Über wiederholte Funktionen.

Von

Rudolf Schauffler in Ulm.

I. Das Konvergenzproblem.

$f(x)$ sei eine reelle Funktion reellen Arguments. Ich definiere:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_2(x) = f(f(x)), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x) = f(f_{n-1}(x)). \end{cases}$$

$f_n(x)$ heiße die *„n-fach wiederholte Funktion $f(x)$"*.

Es fragt sich nun, *unter welchen Bedingungen die Grenzfunktion*

$$f_\omega(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$$

existiert.

Besitzt $y = f(x)$ eine Bildkurve, so lassen sich die Funktionen $f_n(x)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ *geometrisch konstruieren:* Man ziehe durch den Punkt P_1 $(x, f(x))$ die Parallele zur X-Achse bis zum Schnitt Q_1 mit der Geraden $y = x$; durch Q_1 die Parallele zur Y-Achse bis zum Schnitt P_2 mit der Kurve $y = f(x)$, so hat P_2 die Abszisse $f_1(x)$, die Ordinate $f_2(x)$ usw. So kann man einerseits die $f_n(x)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ konstruieren, andererseits ihr Verhalten für $\lim n = \infty$ beurteilen.

Einleitende Beispiele:

1. $f(x) = \sin x$, $f_\omega(x) = 0$ für $-\infty < x < +\infty$.

2. $f(x) = \cos x$, $f_\omega(x) = c$ für $-\infty < x < +\infty$; c ist die Wurzel der Gleichung $\cos x = x$.

3. $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Man findet durch Zeichnung und noch einfacher durch Rechnung:

$$f_\omega\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2};$$

$f_\omega(x)$ ist unbestimmt für $x = -1$, $f_n(x) = -1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, d. h. für

$$x = -1, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{5}, \cdots.$$

Es ist $f_\omega(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ für alle übrigen Werte von x. $f_\omega(x)$ ist somit bis auf „hebbare" Unstetigkeiten konstant, nämlich $= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Das letzte Beispiel weist auf die Beziehungen unseres Problems zur Kettenbruchlehre hin.*) —

Unsere allgemeine Untersuchung sei, wo nicht anders bemerkt, auf das endliche Intervall $a \leqq x \leqq b$ beschränkt. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $f_n(x)$ $(n = 2, 3, \cdots)$ lautet dann:

B$_1$) $$a \leqq f(x) \leqq b \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Ich nehme an, B_1) *sei erfüllt.*

Die Mehrzahl der nun folgenden Sätze ist geometrisch einleuchtend. Die Beweise sind jedoch unabhängig von der Anschauung durchgeführt.

Satz I. *Ist* $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x_0)$ *konvergent (divergent) und*

$$f(x_1) = f(x_0),$$

so ist auch $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x_1)$ *konvergent (divergent) und es ist*

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_1) = \lim_{n=\infty} f_n(x_0)$$

$$\left(\underline{\lim}_{n=\infty} f_n(x_1) = \overline{\lim}_{n=\infty} f_n(x_0)\right). \text{ —}$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition D).

Satz II. *Ist*

B$_2$) $$f(x) \text{ stetig und}$$

B$_3$) $$|f(x) - c| < |x - c| \quad \text{für} \quad x \neq c,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = c.$$

Beweis. Aus B$_3$) folgt:

$$\lim_{|x-c|=0} |f(x) - c| = 0;$$

das gibt im Verein mit B$_2$):

$$f(c) = c.$$

*) Man hat nämlich $f_\omega(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$

Sei nun

$$x_0 \neq c.$$

B_3) gibt mit $f_{n-1}(x_0)$ statt x_0:

$$|f_n(x_0) - c| < |f_{n-1}(x_0) - c| \quad \text{für} \quad n = 2, 3, \cdots.$$

Hieraus folgt die Konvergenz von

$$\lim_{n=\infty} |f_n(x_0) - c|.$$

Es ist noch zu zeigen, daß dieser Grenzwert gleich Null ist. Angenommen, es sei

(1) $$\lim_{n=\infty} |f_n(x_0) - c| = h > 0.$$

Da zwischen den stetigen Funktionen $|f(x) - c|$ und $|x - c|$ die Ungleichung B_3) besteht, so läßt sich die positive Zahl ε so bestimmen, daß

(2) $$0 < h - |f(x) - c| \quad \text{für} \quad 0 < |x - c| - h < \varepsilon.$$

Nun konvergiert andererseits die Folge

$$|f_1(x_0) - c|, \; |f_2(x_0) - c|, \cdots$$

abnehmend gegen h, also ist

(3) $$0 > h - |f_n(x_0) - c| \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Wählt man den Index n so groß, daß

(4) $$0 < |f_{n-1}(x_0) - c| - h < \varepsilon$$

wird und setzt sodann

(5) $$f_{n-1}(x_0) = x_1,$$

so geht (3) über in

(6) $$0 > h - |f(x_1) - c|.$$

Da hier nach (4) und (5)

$$0 < |x_1 - c| - h < \varepsilon$$

ist, so steht (6) im Widerspruch mit (2); also ist $h = 0$, w. z. b. w.

Zusätze zu Satz II. 1. Man deute B_3) geometrisch!

2. Der Satz gilt auch für das unendliche Intervall $-\infty < x < +\infty$. B_1) fällt dann weg.

3. Einfache Beispiele zu Satz II:

$$f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad |x| < 1;$$

$$f(x) = \alpha + \vartheta(x - \alpha) \quad \text{für} \quad |\vartheta| < 1, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$f(x) = \sin x, \; \cos x, \; \frac{\sin x}{x} \quad \text{für} \quad -\infty < x < +\infty.$$

c ist jedesmal die Wurzel der Gleichung $f(x) = x$.

4. Aus Satz II folgt: *Ist* $f(x)$ *stetig und für* $x = c$ *differenzierbar,* $f(c) = c$ *und* $|f'(c)| < 1$, *so ist, wenn* x *ein Wert in der Umgebung von* $x = c$ *ist:*

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = c.$$

Dies ist ein *praktisches Kriterium.*

5. Satz II oder Zusatz 4 dient auch zur *zahlenmäßigen Auflösung von Gleichungen.* Ist eine Wurzel c der Gleichung

$$f(x) = x$$

gesucht, weiß man, daß $f(x)$ bei $x = c$ den Bedingungen von Satz II oder Zusatz 4 genügt, und ist a_1 ein Näherungswert von c, so ist

$$a_1,\ a_2 = f(a_1),\ a_3 = f(a_2),\ \cdots$$

eine gegen c konvergierende Folge von Näherungswerten, von denen jeder besser ist als der vorhergehende. Es ist

$$\frac{a_n - c}{a_{n-1} - c} = \frac{f(a_{n-1}) - f(c)}{a_{n-1} - c};$$

die Konvergenz ist also um so besser, je kleiner $|f'(c)|$ ist.

Das angegebene Näherungsverfahren kann z. B für die Gleichungen

$$\cos x = x, \quad \frac{\sin x}{x} = x$$

empfohlen werden. Es läßt sich auch auf Algebra anwenden; so ist z. B. mit

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}:$$

$f_\omega(a_1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, sobald a_1 ein Näherungswert von $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist. Und es läßt sich leicht ermitteln, unter welchen Voraussetzungen die Funktion

$$f(x) = x^n + x - a$$

den Bedingungen von Zusatz 4 genügt und somit zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ geeignet ist.

Die Verwendung der wiederholten Funktionen zur Auflösung von Gleichungen ist altbekannt. Das Newtonsche Verfahren gehört als Spezialfall hierher. Vgl. Pascal, Repertorium d. höh. Math. I, I Leipzig 1910, S. 353 f., wo auch Literaturangaben.

Satz III. *Ist* $\varphi(x)$ *eine stetige Funktion und ist*

B₄) $$|f(x) - c| \leqq |\varphi(x) - c| < |x - c| \quad \text{für} \quad x \neq c,$$

B₅) $$f(c) = c,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = c.$$

Beweis. Für $x = c$ folgt das Behauptete aus B_5). Für $x \neq c$ erkennt man zunächst wie bei Satz II, daß $\lim\limits_{n=\infty} |f_n(x_0) - c|$ konvergiert. Wir machen nun wieder die Annahme (1). Zwischen den stetigen Funktionen

$$|\varphi(x) - c| \quad \text{und} \quad |x - c|$$

besteht die Ungleichung B_4), also ist

$$0 < h - |\varphi(x) - c| \quad \text{für} \quad 0 < |x - c| - h < \varepsilon;$$

hieraus folgt wegen B_4):

$$(2) \qquad 0 < h - |f(x) - c| \quad \text{für} \quad 0 < |x - c| - h < \varepsilon,$$

und der Beweis geht weiter wie bei Satz II.

Zusätze zu Satz III. 1. Der Satz gilt auch für $-\infty < x < +\infty$; B_1) fällt dann weg.

2. Satz III ist der auf unstetige Funktionen ausgedehnte Satz II. Er hat einen sehr weiten Geltungsbereich. Ist z. B. $g(x)$ eine Funktion, die der Ungleichung $|g(x)| \leqq G$ genügt, im übrigen aber beliebige Unstetigkeiten aufweist, so genügt die Funktion

$$f(x) = c + \vartheta \frac{x - c}{G} g(x) \qquad (|\vartheta| < 1)$$

den Bedingungen von Satz III (man setze etwa $\varphi(x) = c + \vartheta(x - c)$).

Satz IV. *Ist*

B_2) $\qquad f(x)$ *stetig und*

B_6) $\qquad f(x)$ *monoton zunehmend,*

so ist $f_\infty(x)$ *konvergent und es ist*

$$f_\infty(x) = \begin{cases} \text{der auf den Wert } x \text{ folgenden Nullstelle von } (f(x) - x), \\ x, \\ \text{der dem Wert } x \text{ vorangehenden Nullstelle von } (f(x) - x), \end{cases}$$

je nachdem $f(x) \{\gtreqless\} x$ *ist.*

Ich führe den **Beweis** nicht durch, denn Satz IV ist nur ein Spezialfall des folgenden.

Zusätze zu Satz IV. 1. Es sei an B_1) erinnert. Der Satz gilt dann und nur dann auch für $-\infty < x < +\infty$, wenn die „folgende“ bzw. „vorangehende“ Nullstelle, von der im Satze die Rede ist, für jeden Wert von x vorhanden ist. B_1) fällt dann weg.

2. Beispiel zu Satz IV:

$$f(x) = x + \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x - \frac{1}{2\pi} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

gibt:

$$f_\infty(x) = E(x),$$

wobei $E(x)$ die größte ganze Zahl bedeutet, die $\leqq x$ ist. Hier ist die zahlentheoretische Funktion $E(x)$ auf einfache und geometrisch leicht zu deutende Art durch eine Folge analytischer Funktionen dargestellt. (Wegen anderer Darstellungen von $E(x)$ siehe A. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 26 (1886), S. 192—196.)

Satz V. *Ist*

B_6) $$f(x) \text{ monoton zunehmend,}$$

so ist $f_\omega(x)$ *konvergent und es ist*

$$f_\omega(x) = \begin{Bmatrix} \text{der auf den Wert } x \text{ folgenden Nullstelle von } (\lim\limits_{\delta=-0} f(x+\delta) - x), \\ x, \\ \text{der dem Wert } x \text{ vorangehenden Nullstelle von } (\lim\limits_{\delta=+0} f(x+\delta) - x), \end{Bmatrix}$$

je nachdem $f(x) \{\gtreqless\} x$ *ist.* —

Beweis. Die Werte von x, für welche die Ungleichung

$$\lim_{\delta=-0} f(x+\delta) \leqq x \leqq \lim_{\delta=+0} f(x+\delta) \tag{1}$$

gilt, und denen wir noch a und b hinzufügen, bilden eine abgeschlossene Menge M, d. h. jede Häufungsstelle dieser Werte gehört zu ihnen.

I. x gehört nicht zu M. Die Zahlen, die nicht zu M gehören, bilden eine Menge von Intervallen, deren Endpunkte zu M gehören. Ist $\alpha < x < \beta$ ein solches Intervall, so ist *entweder*

$$f(x) \geqq \lim_{\delta=-0} f(x+\delta) > x \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta \tag{2}$$

oder

$$f(x) \leqq \lim_{\delta=+0} f(x+\delta) < x \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta. \tag{3}$$

Es ist nämlich ausgeschlossen, daß etwa in einem Teil des Intervalles die Ungleichung (2), in einem anderen die Ungleichung (3) gilt; denn an einer Stelle x_0 $(\alpha < x_0 < \beta)$, in deren Umgebung teils $f(x) > x$, teils $f(x) < x$ wäre, müßte wegen B_6):

$$\lim_{\delta=-0} f(x_0+\delta) \leqq x_0 \leqq \lim_{\delta=+0} f(x_0+\delta)$$

sein. x_0 müßte also zu M gehören — ein Widerspruch. Nehmen wir an, es gelte (2). Wäre nun

$$\lim_{\delta=-0} f(\beta+\delta) < \beta,$$

so müßte in der linksseitigen Umgebung von $x=\beta$ die Funktion $f(x) < x$ sein; wäre aber

$$\lim_{\delta=-0} f(\beta+\delta) > \beta,$$

so würde β nicht zu M gehören. Also ist

$$\lim_{\delta=-0} f(\beta+\delta) = \beta. \tag{4}$$

Ist ε eine beliebige kleine positive Zahl, so besitzt die Differenz $(f(x)-x)$ für $\alpha+\varepsilon \leqq x \leqq \beta-\varepsilon$ wegen (2) eine von ε abhängige, aber von Null verschiedene untere Grenze. Man kann jetzt leicht eine stetige Funktion $\varphi(x)$ herstellen, die für $\alpha < x < \beta$ der Ungleichung

$$|f(x)-\beta| \leqq |\varphi(x)-\beta| < |x-\beta|$$

genügt. Setzt man $c=\beta$, so genügt nun $f(x)$ für $\alpha < x \leqq \beta$ den Bedingungen von Satz III, möglicherweise mit Ausnahme von B_5). Da jedoch wegen B_6) stets

$$f_n(x) \neq \beta \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta,$$

so kann man trotzdem auf die Gleichung

$$f_\omega(x) = \beta \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta$$

schließen.

Besteht andererseits die Ungleichung (3), so findet man das analoge Ergebnis:

$$f_\omega(x) = \alpha \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta,$$

womit der Satz für die Punkte bewiesen ist, die nicht zu M gehören.

II. x gehört zu M. a) Für $f(x)=x$ ist die Behauptung evident.

b) Ist $f(x_0) > x_0$, so gilt die Ungleichung $f(x) > x$ auch noch in der rechtsseitigen Umgebung von x_0; in dieser Umgebung (x_0 selbst ausgeschlossen) gilt somit (2); x_0 ist somit ein α; in diesem Falle sind die Bedingungen von Satz III für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ erfüllt (B_5) wieder eventuell ausgenommen) und es wird

$$f_\omega(x) = \beta.$$

c) Ist endlich $f(x_0) < x_0$, so findet man, daß x_0 ein β ist und daß $f_\omega(\beta) = \alpha$ ist, so daß nunmehr Satz V vollständig bewiesen ist.

Zusätze zu Satz V. 1. Der Zusatz 1 zu Satz IV, der den Satz auf unendliches Intervall ausdehnt, gilt auch für Satz V.

2. An dem Beispiel $f(x) = E(x)$ sieht man, daß der Satz nicht mehr gilt, wenn man für $f(x)$ Konstanzintervalle zuläßt.

Wir kennen bis jetzt eine notwendige (B_1) und verschiedene hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von $f_\omega(x)$. Wie man eine zugleich notwendige und hinreichende Bedingung erhalten kann, sei hier nur angedeutet: $f(x)$ genüge der Bedingung B_1) und sei im übrigen beliebig. Der Zahl α, wo $a \leqq \alpha \leqq b$, ordne ich die demselben Intervall angehörige Zahl $f(\alpha)$ zu, dieser $f_1(\alpha)$ usw. So erhalte ich eine konvergente oder divergente Zahlfolge F_α. Gehe ich von einer andern Zahl β aus $(a \leqq \beta \leqq b)$, so erhalte ich möglicherweise eine Folge, die von einem gewissen Glied an mit F_α übereinstimmt. Alle Folgen F_β, bei denen dies der Fall ist, vereinige ich mit F_α zu einem einheitlichen Gebilde, das als *„Zahlbüschel"* bezeichnet sei. Jede Zahl des Intervalls gehört alsdann einem bestimmten Zahlbüschel an und der Funktion $f(x)$ entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise eine Spaltung des Kontinuums $a \leqq x \leqq b$ in Zahlbüschel. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $f_\omega(x)$ besteht nun in der Konvergenz sämtlicher zu $f(x)$ gehörigen Zahlbüschel.*

II. Eine Umkehrung des Problems.

Wir fragen jetzt: *Wann ist eine gegebene Funktion $\varphi(x)$ darstellbar in der Form*

$$\varphi(x) = f_\omega(x)?$$

Dieses Problem ist leichter zu behandeln als das Konvergenzproblem.

Die folgenden Sätze gelten sowohl für endliches wie unendliches Intervall. Bei endlichem Intervall $a \leqq x \leqq b$ muß man den gegebenen Funktionen wieder die Bedingung B_1) auferlegen.

Satz VI. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion $f(x)$, die der Gleichung*

$$\text{A)} \qquad f_\omega(x) = \varphi(x)$$

genügt, besteht in folgendem:

B_7) *Für jeden Wert p, den $\varphi(x)$ annimmt, ist $x = p$ eine p-Stelle oder eine Häufungsstelle von p-Stellen von $\varphi(x)$.*

Beweis. I. B_7) *ist notwendig.* Sei also vorausgesetzt: Es gibt die Funktion $f(x)$, die der Gleichung

$$f_\omega(x) = \varphi(x)$$

genügt. Ist $x = \alpha$ eine p-Stelle von $\varphi(x)$, so ist

$$(1) \qquad \lim_{k=\infty} f_k(\alpha) = p,$$

oder, anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} f_n(f_k(\alpha)) = p \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

Die Zahlen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ sind somit p-Stellen von $\varphi(x)$. Diese haben nach (1) entweder p zur Häufungsstelle oder aber sie sind von einem bestimmten Index an alle gleich p, w. z. b. w.

II. B_7) *ist hinreichend.* Wir müssen nun unter der Voraussetzung B_7) eine Funktion $f(x)$ konstruieren, die der Gleichung A) genügt. Ist p ein Wert, den $\varphi(x)$ annimmt, so unterscheiden wir folgende Fälle:

a) $\varphi(p) = p$. Ist α irgend eine p-Stelle von $\varphi(x)$, so wird alsdann definiert:

$$f(\alpha) = p.$$

Es ist nun zu beweisen, daß $f_\omega(\alpha) = \varphi(\alpha)$ ist. $x = p$ ist selbst eine p-Stelle von $\varphi(x)$, also ist

$$f_2(\alpha) = f(p) = p,$$
$$f_3(\alpha) = f(p) = p,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n(\alpha) = f(p) = p,$$

woraus folgt:

$$f_\omega(\alpha) = p = \varphi(\alpha),$$

w. z. b. w.

b) $\varphi(p) \neq p$. In diesem Fall ist p gemäß B_7) eine Häufungsstelle von p-Stellen von $\varphi(x)$. Es sei.

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$$

eine gegen p konvergierende Folge von p-Stellen von $\varphi(x)$:

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = p,$$

so definiere ich:

$$f(\alpha_1) = \alpha_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(\alpha_k) = \alpha_{k+1}.$$

Hieraus folgt:

$$f_n(\alpha_k) = \alpha_{k+n}.$$

Dann wird in der Tat:

$$f_\omega(\alpha_k) = \lim_{n=\infty} \alpha_{k+n} = p = \varphi(\alpha_k).$$

Ist $x = \alpha$ eine der übrigen p-Stellen von $\varphi(x)$, d. h. ist

$$\varphi(\alpha) = p, \ \alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots,$$

so definiere ich:

$$f(\alpha) = \alpha_1;$$

dann wird:

$$f_\omega(\alpha) = f_\omega(\alpha_1) = p = \varphi(\alpha),$$

w. z. b. w.

Nun ist $f(x)$ offenbar im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert, womit auch der II. Teil des Beweises erledigt ist.

Zusätze zu Satz VI. 1. Geometrische Fassung von B_7): „Zieht man zu der Mediane $y = x$ die beiden Parallelen

$$p_1 \cdots y = x - \varepsilon \quad \text{und} \quad p_2 \cdots y = x + \varepsilon$$

und durch einen beliebigen Punkt von $y = \varphi(x)$ eine Parallele p_3 zur X-Achse, so liegt auf p_3 zwischen p_1 und p_2 mindestens ein Punkt von $y = \varphi(x)$, wie klein ich auch $|\varepsilon|$ wählen mag.

2. Hier liegt der seltene Fall vor, daß man auf elementarem Wege notwendige und hinreichende Bedingungen für die Struktur einer Funktion erhält, die Grenzfunktion einer unendlichen Folge ist. Diese Be-

dingungen werden noch einfacher, wenn man, wie in Satz VII, Stetigkeit der Grenzfunktion voraussetzt.

Satz VII. *Ist $\varphi(x)$ eine stetige Funktion, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion $f(x)$, die der Gleichung*

$$f_\omega(x) = \varphi(x) \tag{A}$$

genügt, in folgendem:

B_8) *Es gibt zwei Zahlen α und $\beta \geqq \alpha$, so daß*

$$\varphi(x) = x \quad \text{für} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta,$$
$$\alpha \leqq \varphi(x) \leqq \beta \quad \text{für} \quad x < \alpha, \ \beta < x.$$

Beweis. Daß B_8) hinreichend ist, ist ohne weiteres klar: Man setze etwa

$$f(x) = \varphi(x).$$

B_8) ist aber auch notwendig: Setzen wir die Existenz einer Funktion $f(x)$ voraus, die der Gleichung (A) genügt Ist α die untere, β die obere Grenze von $\varphi(x)$, so nimmt $\varphi(x)$, weil stetig, jeden zwischen α und β liegenden Wert an. Ist p ein solcher Wert, so ist p nach Satz VI eine p-Stelle von $f(x)$ (denn bei stetigen Funktionen ist auch jede Häufungsstelle von p-Stellen eine p-Stelle), d. h. es ist

$$f(p) = p \quad \text{für} \quad \alpha \leqq p \leqq \beta,$$

oder

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Zusätze zu Satz VII. 1. Geometrische Fassung von B_8): „Das Bild der Funktion $y = \varphi(x)$ verläuft zwischen den Geraden $y = \alpha$ und $y = \beta$ und enthält das von diesen beiden Geraden ausgeschnittene Stück der Mediane $y = x$."

2. Die elementaren Funktionen (ausgenommen $y = x$ und die Konstanten) genügen der Bedingung B_8) nicht, sie können also keine unendlichfach wiederholten Funktionen sein.

3. Aus B_8) folgt offenbar:

$$\varphi_2(x) = \varphi(x),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_n(x) = \varphi(x),$$
$$\varphi_\omega(x) = \varphi(x).$$

Es fragt sich nun, wann diese Gleichungen bei *beliebigen* Funktionen gelten. Hiervon handelt Satz VIII.

Satz VIII. *Für das Bestehen der Gleichung*

$$f_\omega(x) = f(x)$$

ist folgendes notwendig und hinreichend:

B_9) *Ist p ein Wert, den $f(x)$ annimmt, so ist*

$$f(p) = p.$$

Beweis. I. B_9) *ist notwendig.* Sei also angenommen:

$$f_\omega(x) = f(x).$$

Ist p ein Wert, den $f(x)$ annimmt, so folgt aus der Hypothese

$$f(p) = q \neq p$$

die Gleichung

$$f_\omega(p) = f_\omega(q) = q,$$

also

$$f_\omega(p) \neq p$$

— ein Widerspruch; es ist also

$$f(p) = p,$$

w. z. b. w.

II. B_9) *ist hinreichend.* Aus

$$f(p) = p$$

folgt mit $p = f(x)$:

$$f_2(x) = f(x);$$

hieraus folgt

$$f_\omega(x) = f(x),$$

w. z. b. w.

Zusätze zu Satz VIII. 1. Geometrische Fassung von B_9): „Zieht man durch einen beliebigen Punkt von $y = f(x)$ die Parallele zur X-Achse, so schneidet diese Parallele die Mediane $y = x$ in einem Punkt von

$$y = f(x).“$$

2. Mit B_9) gleichwertig ist die Gleichung:

$$f_2(x) = f(x),$$

d. h. eine Funktion ist dann und nur dann gleich ihrer ∞-fachen Wiederholung, wenn sie gleich ihrer zweifachen Wiederholung ist.

3. Für stetige Funktionen sind B_7), B_8) und B_9) gleichbedeutend. Weiß man also von einer stetigen Funktion *entweder:* sie ist gleich einer ∞-fach wiederholten Funktion; *oder:* sie ist gleich ihrer zweifachen Wiederholung; *oder:* sie ist gleich ihrer ∞-fachen Wiederholung; so weiß man auch, daß sie die beiden anderen von diesen drei Eigenschaften hat.

Ulm im Januar 1916.