber beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Werthe ändern können.

Wenn wir nun für jede in Betracht kommende Gröſſe den Unterschied der beiden Werthe, welche sie in der ursprünglichen und in der abweichenden Bewegung hat, als Variation der Gröſſe ansehen und durch ein vorgesetztes δ andeuten, und zur Abkürzung die auf die Gröſſen c_1, c_2 etc. bezüglichen Glieder unter ein Summenzeichen zusammenfassen, so lautet die betreffende Gleichung:

$$\delta \bar{U} - \sum \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \log i. \quad (1)$$

2. Um diese Gleichung zu verallgemeinern, könnte man zunächst die Annahme machen, daß statt Eines beweglichen materiellen Punktes deren mehrere gegeben seyen, welche sich alle in geschlossenen Bahnen bewegen. Wenn dabei alle Umlaufszeiten gleich wären und sich beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere in gleichem Verhältnisse änderten, so würde die Ausdeh-

nung der Gleichung auf einen solchen Fall ohne Weiteres von selbst verständlich sein. Wenn dagegen die Umlaufzeiten verschieden sind und sich in verschiedenen Verhältnissen ändern, so bedarf es zu dieser Ausdehnung schon besonderer Betrachtungen.

Noch allgemeiner ist der Fall, wo die Punkte nicht geschlossene Bahnen beschreiben, sondern wo zwar die Coordinaten der Punkte sich in periodischer Weise ändern, aber Perioden von verschiedener Dauer haben, und beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Periodendauer in verschiedenen Verhältnissen ändern können.

Dieser letztere Fall läßt sich ferner dahin erweitern, daß nicht den Coordinaten selbst periodische Veränderungen zugeschrieben werden, sondern nur angenommen wird, daß die Coordinaten sich als Functionen irgend welcher Größen darstellen lassen, welche periodische Veränderungen erleiden.

Endlich kann man die Betrachtung noch weiter verallgemeinern, indem man auch von diesen Größen, durch welche die Coordinaten bestimmt werden, nicht gerade annimmt, daß sie ihre Aenderungen periodisch vollziehen, sondern eine weniger beschränkende mathematische Bedingung stellt, welche durch periodische Aenderungen erfüllt wird, aber auch erfüllt werden kann, ohne daß die Aenderungen periodisch zu sein brauchen. Diese letztere Behandlungsweise wollen wir wählen.

3. Bevor wir zu dieser Behandlung unseres Gegenstandes schreiten, mögen einige mechanische Betrachtungen vorausgeschickt werden, welche das Verständniß erleichtern.

Es sey ein System von materiellen Punkten mit den Massen m_1, m_2 etc. gegeben, welche sich unter dem Einflusse von Kräften, die ein Ergal haben, bewegen. Wenn die Lagen der Punkte durch die rechtwinkligen Coordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ etc. bestimmt werden, so ist das Ergal U eine Function dieser Coordinaten. Die lebendige Kraft T des Systemes drückt sich, wenn wir

den nach der Zeit genommenen Differentialcoefficienten einer veränderlichen Grösse durch einen beigefügten Accent andeuten, also z. B. $\frac{dx_1}{dt} = x'_1$, setzen, folgendermaassen aus:

$$T = \sum \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad (2)$$

Zwischen T und U findet bekanntlich eine einfache Beziehung statt. Um diese hinschreiben zu können, muß zunächst das für das Ergal U zu wählende Vorzeichen näher festgesetzt werden. Gewöhnlich nimmt man das Vorzeichen von U so an, daß das Differential von U die von den Kräften bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Punkte geleistete Arbeit darstellt, und daß daher der Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und Arbeit sich durch die Gleichung

$$T = U + \text{Const.}$$

ausdrückt. Bei der Form des Satzes aber, welche in neuerer Zeit, besonders durch die schönen Untersuchungen von Helmholtz, gebräuchlich geworden ist, und in welcher man ihn den Satz von der Erhaltung der Energie zu nennen pflegt, ist es bequemer, das Ergal U mit dem entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen, so daß das *negative* Differential von U die Arbeit darstellt, und man daher setzen kann:

$$T + U = \text{Const.}$$

Dann sind T und U die beiden Gröfsen, welche Rankine die *actuelle* und *potentielle* Energie genannt hat, und deren constante Summe die Gesamt-Energie oder kurzweg die *Energie* des Systems ist. Bezeichnen wir diese letztere mit E , so lautet die vorige Gleichung:

$$T + U = E \quad (3)$$

Wenn nun zur Bestimmung der Lagen der beweglichen Punkte statt der rechtwinkligen Coordinaten irgend welche andere Veränderliche eingeführt werden, welche wir mit q_1, q_2, \dots, q_n bezeichnen wollen, so ist natürlich das Ergal U als eine Function dieser Veränderlichen zu be-

trachten. Was die anderen bei der Bewegung vorkommenden Größen und die für die Bewegung geltenden Gleichungen anbetrifft, so sind die Formen, welche sie unter Anwendung jener allgemeinen Veränderlichen annehmen, von Lagrange in seiner *Mécanique analytique* festgestellt.

Um zu erkennen, wie der Ausdruck der lebendigen Kraft sich gestaltet, setzen wir, da die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte als Functionen jener allgemeinen Veränderlichen zu betrachten sind, beispielsweise:

$$x = f(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dq_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{df}{dq_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{df}{dq_n} \frac{dq_n}{dt}$$

oder anders geschrieben:

$$x' = \frac{df}{dq_1} q'_1 + \frac{df}{dq_2} q'_2 + \dots + \frac{df}{dq_n} q'_n. \quad (4)$$

In ähnlicher Weise lassen sich alle Geschwindigkeitscomponenten der beweglichen Punkte ausdrücken. Da die Differentialcoefficienten $\frac{df}{dq_1}, \frac{df}{dq_2}, \dots, \frac{df}{dq_n}$ Functionen der n Größen q sind, so enthalten die Ausdrücke der Geschwindigkeitscomponenten die n Größen q und die n Größen q' und sind in Bezug auf die letztern homogen vom ersten Grade. Denkt man sich nun diese Ausdrücke in der Gleichung (2) eingesetzt, so erhält man für die lebendige Kraft T einen Ausdruck, welcher auch die Größen q_1, q_2, \dots, q_n und q'_1, q'_2, \dots, q'_n enthält, und in Bezug auf die letztern homogen vom zweiten Grade ist.

Aus dem zuletzt genannten Umstande folgt weiter, daß man nachstehende Gleichung bilden kann:

$$2T = \frac{dT}{dq'_1} q'_1 + \frac{dT}{dq'_2} q'_2 + \dots + \frac{dT}{dq'_n} q'_n.$$

oder mit Benutzung eines Summenzeichens:

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'_i} q'_i. \quad (5)$$

Da die in dieser Gleichung vorkommenden Differentialcoef-

ficienten von T im Folgenden häufig wiederkehren werden, so ist es zweckmässig, dafür ein vereinfachtes Zeichen einzuführen. Wir wollen dafür den Buchstaben p wählen und demgemäss, indem wir unter ν irgend eine der ganzen Zahlen von 1 bis n verstehen, setzen:

$$p_\nu = \frac{dT}{dq'_\nu}. \quad (6)$$

Dann lautet die vorige Gleichung:

$$2T = \sum p q'. \quad (7)$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung nehmen für die allgemeinen Veränderlichen q nach Lagrange folgende Form an:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq'_\nu} \right) = \frac{dT}{dq_\nu} - \frac{dU}{dq_\nu}$$

oder gemäss (6):

$$\frac{dp_\nu}{dt} = \frac{dT}{dq_\nu} - \frac{dU}{dq_\nu} \quad (8).$$

4. Was nun die von Hamilton in seinen Abhandlungen von 1834 und 1835¹⁾ aufgestellten Gleichungen anbetrifft, so lauten dieselben, wenn die Anfangswerthe der Grössen q_1, q_2, \dots, q_n und p_1, p_2, \dots, p_n mit k_1, k_2, \dots, k_n und h_1, h_2, \dots, h_n bezeichnet werden, folgendermaassen:

$$\delta \int_0^t 2T dt = \sum (p \delta q - h \delta k) + t \delta E \quad (1)$$

$$\delta \int_0^t (T - U) dt = \sum (p \delta q - h \delta k) - E \delta t \quad (1a)$$

Diese beiden Gleichungen sind nicht wesentlich von einander verschieden, indem unter Voraussetzung der Gleichung $T + U = E$ die eine unmittelbar aus der anderen folgt. Man kann sie daher als Eine Gleichung in zwei verschiedenen Formen bezeichnen.

In der ersten Form der Gleichung ist das Integral

$$\int_0^t 2T dt$$

1) *Philosophical Transactions for the years 1834 and 1835.*

als eine Function der Größen $q_1, q_2 \dots q_n, k_1, k_2 \dots k_n$ und E zu betrachten, und die Gleichung läßt sich in so viele verschiedene Gleichungen zerlegen, wie an der rechten Seite unabhängige Variationen vorkommen. Sobald die Function, welche jenes Integral darstellt, bekannt ist, kann man aus den durch die Zerlegung entstehenden Gleichungen durch bloße Elimination der Größe E sämtliche erste und zweite Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung ableiten. Die zweite Form der Gleichung ist in letzterer Beziehung noch bequemer. In ihr ist das Integral

$$\int_0^t (T - U) dt$$

als Function der Größen $q_1, q_2 \dots q_n, k_1, k_2 \dots k_n$ und t anzusehen, und wenn diese Function bekannt ist, so erhält man durch die Zerlegung der Gleichung ohne Weiteres die ersten und zweiten Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung.

5. Aus dem Vorstehenden ist leicht ersichtlich, daß die Hamilton'sche Gleichung für die Mechanik von außerordentlicher Wichtigkeit ist. Dessen ungeachtet ist sie für unsern Zweck aus zwei Gründen nicht geeignet.

Erstens ist sie, so groß auch in anderer Beziehung ihre Allgemeinheit ist, doch nach einer Richtung hin nicht allgemein genug. Es werden in der Gleichung zwei unendlich wenig von einander abweichende Bewegungen verglichen, deren Verschiedenheit darauf zurückgeführt werden kann, daß die anfänglichen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der beweglichen Punkte bei der einen Bewegung etwas andere Werthe hatten, als bei der anderen. Das Ergal U aber wird bei beiden Bewegungen als eine und dieselbe Function der Raumcoordinaten vorausgesetzt. Nun kann aber der Unterschied zwischen zwei Bewegungen auch dadurch veranlaßt sein, daß das Ergal eine Aenderung erlitten hat, welche von der Aenderung der Coordinaten unabhängig ist. In der

Wärmelehre ist dieser Fall ein ganz gewöhnlicher, indem bei einem Körper, auf den gewisse äufsere Kräfte wirken, unter deren Einflüsse die Molecüle ihre Bewegungen machen, diese äufseren Kräfte eine solche Aenderung erleiden können, welche sich mathematisch durch eine Aenderung des Ergals ausdrückt, wodurch dann natürlich auch eine veränderte Molecularbewegung bedingt wird. Derartige Uebergänge aus einer Bewegung in die andere kann man mittelst der Hamilton'schen Gleichung nicht behandeln.

Der zweite oben erwähnte Grund bezieht sich speciell auf stationäre Bewegungen. Wenn eine stationäre Bewegung als solche näher bestimmt werden soll, so handelt es sich nicht darum, für einzelne Zeitmomente die Lagen und Geschwindigkeiten aller einzelnen Punkte anzugeben, sondern vielmehr darum, den allgemeinen von der Zeit unabhängigen Character der Bewegung festzustellen. Eine Gleichung, die zu diesem Zwecke dienen soll, kann zwar veränderliche Glieder enthalten, aber die Veränderlichkeit derselben muß sich auf gewisse Schwankungen ihrer Werthe beschränken, welche sich in ähnlicher Weise wiederholen, so daß die Gleichung sich zu einer späteren Zeit im Wesentlichen ebenso verhält, wie zu einer früheren Zeit. Wenn dagegen Glieder vorkommen, die mit der Zeit immer größere Veränderungen erleiden, so daß die Gleichung zu einer späteren Zeit sich anders verhält, als zu einer früheren Zeit, so macht dieser Umstand die Gleichung für unseren Zweck ungeeignet.

Von diesem Gesichtspunkte aus wollen wir nun die Hamilton'sche Gleichung betrachten. Es kommen in ihr die Variationen $\delta q_1, \delta q_2 \dots \delta q_n$ vor, deren Bedeutung sich so definiren läßt: δq_v ist der Unterschied zwischen dem Werthe, welchen q_v bei der ursprünglichen Bewegung in einem gewissen Momente hat, und dem *entsprechenden* Werthe von q_v bei der abweichenden Bewegung. Es fragt sich nun aber, welchen der unendlich vielen Werthe, die q_v bei der abweichenden Bewegung nacheinander annimmt, man

als den *entsprechenden* Werth anzusehen hat. Hamilton hat sich darüber zwar nicht ausgesprochen, aber man kann durch eine nähere Betrachtung seiner Entwicklungen und Gleichungen leicht erkennen, wie die darin vorkommenden Variationen zu verstehen sind. Gehen wir von den Werthen aus, welche die Gröfsen $q_1, q_2 \dots q_n$ bei der ursprünglichen Bewegung zu einer gewissen Zeit t haben, so sind die entsprechenden Werthe bei der abweichenden Bewegung diejenigen, welche die Gröfsen zu einer Zeit $t + \delta t$ haben, worin die Variation δt noch unbestimmt, aber *für alle Gröfsen gleich* ist.

Daß in der That der Variation δt in dem ganzen Systeme ein gemeinsamer Werth zugeschrieben ist, sieht man sofort daraus, daß in der Gleichung (1a) δt als eine für das ganze System geltende Gröfse vorkommt.

Ein anderer Umstand, der hierüber keinen Zweifel läßt, ist folgender. Hamilton setzt bei der Ableitung seiner Gleichungen den Satz von der Erhaltung der Energie voraus, nach welchem die Summe $T + U$ constant ist. Dieser Satz gilt aber natürlich nur dann, wenn bei der Bildung der Gröfsen T und U die Veränderlichen, welche die Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte bestimmen, mit solchen Werthen in Rechnung gebracht werden, welche sie zu einer gemeinsamen Zeit haben, sei diese Zeit nun t oder $t + \delta t$, aber man darf nicht Werthe, die sich auf verschiedene Zeiten beziehen, vereinigen, um daraus die Gröfsen T und U zu bilden. Demnach muß es bei so entstandenen Gleichungen, so lange das Gegentheil nicht ausdrücklich gesagt und als zulässig nachgewiesen ist, als selbstverständlich gelten, daß immer nur gleichzeitig stattfindende Werthe aller Veränderlichen in Rechnung gebracht sind.

Um nun zu sehen, wie solche Variationen, die einer gemeinsamen Zeitvariation δt entsprechen, sich verhalten, wollen wir einen einfachen Fall zur Betrachtung auswählen. Wir wollen nämlich voraussetzen, bei der ursprünglichen Bewegung beschreiben alle Punkte geschlossene Bahnen, und bei der abweichenden Bewegung beschreiben wieder

alle Punkte von unendlich wenig veränderten Anfangslagen aus unendlich nahe liegende geschlossene Bahnen, aber die Umlaufzeiten seyen bei den verschiedenen Punkten in verschiedenen Verhältnissen verändert.

Da die Zeitvariation δt beliebig angenommen werden kann, so wollen wir zunächst $\delta t = 0$ setzen, d. h. wir wollen solche Werthe der Veränderlichen als einander entsprechend ansehen, welche zu einer und derselben vom Anfange der Bewegung an gerechneten Zeit gehören. Wenn nun ein Punkt in beiden Bewegungen verschiedene Umlaufzeiten hat, so sind die beiden Lagen, welche zu einer und derselben vom Anfange der Bewegung an gerechneten Zeit gehören, um so weiter von einander entfernt, je größer die Zeit ist. Daraus folgt, daß die einander entsprechenden Werthe der von den Lagen der Punkte abhängigen Veränderlichen mit der Zeit immer verschiedener werden, und daß daher die Variationen dieser Veränderlichen nicht bloß solche Schwankungen erleiden, die sich in ähnlicher Weise wiederholen, sondern daß vielmehr mit wachsender Zeit immer größere Variationen dieser Veränderlichen vorkommen müssen.

Setzt man die Zeitvariation δt nicht, wie vorher, gleich Null, sondern paßt man sie der veränderten Umlaufzeit eines der Punkte an, so kann man dadurch für diejenigen Veränderlichen, welche nur von der Lage *dieses* Punktes abhängen, allerdings bewirken, daß ihre Variationen sich nur in periodischer Weise ändern. Für die übrigen Veränderlichen aber, welche von den Lagen der anderen Punkte abhängen, deren Umlaufzeiten sich in anderen Verhältnissen geändert haben, bleibt jener Uebelstand, daß mit der Zeit immer größere Variationen vorkommen, wodurch die Gleichung für unseren Zweck ungeeignet wird, nach wie vor bestehen ¹⁾.

1) [Nachträglich hinzugefügte Anmerkung.] Herr Szily, welcher schon in einem früheren Aufsätze (diese Ann. Bd. 145) den Schluß gezogen hatte, daß dasjenige, was wir in der Thermodynamik den zweiten Hauptsatz nennen, in der Dynamik nichts anderes sei, als das Hamil-

6. Ich wende mich nun dazu, die von mir in Anwendung gebrachte Behandlungsweise der stationären Bewegungen auseinanderzusetzen.

Um die einander entsprechenden Werthe irgend einer im Verlaufe der Bewegung veränderlichen Gröfse Z näher zu bestimmen, und dadurch auch von der Variation δZ , welche die Differenz der entsprechenden Werthe darstellt, eine vollständigere Definition zu geben, wollen wir eine von der Zeit abhängige Gröfse als *maafsgebende Gröfse* wählen, und festsetzen, *dafs diejenigen Werthe der Veränderlichen Z , welche zu gleichen Werthen der maafsgebenden Gröfse gehören, als einander entsprechende Werthe angesehen werden sollen.*

Wählt man zunächst die Zeit selbst als maafsgebende Gröfse, so erhält man die vorher schon besprochene Art von Variation, welche wir jetzt dadurch näher charakterisiren wollen, dafs wir die maafsgebende Gröfse t als Index neben das δ setzen, und somit schreiben $\delta_t Z$.

Nun möge aber als maafsgebende Gröfse statt der Zeit t eine andere Gröfse φ eingeführt werden, welche sich mit der Zeit ändert, so dafs man φ als Function von t oder auch umgekehrt t als Function von φ darstellen kann. Wir wollen bei der ursprünglichen Bewegung zunächst allgemein setzen:

$$t = f(\varphi) \quad (9)$$

und bei der abweichenden Bewegung, bei welcher die Beziehung zwischen der Zeit und der Gröfse φ eine etwas andere seyn kann, wollen wir, indem wir die Zeit zum Unterschiede mit t^* bezeichnen, setzen:

ton'sche Princip, hat in einem neueren Aufsätze (diese Ann. Bd. 149) denselben Schluß abermals wiederholt. Ich hoffe aber, dafs die Auseinandersetzungen meines gegenwärtigen Aufsatzes ihn erkennen lassen werden, dafs zwischen der Hamilton'schen Gleichung und derjenigen Gleichung, welche in der Thermodynamik zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes angewandt werden muß, ein wesentlicher Unterschied besteht. Demgemäß glaube ich eine eingehende Erwiderung auf seinen Aufsatz für jetzt unterlassen und abwarten zu dürfen, ob er auch gegen die hier befindlichen Auseinandersetzungen Einwendungen erheben wird.

$$t^* = f(\varphi) + \varepsilon f_1(\varphi), \quad (9a)$$

wobei f und f_1 zwei noch unbestimmte Functionen vorstellen und ε ein unendlich kleiner constanter Factor sein soll. Wenn nun in diesen beiden Gleichungen die GröÙe φ einen und denselben Werth hat, so sind die Zeiten t und t^* als einander entsprechende Zeiten anzusehen. Wenn ferner jene oben betrachtete veränderliche GröÙe bei der ursprünglichen Bewegung zur Zeit t den Werth Z und bei der abweichenden Bewegung zur Zeit t^* den Werth Z^* hat, so sind Z und Z^* einander entsprechende Werthe dieser GröÙe, und die Differenz $Z^* - Z$ ist ihre Variation. Diese Art von Variation, in welcher φ als maafsgebende GröÙe gilt, wollen wir mit $\delta_\varphi Z$ bezeichnen. DemgemäÙ haben wir dann auch die Differenz $t^* - t$, welche nach den beiden vorigen Gleichungen den Werth $\varepsilon f_1(\varphi)$ hat, mit $\delta_\varphi t$ zu bezeichnen.

Vorher haben wir die Zeit durch eine unbestimmt gelassene Function von φ dargestellt, welche beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere eine unendlich kleine Veränderung erleidet. Bei der näheren Bestimmung dieser Function kann man sich nach der Art des zu untersuchenden Gegenstandes richten. In der nachfolgenden Untersuchung ist eine sehr einfache Form der Function gewählt, welche sich an den in meiner früheren Abhandlung eingeführten Begriff der *Phase* anschließt.

Um den Begriff der Phase zu erklären, sey zunächst angenommen, daß die Veränderungen, welche die GröÙe Z im Verlaufe der Bewegung erleidet, in periodischer Weise vor sich gehen, und die Zeitdauer der Periode sey mit i bezeichnet. Für einen solchen Fall habe ich die Gleichung

$$t = i\varphi \quad (10)$$

gebildet und die dadurch definirte GröÙe φ die *Phase* der Veränderung genannt. Bei der abweichenden Bewegung möge die Periodendauer mit $i + \delta i$ bezeichnet und dann gesetzt werden:

$$t^* = (i + \delta i)\varphi \quad (10a).$$

Wenn in diesen beiden Gleichungen die Phase φ einen und denselben Werth hat, so sind t und t^* einander entsprechende Zeiten, und man erhält daher:

$$\delta_{\varphi} t = t^* - t = \varphi \delta i \quad (11).$$

Ebenso sind auch für die GröÙe Z solche Werthe einander entsprechend, die zu gleichen Phasen gehören, und die Variation $d_{\varphi} Z$ hat somit eine sehr einfache Bedeutung.

Variationen dieser Art nehmen nicht mit der Zeit immer größere Werthe an, sondern ändern sich nur periodisch, ebenso wie die GröÙen selbst, deren Variationen sie sind.

7. Dieser im Vorigen erläuterte Begriff der Phase, welcher sich auf periodische Veränderungen bezieht, kann bei der Betrachtung solcher Bewegungen, die gleichmäÙig in geschlossenen Bahnen stattfinden, angewandt werden. Wenn aber ein System von Punkten gegeben ist, welche sich zwar in stationärer Weise bewegen, aber keine geschlossene Bahnen beschreiben, und bei denen auch die einzelnen Veränderlichen, durch die man die Lagen der Punkte bestimmt, ihre Werthe nicht einfach periodisch ändern, so muß ein etwas allgemeinerer Begriff in Anwendung gebracht werden, welchen man als Phase in erweiterter Bedeutung auffassen kann.

Indem wir wieder, wie früher, zur Bestimmung der Lagen der Punkte die GröÙen $q_1, q_2 \dots q_n$ anwenden, wollen wir, ohne vorauszusetzen, daß jede GröÙe ihre Veränderungen regelmäÙig in Perioden von bestimmter Dauer wiederhole, dennoch für jede GröÙe ein gewisses Zeitintervall einführen. Diese Zeitintervalle mögen mit $i_1, i_2 \dots i_n$ bezeichnet werden. Mit Hülfe derselben wollen wir die zu den verschiedenen GröÙen gehörigen Phasen, welche $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ heißen mögen, durch folgende Gleichungen definiren:

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2 \dots = i_n \varphi_n \quad (12).$$

Nun variire man die Veränderlichen $q_1, q_2 \dots q_n$ in der Weise, daß man bei jeder Veränderlichen die zu ihr

gehörige Phase als maassgebende Gröfse ansieht, die beim Variiren constant bleibt, während das betreffende Zeitintervall eine Aenderung erleiden kann. Die so gebildeten Variationen sind dem Obigen nach durch die Zeichen

$$\delta_{q_1} q_1, \delta_{q_2} q_2 \dots \delta_{q_n} q_n$$

darzustellen.

Unter Anwendung einer solchen Variation wollen wir für die Veränderliche q_r den Bruch

$$\frac{p_r \delta_{q_r} q_r - h \delta k}{t}$$

bilden. Wenn die Gröfse q_r ihre Veränderungen in periodischer Weise ausführte, und i_r ihre Periodendauer wäre, so würde auch die Variation $\delta_{q_r} q_r$ sich nur periodisch ändern, und demgemäfs würde der Bruch, welcher t im Nenner hat, mit wachsender Zeit immer kleinere Schwankungen machen, und sich so der Null nähern. Dasselbe würde für alle n Veränderlichen gelten, wenn sie sich in periodischer Weise änderten, wobei jede ihre besondere Periodendauer haben könnte. Nun wollen wir aber nicht diese bestimmte Annahme machen, dafs die Veränderungen der Gröfsen $q_1, q_2, \dots q_n$ periodisch seyen, sondern nur die Bedingung stellen, dafs der Mittelwerth der Summe

$$\sum \frac{p \delta_q q - h \delta k}{t}$$

für grofse Zeiten sehr klein werde, eine Bedingung, welche dem Vorigen nach durch periodische Veränderungen jedenfalls erfüllt ist, aber auch durch andere in stationärer Weise stattfindende Veränderungen erfüllt werden kann.

Nach diesen Vorbemerkungen kann nun folgender Satz ausgesprochen werden:

Wenn die Variationen, bei deren Bildung die durch die Gleichungen

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2 \dots = i_n \varphi_n$$

bestimmten Gröfsen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ als constant angesehen sind, der Bedingung genügen, dafs die Summe

$$\sum \frac{p \delta_q q - h \delta k}{t}$$

einen mit wachsender Zeit verschwindenden Mittelwerth hat, so gilt folgende Gleichung:

$$\delta(\bar{U} - T) = \sum p \overline{q'} \delta \log i + \sum \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c. \quad (\text{II})$$

worin die erste an der rechten Seite befindliche Summe, ebenso, wie die vorher erwähnte Summe, n Glieder umfaßt, die den n Veränderlichen $q_1, q_2 \dots q_n$ entsprechen, während die zweite Summe sich auf die in U enthaltenen Größen c_1, c_2 usw. bezieht, welche im Verlaufe jeder Bewegung constant sind, aber beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Werthe ändern.

Die hierin enthaltene Gleichung (II) ist die Eingangs erwähnte verallgemeinerte Form meiner Gleichung. Während in der Hamilton'schen Gleichung (I) das Integral $\int_0^t 2T dt$ als Function der Veränderlichen $q_1, q_2 \dots q_n$, ihrer Anfangswerthe $k_1, k_2 \dots k_n$ und der Energie E , und in der Gleichung (Ia) das Integral $\int_0^t (T - U) dt$ als Function der Größen $q_1, q_2 \dots q_n, k_1, k_2 \dots k_n$ und t anzusehen ist, erscheint in dieser Gleichung der Mittelwerth $\bar{U} - \bar{T}$ als Function der Zeitintervalle $i_1, i_2 \dots i_n$ und der Größen c_1, c_2 usw. Auch sie kann in so viele Partialgleichungen zerlegt werden, wie an der rechten Seite unabhängige Variationen vorkommen, wodurch man aber natürlich ganz andere Gleichungen erhält, als die, welche aus der Zerlegung der Hamilton'schen Gleichung hervorgehen.

8. Um den Satz zu beweisen, bilden wir für irgend eine der n Veränderlichen das Produkt $p \delta_i q$ und differenzieren dieses nach der Zeit. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p \delta_i q) &= p \frac{d(\delta_i q)}{dt} + \frac{dp}{dt} \delta_i q \\ &= p \delta_i \left(\frac{dq}{dt} \right) + \frac{dp}{dt} \delta_i q \\ &= p \delta_i q' + \frac{dp}{dt} \delta_i q. \end{aligned}$$

Hierin führen wir für das abgekürzte Zeichen p nach (6) den vollständigeren Ausdruck $\frac{dT}{dq'}$ ein, und setzen ferner gemäß der Gleichung (8):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dT}{dq} - \frac{dU}{dq}.$$

Dann kommt:

$$\frac{d}{dt}(p \delta_i q) = \frac{dT}{dq'} \delta_i q' + \frac{dT}{dq} \delta_i q - \frac{dU}{dq} \delta_i q. \quad (13)$$

Eine Gleichung dieser Form gilt für jede der n Veränderlichen und wenn wir uns aus diesen n Gleichungen die Summe gebildet denken, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \sum p \delta_i q = \sum \frac{dT}{dq'} \delta_i q' + \sum \frac{dT}{dq} \delta_i q - \sum \frac{dU}{dq} \delta_i q \quad (14).$$

Da die GröÙe T eine Function der $2n$ GröÙen $q_1, q_2 \dots q_n$ und $q'_1, q'_2 \dots q'_n$ ist, so kann man setzen:

$$\delta_i T = \sum \frac{dT}{dq} \delta_i q + \sum \frac{dT}{dq'} \delta_i q',$$

welcher Ausdruck die beiden ersten Summen an der rechten Seite unserer vorigen Gleichung umfaßt. Was ferner die letzte Summe jener Gleichung anbetrifft, so würde sie, wenn in U nur die GröÙen $q_1, q_2 \dots q_n$ veränderlich wären, durch $\delta_i U$ ersetzt werden können. Da aber in U der Voraussetzung nach noch andere GröÙen c_1, c_2 usw. vorkommen, welche zwar von der Zeit unabhängig sind, aber beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Werthe ändern können, so ist

$$\delta_i U = \sum \frac{dU}{dq} \delta_i q + \sum \frac{dU}{dc} \delta c.$$

Durch Anwendung dieser beiden Gleichungen geht (14) über in:

$$\frac{d}{dt} \sum p \delta_i q = \delta_i T - \delta_i U + \sum \frac{dU}{dc} \delta c$$

oder anders geordnet:

$$\delta_i (U - T) = - \frac{d}{dt} \sum p \delta_i q + \sum \frac{dU}{dc} \delta c. \quad (15).$$

Diese Gleichung denke man sich mit dt multiplicirt,

dann von o bis t integrirt und darauf endlich durch t dividirt, wodurch sie, da h und k die Anfangswerthe von p und q sind, folgende Form annimmt:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta_i (U - T) dt = - \Sigma \frac{p \delta_i q - h \delta k}{t} + \Sigma \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dU}{dc} \delta c dt.$$

In dem letzten Gliede der rechten Seite kann man unter Benutzung der für Mittelwerthe eingeführten Bezeichnung setzen:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dU}{dc} \delta c dt = \frac{\overline{dU}}{dc} \delta c$$

An der linken Seite dagegen möge vorläufig das Integralzeichen stehen bleiben und nur das Variationszeichen δ_i umgestellt werden, was bei einer Variation, bei der t als constant betrachtet wird, zulässig ist. Dann lautet die Gleichung:

$$\delta_i \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt \right] = - \Sigma \frac{p \delta_i q - h \delta k}{t} + \Sigma \frac{\overline{dU}}{dc} \delta c \quad (16).$$

Hierin wollen wir nun an der rechten Seite statt der Variationen, in welchen die *Zeit* als constant betrachtet ist, solche Variationen einführen, in welchen die zu den betreffenden Veränderlichen gehörenden *Phasen* als constant betrachtet werden.

Das bei dieser Umänderung anzuwendende Verfahren ergibt sich leicht folgendermaassen. Sey irgend eine von der Zeit abhängige Gröfse durch den Buchstaben Z angedeutet, so wollen wir bei der ursprünglichen Bewegung

$$Z = F(t)$$

und bei der abweichenden Bewegung

$$Z^* = F(t^*) + \varepsilon F_1(t^*)$$

setzen, worin t und t^* einander entsprechende Zeiten darstellen, F und F_1 irgend zwei Functionen andeuten, und ε ein unendlich kleiner constanter Factor ist. Soll nun die Variation $\delta_i Z$ genommen werden, so hat man dazu einfach $t^* = t$ zu setzen und dann die Differenz $Z^* - Z$ zu bilden, wodurch man erhält:

$$\delta_t Z = \varepsilon F_1(t).$$

Soll dagegen die Variation $\delta_\varphi Z$ genommen werden, so muß man für t^* denjenigen Werth der Zeit setzen, welcher einem unveränderten Werthe von φ entspricht, nämlich

$$t^* = t + \delta_\varphi t,$$

und dann wieder die Differenz $Z^* - Z$ bilden. Es kommt also:

$$\delta_\varphi Z = F(t + \delta_\varphi t) + \varepsilon F_1(t + \delta_\varphi t) - F(t).$$

Hieraus ergibt sich, wenn man Glieder, welche in Bezug auf $\delta_\varphi t$ und ε von höherer Ordnung sind, vernachlässigt:

$$\delta_\varphi Z = \varepsilon F_1(t) + \frac{dF(t)}{dt} \delta_\varphi t,$$

was man dem Vorigen nach auch so schreiben kann:

$$\delta_\varphi Z = \delta_t Z + Z' \delta_\varphi t \quad (17).$$

Eine Gleichung von dieser Form ist für jede der Veränderlichen $q_1, q_2 \dots q_n$ zu bilden, wobei der Reihe nach die Phasen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ anzuwenden sind. Man erhält dadurch für q_r , wenn man noch die Glieder etwas umstellt, die Gleichung:

$$\delta_t q_r = \delta_{\varphi_r} q_r - q'_r \delta_{\varphi_r} t.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht die Gleichung (16) über in:

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt \right] = \sum p q' \frac{\delta_{\varphi_r} t}{t} - \sum \frac{p \delta_{\varphi_r} q - h \delta k}{t} + \sum \frac{\overline{dU}}{dc} \delta c \quad (18).$$

Setzen wir hierin weiter gemäß (12):

$$t = i_r \varphi_r$$

woraus folgt:

$$\delta_{\varphi_r} t = \varphi_r \delta i_r$$

und

$$\frac{\delta_{\varphi_r} t}{t} = \frac{\delta i_r}{i_r} = \delta \log i_r$$

so erhalten wir:

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt \right] = \sum p q' \delta \log i - \sum \frac{p \delta_{\varphi_r} q - h \delta k}{t} + \sum \frac{\overline{dU}}{dc} \delta c \quad (19).$$

In dieser Gleichung, welche für jede beliebige Zeit gilt, wollen wir nun von allen Gliedern die Mittelwerthe nehmen. Die letzte Summe, welche schon von der Zeit unabhängig ist, ändert sich dadurch nicht. Der Mittelwerth der vorletzten Summe ist der Voraussetzung nach für große Zeiten gleich Null zu setzen. In den übrigen Gliedern wollen wir die Mittelwerthe nur andeuten. Wir erhalten also:

$$\delta_i \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt \right] = \Sigma \bar{p} \bar{q}' \delta \log i + \Sigma \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c \quad (20).$$

Hierin haben wir noch die linke Seite näher zu betrachten. Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck

$$\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt$$

ist der Mittelwerth der GröÙe $U - T$ während der Zeit von 0 bis t , und somit eine Function von t , welche sich bei der Zunahme von t immer mehr dem constanten Werthe $\bar{U} - \bar{T}$ nähert, der den Mittelwerth für sehr große Zeiten darstellt. Daraus folgt aber noch nicht, daß auch die durch δ_i angedeutete Variation dieser Function sich bei der Zunahme von t einem festen Grenzwerte nähern muß. Wir haben früher gesehen, daß bei einer Function, deren Veränderungen nur in Schwankungen von gleich bleibender GröÙe bestehen, die durch δ_i angedeutete Variation mit wachsender Zeit immer größere Werthe annehmen kann. Dem entsprechend muß es bei einer Function der hier in Rede stehenden Art, welche mit wachsender Zeit immer kleinere Schwankungen macht, und sich so einem Grenzwerte nähert, als möglich betrachtet werden, daß die durch δ_i angedeutete Variation Schwankungen macht, deren GröÙe mit wachsender Zeit nicht abnimmt. Es würde daher nicht allgemein zulässig sein, die Variation

$$\delta_i \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - T) dt \right]$$

durch das Zeichen

$$\delta(\bar{U} - \bar{T})$$

zu ersetzen, welches diejenige Variation darstellt, die man erhält, wenn man den Mittelwerth $\bar{U} - \bar{T}$ als eine von der Zeit unabhängige GröÙe betrachtet, und diese variirt.

Nun kommt aber in unserer Gleichung (20) die erste der beiden eben genannten Variationen nicht selbst vor, sondern nur ihr *Mittelwerth*. Dieser wird für groÙe Zeiten constant, wie man schon daraus ersehen kann, daß an der rechten Seite der Gleichung ein für groÙe Zeiten constant werdender Ausdruck steht. In Folge dessen fällt der vorher erwähnte Unterschied, welcher in der Veränderlichkeit der Variation seinen Grund hatte, fort, und wir können daher für diesen *constant gewordenen Mittelwerth der Variation* das Zeichen $\delta(\bar{U} - \bar{T})$ in Anwendung bringen. Dadurch geht die Gleichung (20) über in:

$$\delta(\bar{U} - \bar{T}) = \sum p'q' \delta \log i + \sum \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c$$

welches die zu beweisende Gleichung (II) ist.

9. Als Beispiel von der Anwendung der Gleichung wollen wir einen einfachen speciellen Fall zur näheren Betrachtung auswählen.

Es seyen zwei materielle Punkte gegeben, welche sich nach irgend einem Gesetze gegenseitig anziehen, oder auch in gewissen Entfernungen abstofsen, und sich unter dem Einflusse dieser Kraft um einander hewegen.

Da der Schwerpunkt des Systemes fest bleibt, und die Bewegung beider Punkte in einer Ebene stattfindet, so können wir die Lagen beider Punkte durch zwei Veränderliche bestimmen, durch ihren gegenseitigen Abstand r und durch den Winkel ϑ , welchen ihre Verbindungslinie mit einer festen Geraden bildet. Wenn nämlich die Massen der beiden Punkte mit m und μ bezeichnet werden, so sind ihre Entfernungen von ihrem gemeinsamen Schwerpunkte

$$\frac{\mu}{m + \mu} r \text{ und } \frac{m}{m + \mu} r.$$

Wird ferner unter ϑ speciell der Winkel verstanden, welchen derjenige Theil der Geraden r , der vom Schwerpunkte aus nach der Masse m geht, mit der positiven x -Richtung eines in der Bewegungsebene angenommenen rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, so lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten der beiden Punkte folgendermaassen ausdrücken:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\mu}{m+\mu} r \cos \vartheta; & y_1 &= \frac{\mu}{m+\mu} r \sin \vartheta \\x_2 &= -\frac{m}{m+\mu} r \cos \vartheta; & y_2 &= -\frac{m}{m+\mu} r \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke läßt sich die Gleichung

$$T = \frac{m}{2} (x_1'^2 + y_1'^2) + \frac{\mu}{2} (x_2'^2 + y_2'^2)$$

in folgende umgestalten:

$$T = \frac{1}{2} \frac{m\mu}{m+\mu} (r'^2 + r^2 \vartheta'^2) \quad (21).$$

Setzt man nun r und ϑ an die Stelle der oben allgemein mit q_1 und q_2 bezeichneten Veränderlichen, so erhält man:

$$\begin{cases} p_1 = \frac{dT}{dr} = \frac{m\mu}{m+\mu} r' \\ p_2 = \frac{dT}{d\vartheta} = \frac{m\mu}{m+\mu} r^2 \vartheta' \end{cases} \quad (22).$$

Hieraus folgt weiter, wenn die Anfangswerthe der Größen r , r' , ϑ , ϑ' mit R , R' , Θ , Θ' bezeichnet werden, die Gleichung:

$$\sum \frac{p \delta q - h \delta k}{t} = \frac{m\mu}{m+\mu} \frac{r' \delta q_1 r - R' \delta R + r^2 \vartheta' \delta q_2 \vartheta - R^2 \Theta' \delta \Theta}{t} \quad (23).$$

Zur Definition der Phasen φ_1 und φ_2 haben wir gemäß (12) die Gleichungen

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2, \quad (24)$$

und es fragt sich nun, ob die hierin vorkommenden Zeitintervalle i_1 und i_2 sich so bestimmen lassen, daß der Mittelwerth jenes in (23) aufgestellten Ausdruckes mit wachsender Zeit verschwindet. Schon bei oberflächlicher Betrachtung der in Frage stehenden Bewegung sieht man sofort, welche Zeitintervalle man als i_1 und i_2 zu wählen

hat, indem die Bewegung sich in zwei Bestandtheile, die abwechselnde Annäherung und Entfernung der beiden Punkte und die Umdrehung ihrer Verbindungslinie, zerlegen läßt, welche als Veränderungen der Größen r und ϑ einzeln betrachtet werden können.

Die Veränderung von r ist periodisch, und wenn wir die Zeitdauer ihrer Periode als i_1 nehmen, so erfüllt der auf r bezügliche Theil des in (23) vorkommenden Bruches, nämlich der Bruch

$$\frac{r' \delta_{\vartheta_1} r - R \delta R}{t},$$

dessen Zähler sich nur periodisch ändert, offenbar die Bedingung, daß sein Mittelwerth mit wachsender Zeit verschwindet.

Was nun das auf ϑ bezügliche Zeitintervall anbelangt, so liegt es nahe, die Umdrehungszeit der Verbindungslinie, also die Zeit, in welcher der Winkel ϑ um 2π wächst, in Betracht zu ziehen. Da nun aber die aufeinander folgenden Umdrehungen im Allgemeinen nicht in gleichen Zeiten stattzufinden brauchen, so wollen wir unter i_2 die *mittlere* Umdrehungszeit der Verbindungslinie verstehen. Hiernach erhalten wir für die mittlere Winkelgeschwindigkeit $\bar{\vartheta}'$ die Gleichung:

$$\bar{\vartheta}' = \frac{2\pi}{i_2}. \quad (25).$$

Ferner haben wir wegen des Satzes, daß die Leitstrahlen der Punkte in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreiben, die Gleichung:

$$r^2 \vartheta' = a, \quad (26)$$

worin a eine Constante ist, und wir können somit setzen:

$$\vartheta' = a \frac{1}{r^2} \text{ und } \bar{\vartheta}' = a \frac{1}{\bar{r}^2}.$$

Unter Anwendung dieser Gleichungen läßt sich die identische Gleichung

$$\vartheta' = \bar{\vartheta}' + \vartheta' - \bar{\vartheta}'$$

in folgende Form bringen:

$$\vartheta' = \frac{2\pi}{i_2} + a\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}\right),$$

und wenn man diese Gleichung mit dt multiplicirt und von 0 bis t integrirt, so erhält man:

$$\vartheta = \Theta + \frac{2\pi}{i_2} t + a \int_0^t \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}\right) dt,$$

welche Gleichung wegen $t = i_2 \varphi_2$ übergeht in:

$$\vartheta = \Theta + 2\pi \varphi_2 + a \int_0^t \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}\right) dt \quad (27).$$

Dieser Ausdruck von ϑ möge nun in der Weise variirt werden, daß dabei φ_2 als constant betrachtet wird, wodurch man erhält:

$$\delta_{\varphi_2} \vartheta = \delta \Theta + \delta_{\varphi_2} \left[a \int_0^t \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}\right) dt \right] \quad (28).$$

Der Ausdruck

$$a \int_0^t \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}\right) dt$$

ist eine Function von t , welche sich periodisch ändert, und dieselbe Periodendauer hat, wie die in ihr vorkommende GröÙe r , nämlich i_1 . Wir müssen daher suchen, für die durch δ_{φ_2} angedeutete Variation dieses Ausdruckes diejenige Variation einzuführen, welche durch δ_{i_1} angedeutet wird.

Nach Gleichung (17) können wir für irgend eine Function Z setzen:

$$\delta_{\varphi_1} Z = \delta_i Z + Z' \delta_{\varphi_1} t$$

$$\delta_{\varphi_2} Z = \delta_i Z + Z' \delta_{\varphi_2} t$$

woraus folgt:

$$\delta_{\varphi_2} Z = \delta_{\varphi_1} Z + Z' (\delta_{\varphi_2} t - \delta_{\varphi_1} t).$$

Da man ferner hat:

$$\delta_{\varphi_1} t = \varphi_1 \delta i_1 = t \frac{\delta i_1}{i_1}$$

$$\delta_{\varphi_2} t = \varphi_2 \delta i_2 = t \frac{\delta i_2}{i_2}$$

so geht die vorige Gleichung über in:

$$\delta_{\varphi_2} Z = \delta_{\varphi_1} Z + \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1} \right) t Z' \quad (29).$$

Wendet man die hierdurch charakterisirte Art von Umformung auf das letzte Glied der Gleichung (28) an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi_2} \vartheta = \delta \Theta + \delta_{\varphi_1} \left[a \int \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2} \right) dt \right] \\ + \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1} \right) t a \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (30).$$

Betrachten wir nun den auf ϑ bezüglichen Theil des in der Gleichung (23) vorkommenden Bruches, so können wir demselben zunächst eine vereinfachte Form geben, indem nach (26) zu setzen ist:

$$\frac{r^2 \vartheta' \delta_{\varphi_2} \vartheta - R^2 \Theta' \delta \Theta}{t} = \frac{a (\delta_{\varphi_2} \vartheta - \delta \Theta)}{t}$$

und wenn wir hierin den vorstehenden Ausdruck von $\delta_{\varphi_2} \vartheta$ einführen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{r^2 \vartheta' \delta_{\varphi_2} \vartheta - R^2 \Theta' \delta \Theta}{t} \quad (31) \\ & = \frac{a}{t} \delta_{\varphi_1} \left[a \int \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2} \right) dt \right] + a^2 \left(\frac{\delta i_2}{i_2} - \frac{\delta i_1}{i_1} \right) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Das erste Glied an der rechten Seite dieser Gleichung macht mit wachsender Zeit immer kleinere Schwankungen, und nähert sich auf die Weise der Null. Das zweite Glied dagegen macht immer gleich große Schwankungen. Nimmt man aber den *Mittelwerth* des Ausdruckes, so verschwindet darin auch das zweite Glied, indem die Differenz $\frac{1}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}$ in $\frac{\bar{1}}{r^2} - \frac{\bar{1}}{r^2}$ übergeht. Somit erfüllt der auf ϑ bezügliche Theil des Bruches ebenso, wie der auf r bezügliche Theil, die in unserem Satze gestellte Bedingung, daß sein Mittelwerth mit wachsender Zeit verschwinde.

Nachdem dieses nachgewiesen ist, können wir die in dem Satze aufgestellte Gleichung (II) auf den vorliegenden Fall anwenden, und erhalten dadurch folgende Gleichung:

$$\delta(\bar{U} - \bar{T}) = \frac{m''}{m + \mu} (\bar{r}^2 \delta \log i_1 + \overline{r'^2} \delta \log i_2) + \Sigma \frac{d\bar{U}}{dc} \delta c, \quad (32)$$

welche eine eigenthümliche Beziehung zwischen den Zeitintervallen i_1 und i_2 und den Mittelwerthen des Ergals und der lebendigen Kraft darstellt.

Wenn man die Masse μ als sehr groß gegen m annimmt, so daß der Bruch $\frac{m''}{m + \mu}$ gleich m gesetzt werden kann, so geht die vorige Gleichung in diejenige über, welche für die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Centrum gilt. Diese Gleichung habe ich in einem vor Kurzem veröffentlichten Aufsätze ¹⁾ besonders abgeleitet, und habe dabei gesagt, daß man für zwei Punkte, welche sich umeinander bewegen, die entsprechende Gleichung in ähnlicher Weise ableiten könne. Hier aber hat sich dieselbe Gleichung als specieller Fall einer viel allgemeineren Gleichung ergeben.

Man kann der Gleichung (II) noch verschiedene andere Formen geben, welche sowohl theoretisch interessant, als auch für die Anwendung bequem sind, wobei man sie zugleich mit meinem Satze von Virial in Verbindung bringen kann. Diese Umformungen und insbesondere die Anwendung der Gleichung auf die Wärmetheorie behalte ich mir für eine folgende Abhandlung vor.

1) Nachrichten der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen vom 25. December 1872, und Math. Ann. von Clebsch und Neumann Bd. VI, S. 390.