

2. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern; von Walter Ritz.

Einleitung. — Zusammenfassung der Resultate.

Die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die transversalen Schwingungen ebener, elastischer Platten mit *freien* Rändern sind bekanntlich zuerst in teilweise unrichtiger Form von Sophie Germain und Poisson, in definitiver Gestalt aber von Kirchhoff im Jahre 1850 gegeben worden. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch die schönen von Chladni 1787 entdeckten Figuren, die sich bilden, wenn auf eine schwingende Glas- oder Metallplatte etwas Sand gestreut wird; später wurde die Bezeichnung Chladnischer Klangfiguren auch bei den Schwingungen von Membranen angewandt.

Die von Kirchhoff erhaltene partielle Differentialgleichung ist vierter Ordnung, und es müssen am Rande zwei Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung verschwinden, die von einer Elastizitätskonstante abhängen. Die große hieraus sich ergebende Komplikation des Problems erklärt es hinreichend, daß die Lösung bis jetzt nur im Falle des Kreises (Kirchhoff) gefunden wurde, wobei sich ein sehr befriedigender Anschluß an die Erfahrung ergab.¹⁾ Die Klangfiguren bestehen hier nur aus konzentrischen Kreisen und aus Radien, mehrfache Töne sind ausgeschlossen. Die Mannigfaltigkeit der Figuren ist somit viel kleiner als in den Fällen des Dreiecks, Vierecks usw.

Im folgenden entwickle ich am Beispiel der quadratischen Platten mit freien Rändern eine neue Integrationsmethode²⁾,

1) Im Falle einer rechteckigen Platte, von der zwei gegenüberliegende Kanten *gestützt*, die beiden anderen frei sind, läßt sich, wie W. Voigt (Gött. Nachr. p. 225. 1893) gezeigt hat, die Integration elementar durchführen. Gleiches gilt von ringsum *gestützten* rechteckigen Platten.

2) Vgl. die Abhandl. des Verf.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. reine u. angew. Mathematik 135. p. 1. 1908.

die ohne wesentliche Änderungen auch auf rechteckige Platten angewandt werden kann, sei es mit freien, sei es auch mit teilweise oder ganz eingespannten oder gestützten Rändern. Theoretisch ist die Lösung in ähnlicher Weise sogar für eine beliebige Gestalt der Platte möglich; eine genaue Berechnung einer größeren Anzahl von Klangfiguren, wie sie im folgenden für den klassischen Fall der quadratischen Scheibe durchgeführt ist, wird aber nur bei geeigneter Wahl der Grundfunktionen, nach welchen entwickelt wird, praktisch ausführbar. Für den Grundton, sofern große Genauigkeit nicht gefordert wird, führt das Verfahren für die meisten Platten durch den Ansatz von Polynomen zum Ziel.

Das Wesentliche der neuen Methode besteht darin, daß nicht von den Differentialgleichungen und Randbedingungen des Problems, sondern *direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung* ausgegangen wird, aus welchem ja durch Variation jene Gleichungen und Bedingungen gewonnen werden können. Dieses Variationsproblem wird nun durch ein gewöhnliches Maximum- und Minimumproblem für eine endliche Anzahl Parameter ersetzt, dessen Lösung elementar gelingt, womit dann eine erste Approximation gegeben ist. Dieselbe läßt sich *unbegrenzt* verbessern durch Vermehrung der Zahl der Parameter, und ergibt somit ein konvergentes Verfahren zur Integration. Daß die mathematische Form der ersten Approximationen willkürlich gewählt werden kann, ist hierbei ein wesentlicher Vorteil. Denn es ist leicht, eine experimentell bekannte Funktion durch eine genügende Anzahl Konstanten in einer geeigneten mathematischen Form beliebig genau darzustellen; unsere Methode erlaubt es nun, die Konstanten a priori aus der Theorie zu bestimmen, so daß die Ergebnisse der Erfahrung, in Bezug auf die angenäherte Form der gesuchten Lösung, zur praktischen Durchführung der Integration benutzt werden können. Der Umstand, daß das Prinzip der kleinsten Aktion, welches die kürzeste Zusammenfassung der Gesetze der meisten physikalischen Erscheinungen gibt, auch in vielen Fällen den direktesten Weg zu deren mathematischen Behandlung und numerischen Berechnung weist, dürfte nicht ohne Bedeutung sein.

Für die Berechnung der Schwingungen einer quadratischen

Platte mit ringsum freiem Rande führt man zweckmäßigerweise die bekannten Funktionen $u_n(x)$ ein, welche die Amplitude des n^{ten} Obertones eines freischwingenden Stabes, dessen Länge gleich ist der Quadratseite, angeben. Die Koordinatenachsen seien durch den Mittelpunkt parallel zu den Seiten des Quadrates gelegt. Aus unten zu erörternden Gründen müssen die Funktionen $u_0(x) = \text{const.}$; $u_1(x) = x \cdot \text{const.}$ eingeführt werden, die als Grundschwingungen des Stabes mit der Schwingungszahl Null aufzufassen sind; $u_2(x)$ ist also die Grundschwingung im gewöhnlichen Sinne, mit zwei Knotenpunkten; $u_m(x)$ besitzt m Knotenpunkte. Dann ergeben sich aus der Untersuchung folgende *Resultate*:

1. Sämtliche Eigentöne der Platte lassen sich bis auf einige Prozent darstellen durch die Formeln:

$$(I) \quad \begin{cases} w_{mn} = u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x), \\ w'_{mn} = u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x). \end{cases}$$

Den Indizes 00, 01, 10 entspricht die Schwingungszahl Null, die Platte bleibt eben.

2. Es existieren nur Doppeltöne, keine mehrfachen Töne. Die Doppeltöne entsprechen dem Falle, wo von den Indizes m n der eine gerade, der andere ungerade ist. Es ergeben dann w_{mn} und w'_{mn} dieselbe Tonhöhe; jede lineare Verbindung dieser zwei Funktionen entspricht einer möglichen Lösung. Die hierbei auftretende Schar von Klangfiguren hat die Eigenschaft, daß die Kurven sämtlich durch gewisse feste Punkte, von Strehlke Pole genannt, gehen, nämlich die Wurzeln des Gleichungssystems $w_{mn}(x, y) = 0$, $w'_{mn}(x, y) = 0$. In erster Annäherung sind dies die Wurzeln von $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$, bzw. $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$; die Abstände der Pole von den Seiten sind also (bis auf 1—2 Proz.) gleich den Abständen der Knoten freischwingender Stäbe von deren Enden.

3. Die Eigentöne lassen sich mit beliebiger Genauigkeit durch Summen von Ausdrücken der Form (I) darstellen mit Koeffizienten, die sich aus der Theorie bestimmen. Im folgenden ist die Rechnung bis auf $1/1000$ durchgeführt für m und n kleiner als 4. Die so berechneten Klangfiguren stimmen in sehr befriedigender Weise mit den genauen Beobachtungen

von Strehlke überein. Die Korrekturen gegen (I) bleiben stets relativ klein.

4. Die Klangfiguren und Tonhöhen sämtlicher 35 Obertöne, für welche m und n kleiner als 7 sind, werden unten angegeben; für m und n kleiner als 4 sind sie nach den exakten Formeln berechnet, für größere Indizes nach (I), wobei jedoch der Fehler beim Maßstab der Zeichnung kaum wahrzunehmen wäre. Dies schien mir deshalb wünschenswert, weil über diese schönen Figuren durch ungenaue Beobachtung und theoretische Fehlschlüsse eine große Anzahl unrichtiger Ansichten in die Lehrbücher und Zeitschriften übergegangen ist, so daß selbst über die am leichtesten zu beobachtenden Fundamentaltöne Unsicherheit herrscht. In Chladnis Akustik erscheinen manche Eigenschwingungen als Doppeltöne, die es nur durch Inhomogenität des Materials und Mängel der Beobachtungsmethode sind. Die entsprechenden 46 Klangfiguren sind von Chladni größtenteils erhalten und, wenn auch nur in rohen Umrissen, gezeichnet worden. Da sich die zum Hervorbringen einer bestimmten Figur nötige Unterstützung der Platte aus den unten gegebenen, genauen Figuren entnehmen läßt, wird deren experimentelle Herstellung erheblich erleichtert, während bisher über das Zustandekommen irgend einer Figur, besonders bei den höheren Obertönen, im wesentlichen der Zufall entschied.

5. Die vielumstrittene Frage, ob die scheinbar geraden Linien, die in vielen Figuren auftreten, auch wirklich gerade seien, ist dahin zu beantworten, daß dies nur für die Diagonalen und Seitenhalbierenden — wo schon Symmetriegründe es erfordern — gilt. Außerdem ergeben sich aus (I) (angenähert) gerade Linien nur bei Doppeltönen und wenn $m = n$ ist. Die Resultate der Messungen Strehlkes, die vielfach angefochten wurden, stimmen hierin mit der Rechnung genau überein; die geringen Abweichungen dagegen, die Strehlke auch bei den Diagonalen und Seitenhalbierenden gefunden hat, beruhen auf einem unten zu erörternden systematischen Fehler bei der Herstellung von Sandfiguren.

6. Die Tonhöhen der 35 Obertöne stimmen mit den von Chladni gegebenen innerhalb der zu erwartenden Fehler

überein. Sie umfassen sechs Oktaven. In roher Annäherung sind die Tonhöhen gegeben durch die Formel

$$v = A \cdot \sqrt{m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2n^2},$$

wo m, n ganze Zahlen, A, μ Konstanten der Platte sind.

7. Die bei Membranen gültigen Sätze: „Wo eine Knotenlinie den Rand trifft, steht sie auf demselben senkrecht; schneiden sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern der Platte, so bilden sie gleiche Winkel miteinander“, gelten bei Platten nur ausnahmsweise oder angenähert.

8. In den Ecken ist die Lösung eine im allgemeinen *nicht analytische Funktion*, womit die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Methoden bei diesem Problem genügend erklärt ist. Da die Lösung jedoch innerhalb der Platte endlich und stetig bleibt, wenn sie auch nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so bleiben analytische Darstellungen durch Polynome, Fourierreihen, nach den Funktionen w_{mn} fortschreitende Reihen usw., wie sie unsere Methode bringt, dennoch möglich und praktisch anwendbar.

9. Parallelen zu den Seiten schneiden jede Figur in einer Anzahl Punkte, die *höchstens* gleich ist dem größeren der beiden Indizes m und n und *mindestens* gleich dem kleineren. Andere, analoge Gesetze gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die entsprechende Formel zu finden. Sind z. B. beide Diagonalen Knotenlinien, so hat man es mit w'_{mn} zu tun, wobei m, n beide gerade oder ungerade sind. Ist nur eine Diagonale vorhanden, so liegt wieder w'_{mn} mit m und n von ungleicher Parität (Doppelton) vor. Gehören die Seitenhalbierenden zur Figur, so ist einer oder beide Indizes ungerade usw.

10. Schließlich wird die Methode, unter Anwendung von Polynomen, auf die schon von Kirchhoff berechnete Grundschwingung eines Kreises angewendet. Formeln mit zwei Konstanten genügen, um die Schwingungszahl desselben auf $\frac{1}{2}$ Proz. zu erhalten, d. h. mit derjenigen Genauigkeit, die für solche Versuche überhaupt in Betracht kommt. Der Rechnungsaufwand ist viel geringer wie bei der Kirchhoffschen Methode, und sämtliche Operationen durchaus elementar. In der oben zitierten Arbeit habe ich auch die Anwendbarkeit der Methode

auf die Schwingungen von Saiten, unter Benutzung von Polynomen zur angenäherten Darstellung der Lösung, untersucht: bei Benutzung von nur drei Gliedern *ergibt sich der Fundamentalton der Saite auf drei Milliardstel genau.*

Die empirischen Formeln.

Nach diesen Ergebnissen der Theorie läßt sich leicht übersehen, in welchem Umfange und warum gewisse empirische Formeln, die zur Darstellung der Klangfiguren in mehr oder weniger roher Annäherung herangezogen worden sind, ihren Zweck erreichen. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß, wie unten gezeigt wird, $u_m(x)$ durch einen \cos bzw. einen \sin angenähert darstellbar ist, ausgenommen in der Nähe des Randes. Ist die Quadratseite gleich 2, so sind, bis auf willkürliche Faktoren, die Lösungen:

$$u_{2m} = \cos\left(m - \frac{1}{4}\right)\pi x; \quad u_{2m+1} = \sin\left(m + \frac{1}{4}\right)\pi x.$$

Ersetzt man dies noch durch $\cos m\pi x$ und $\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x$, so hat man die Funktionen, aus welchen durch Superposition Wheatstone¹⁾ die Klangfiguren ableiten wollte, wobei geradlinig begrenzte Figuren sich ergaben. Solche Lösungen entsprechen, roh angenähert, den Gleichungen (I) für m oder n gleich Null. Der Umstand, daß nur den Ausdrücken

$$\cos \pi x - \cos \pi y, \quad \cos \pi x + \cos \pi y$$

beobachtete Figuren ungefähr entsprechen, nicht aber $\cos \pi x$, $\cos \pi y$ einzeln, wie es nach diesem Superpositionsprinzip sein sollte, läßt genügend erkennen, daß es sich hier nur um einen in besonderen Fällen anwendbaren Kunstgriff handelt. Um so merkwürdiger ist es, daß auf Grund dieses unhaltbaren Prinzips bis in die neueste Zeit die exakten Versuche Strehlkes von experimenteller und theoretischer Seite her als ganz unrichtig bezeichnet wurden. Insbesondere glaubt R. König²⁾ aus ganz unzulänglichen experimentellen Ergebnissen die Geradlinigkeit der den Seiten paralleler Knotenlinien behaupten zu können, wie es das Superpositionsprinzip verlangt. Indem er die Grundgleichung für einen solchen durch geradlinige Knoten-

1) Ch. Wheatstone, Phil. Trans. 1833. Vgl. Lord Rayleigh, Sound § 227.

2) R. König (Paris), Pogg. Ann. 122. p. 238. 1864.

linien begrenzten Bereich (also mit der Randbedingung: Verschiebung gleich 0) integriert, glaubt S. Tanaka¹⁾ allgemeinere und strengere Formeln zu erhalten. Dies ist aber schon deswegen nicht der Fall, weil übersehen ist, daß eine Randbedingung die Lösung gar nicht bestimmt, so daß Hr. Tanaka aus der unendlichen Reihe möglicher Lösungen eine *unrichtige* herausgewählt hat, wie es die Wahrscheinlichkeit ja verlangt, hätte er statt Produkten von cos und sin, Produkte der Form $u_m(x)u_n(y)$ angesetzt, so hätte die Lösung eine wesentlich höhere Approximation dargestellt (wenigstens bei Doppeltönen und für $m = n$).

In seiner Theory of Sound, § 226 ff., hat Lord Rayleigh die Wheatstonesche Untersuchung weitergeführt. Er geht aus von der Bemerkung, daß, wenn das Verhältnis μ der Querkontraktion zur Längsdilatation gleich Null ist (was allerdings bei keinem bekannten Körper zutrifft), partikuläre Lösungen des Problems existieren, die von einer Koordinate unabhängig sind, und einfach den Schwingungen elastischer Stäbe von gleicher Länge wie die Quadratseite entsprechen, also den Funktionen $u_m(x)$. Dabei ergeben $u_m(x)$ und $u_m(y)$ natürlich dieselbe Tonhöhe; sie können zu den Ausdrücken

$$u_m(x) + u_m(y); \quad u_m(x) - u_m(y)$$

verbunden werden, welche in der Tat eine Reihe von Klangfiguren auf 1—2 Proz. genau darstellen. Allerdings ist die Forderung der Theorie, daß diese zwei Schwingungen gleiche Tonhöhe haben sollten, tatsächlich *nicht* erfüllt, und es existieren die einzelnen Schwingungen $u_m(x)$, bzw. $u_m(y)$, nur im irrealisierbaren Falle $\mu = 0$. In Wirklichkeit liegt hier jener Spezialfall der Formeln (I) vor, wo der eine Index gleich Null ist. Der Grundton der Platte ($m = n = 1$) wird hierdurch nicht dargestellt. Lord Rayleigh setzt dafür den angenäherten Ausdruck xy , der in der Tat mit (I) übereinstimmt, und, wie sich zeigen wird, von der richtigen Lösung nur wenig abweicht.

Das Variationsproblem und die Grundgleichungen.

Sei, wie oben, μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation, welches nach Poisson $\frac{1}{4}$, nach Wertheim $\frac{1}{3}$

1) S. Tanaka, Wied. Ann. 32. p. 670. 1887.

sein soll, und jedenfalls zwischen 0 und 1 liegt; sei ferner E der Elastizitätsmodul¹⁾, $2h$ die Dicke der Platte, dann ist nach Kirchhoff die potentielle Energie der Platte, vorausgesetzt, daß die Verschiebung $u(xy)$ senkrecht zur Ebene der Platte klein bleibe:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} W = \frac{E h^3}{3(1-\mu^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \end{aligned} \right.$$

Die kinetische Energie wird, wenn ρ die Dichte bedeutet,

$$(2) \quad \rho h \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

woraus sich durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E h^3}{3(1-\mu^2)} \Delta \Delta u = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Hat man es mit Eigenschwingungen zu tun, so ist

$$u = \sin 2\pi\nu(t-t_0)w(x,y)$$

zu setzen; dann ergibt sich die Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta \Delta w = \lambda w,$$

wo

$$(4) \quad \lambda = \frac{12\pi^2\nu^2(1-\mu^2)\rho}{E h^2}.$$

λ wird durch die Integration bestimmt; die Gleichung (4) ergibt dann die Anzahl Schwingungen pro Sekunde ν . Die Randbedingungen selbst findet man durch die Variation von ν . Den Faktor $\sin 2\pi\nu(t-t_0)$ kann man natürlich abwerfen, und erhält für eine Seite des Quadrats senkrecht zur x -Achse

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

und ähnlich für die Seiten senkrecht zur y -Achse, durch Vertauschung von x und y .

Bei den hierbei nötigen Umformungen und partiellen Integrationen *längs des Randes* tritt an den Ecken desselben, wie

1) In Kirchhoffs Bezeichnung ist $\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}$, $E = 2K \frac{1+3\theta}{1+\theta}$.

H. Lamb¹⁾ zuerst bemerkt hat, ein Glied der Form $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta w$ auf, aus welchem die weitere von Kirchhoff nicht bemerkte Bedingung sich ergibt

$$(6) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \text{ in den Ecken.}$$

Der Stabilität der Platte entspricht es, daß der Integrand von (1) eine *stets positive* Form ist.²⁾

Ähnlich wie bei den Schwingungen von Membranen lassen sich diese Gleichungen ohne weiteres zu der Forderung zusammenfassen, *es soll das Integral*

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} J = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \right.$$

unter der Bedingung

$$(8) \quad \iint w^2 dx dy = a = \text{gegebene Größe}$$

möglichst klein werden. Denn nach bekannten Sätzen der Variationsrechnung hat man letzteres Integral, mit einem konstanten Faktor $-\lambda$ multipliziert, zu (7) zu addieren, und nunmehr bei willkürlichem δw zu variieren, woraus sich ohne weiteres die Gleichungen (3), (5) und (6) ergeben. Aus dem Verschwinden der ersten Variation

$$(9) \quad \iint \left\{ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dots - 2\lambda w \delta w \right\} dx dy = 0$$

folgt, wenn man insbesondere $\delta w = \varepsilon w$ setzt, wo ε ein unendlich kleiner konstanter Faktor ist, die Gleichung

$$\iint \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \dots - 2\lambda w^2 \right\} dx dy = 0 \text{ für } w = \text{gesuchte Lösung,}$$

1) H. Lamb, Lond. Math. Soc. Proc. 21. p. 70. 1890.

2) Nämlich als Funktion von

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = u \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = v$$

betrachtet; die Diskriminante der Form $u^2 + v^2 + 2\mu uv$ ist gleich $4(1-\mu)$ und somit positiv für $\mu < 1$.

also

$$(10) \quad \lambda = \frac{\text{Minim. von } J}{a} = \frac{J(w)}{a}$$

ganz ähnlich wie bei den Membranen.¹⁾

Ein wirkliches Minimum liegt nur vor beim Grundton w_0 , welcher dem kleinsten Wert von λ entspricht. Will man für den nächsten Oberton w_1 , dem der Wert λ_1 entsprechen möge, ein wirkliches Minimum erhalten, so hat man die weitere Bedingung

$$(11) \quad \iint w_0 w_1 dx dy = 0$$

hinzuzufügen. Man hat dann zum Integranden von (9) noch ein Glied $\lambda' w_0 \delta w_1$ zu addieren; für $\delta w_1 = \varepsilon w_1$ verschwindet dasselbe nach Voraussetzung, und es bleibt wieder die Gleichung (10), diesmal für λ_1 gültig.²⁾

Der Ansatz $\delta w_1 = \varepsilon w_0$ ergibt für λ' den Wert

$$\lambda' = - \iint \left\{ 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \dots \right\} dx dy$$

und dieser Ausdruck ist gleich Null. Dies folgt aus der Variationsgleichung (9) für w_0 , wenn $\delta w = \varepsilon w_1$, $w = w_0$ gesetzt wird und (11) berücksichtigt wird. Die Gleichungen (3), (5), (6) bleiben also ungeändert.

Für den Oberton w_n gelten ebenso die „Orthogonalitätsbedingungen“

$$\begin{aligned} \iint w_n^2 dx dy &= a, & \iint w_n w_0 dx dy &= 0, \\ \iint w_n w_1 dx dy &= 0 \dots, & \iint w_n w_{n-1} dx dy &= 0, \end{aligned}$$

wobei, falls mehrfache Töne vorliegen, jede der linear unabhängigen Schwingungen w_i , die zu dem Ton gehören, zu berücksichtigen sind. Für irgend zwei Schwingungen w_m , w_n , die zu verschiedenen λ gehören, gilt also die Orthogonalitätsbedingung:

$$\iint w_m w_n dx dy = 0.$$

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der Physik II. § 116ff. Braunschweig 1901.

2) Vgl. Lord Rayleigh, Theory of Sound, § 217.

Die Minimumsforderung (7) und (8), mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist ersichtlich nur eine abgeänderte Form des Hamiltonschen Prinzips.

Die Integrationsmethode.

Die neue Methode zur Lösung von Variationsproblemen, die wir nun anwenden wollen, geht aus von folgendem *Interpolationsproblem*:

Seien $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y) \dots \psi_n(x, y) \dots$ eine Reihe von Funktionen, die wir (was hier zu selbstverständlich ist, um betont zu werden) als stetig (nebst den 1., 2., 3. und 4. Differentialquotienten) innerhalb der Platte annehmen. Wir bilden den Ausdruck:

$$(12) \quad w_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_n \psi_n$$

und fordern, es sollen die a_n so bestimmt werden bei gegebenem n , daß w_n möglichst wenig von einer der gesuchten Funktionen w , die das System (3), (5), (6) befriedigen, innerhalb der Platte abweiche. Wäre w numerisch gegeben, so läge hier ein gewöhnliches Interpolationsproblem vor.

Dasselbe ist insofern unbestimmt, als man eine „möglichst gute Annäherung“ in verschiedenem Sinne auffassen kann. Eine genaue Definition des „Gesamtfehlers“, welcher möglichst klein werden soll, ist daher nötig.

Es liegt nahe, als Maßstab des Gesamtfehlers die Abweichung der potentiellen Energie von ihrem exakten Wert beim wirklichen Vorgang zu wählen; dies kommt aber auf die Forderung hinaus: es sind die a_i so zu wählen, daß der Ausdruck

$$(13) \quad \left\{ J_n(a_1 \dots a_n) = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right.$$

unter der Bedingung

$$(14) \quad U_n = \iint w_n^2 dx dy = a$$

möglichst klein werde. Da aber J_n eine quadratische Funktion der a_i ist, so liegt hier ein gewöhnliches Maximum- und Mini-

mumproblem vor, welches, unter Einführung eines Faktors λ_n , durch das System homogener linearer Gleichungen gelöst wird

$$(15) \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} - \lambda_n \frac{\partial U_n}{\partial a_1} = 0 \dots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n} - \lambda_n \frac{\partial U_n}{\partial a_n} = 0.$$

Mit anderen Worten: es ist der Ausdruck (12) an Stelle der unbekanntenen Funktion w im Variationsproblem einzusetzen, und die a_i so zu wählen, daß das Integral möglichst klein werde. Gleiches gilt allgemeiner für jeden Vorgang, der durch das Hamiltonsche Prinzip gegeben ist, ja für die Lösung beliebiger Variationsprobleme, vorausgesetzt, daß sie gewissen, hier nicht zu erörternden Bedingungen genügen.

Unter Einführung der (bekannten) Konstanten

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{nm} = \alpha_{mn} &= \iint \left\{ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} \right. \\ &\left. + \mu \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \beta_{nm} = \beta_{mn} = \iint \psi_m \psi_n dx dy$$

läßt sich (15) schreiben:

$$(18) \quad \sum_{p=1}^n (\alpha_{pq} - \lambda_n \beta_{pq}) a_p = 0 \text{ für } q = 1, 2 \dots n.$$

Die Determinante dieses Systems von n homogenen, linearen Gleichungen für die a_i muß verschwinden, woraus sich λ_n als eine der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ergibt, und die a_i bis auf einen zunächst willkürlichen, nachher aus (14) zu bestimmen den Faktor bestimmt werden. Jeder Wurzel $\lambda_n^{(i)}$ entspricht ein System der a_i . Bei einer nächst höheren Approximation w_{n+1} sind die a_i neu zu bestimmen.

Es zeigt sich nun, daß, wenn man die ψ_i geeignet wählt, der so erhaltene Ausdruck (12) in der Tat eine Annäherung an die gesuchte Lösung darstellt, welche mit wachsendem n sich unbegrenzt verbessert, so daß sich ein konvergentes Verfahren ergibt.

Wir betrachten zunächst den Grundton, und wählen dementsprechend bei jeder Approximation die kleinste der Wurzeln der Determinantengleichung. Bezeichnen wir mit $d'w_n$ das totale Differential von w_n in bezug auf die a_i

$$d'w_n = \psi_1 da_1 + \psi_2 da_2 + \dots + \psi_n da_n,$$

so muß $d'J_n - \lambda_n d'U_n = 0$ sein, d. h.

$$(19) \quad \iint \left\{ \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} d' \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \dots - \lambda_n w_n d' w_n \right\} dx dy = 0.$$

Hier sind aber genau dieselben Schlüsse möglich, wie wir sie im vorigen Paragraphen für die Variation gemacht haben; es ist nur w durch w_n , λ durch λ_n , δ durch d' zu ersetzen. Wieder ist λ_n der kleinste Wert von J_n/a , und wenn n wächst, nimmt dieser kleinste Wert fortwährend ab, oder wenigstens niemals zu. Da nun aber J und J_n wie oben bemerkt, positiv sind, so haben die λ_n eine untere Grenze λ , der sie beliebig nahe kommen. *Soll nun diese Grenze mit dem λ des Grundtones zusammenfallen, so müssen wir offenbar die ψ_i so wählen, daß durch einen Ausdruck der Form $A_1 \psi_1 + \dots A_n \psi_n$ jede beliebige, den Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion w , nebst ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, innerhalb der Platte beliebig genau darstellbar sei; eine Forderung, die durch Polynome, Fourierreihen usw. befriedigt wird.* Dann kann $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ von dem kleinsten Wert von J/a für beliebige w nicht verschieden sein, und wir erhalten eine Reihe von Funktionen $w_1, w_2, w_3 \dots$ für die J gegen seinen Grenzwert konvergiert. Daraus folgt nach den Untersuchungen von D. Hilbert¹⁾ und B. Levi²⁾, daß die w_i gegen die gesuchte Grenzfunktion konvergieren, von gewissen Punkten vielleicht abgesehen, die hier ohne Interesse sind.³⁾

Nimmt man, statt der ersten, stets die zweite Wurzel der Determinantengleichungen, so gelangt man zum ersten Ober-ton usw.

Die Randbedingungen (5) und (6) sind um so genauer erfüllt, je näher λ_n seinem Grenzwert liegt. Gleiches gilt von

1) D. Hilbert, Math. Annalen 59. 1902.

2) B. Levi, Rendiconti del circ. math. di Palermo 22. 1906.

3) Diese Punkte können überall dicht liegen, aber nur so, daß sie bei einer Integration der Funktion über jedes beliebige Bereich ohne Einfluß bleiben. Bei den Fourierreihen und anderen für die ψ_i in Betracht kommenden interpolatorischen Funktionen sind die Koeffizienten aber durch Integrale gegeben, auf welche die singulären Stellen somit ohne Einfluß bleiben; die Reihen nehmen daher in solchen Stellen den aus der Stetigkeit folgenden Wert an, d. h. Funktionen mit solchen Singularitäten sind als Grenzwerte ausgeschlossen.

der Differentialgleichung. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß die Entwicklungen nach Polynomen, Fourierreihen usw. stets nur eine bestimmte Anzahl gliedweiser Differentiationen zulassen, so daß — wie auch wirklich der Fall ist für die unten zu betrachtenden Entwicklungen nach den $u_m(x)u_n(y)$ — sie möglicherweise gar nicht drei- und viermal gliedweise differenzierbar sind, und daher durch Einsetzen in (3) und (5) nicht verifiziert werden können. Es ist eine allgemeine Eigentümlichkeit interpolatorischer Funktionen, daß sie um die darzustellende Funktion hin- und herschwanken, und ihre sukzessiven Differentialquotienten bei gegebener Gliederzahl eine immer schlechter werdende Approximation geben, die bald ganz unbrauchbar wird — was dann der Divergenz der Reihen entspricht. So stellt der Ansatz I, p. 739 zwar die Amplituden w , nicht aber deren zweite Differentialquotienten befriedigend dar.

Entwicklungen nach Polynomen genügen stets den gestellten Anforderungen; man kann also bei jeder Form der Platte für ψ_i den Ausdruck $x^m y^n$ setzen. Denn da jede beliebige Funktion durch Polynome stets beliebig angenähert darstellbar ist, so gilt dies insbesondere für den zweiten Differentialquotienten einer gegebenen Funktion $f(x)$; es ist, wenn nur $d^2 f/dx^2$ den sogenannten Dirichletschen Bedingungen genügt,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \epsilon_n(x),$$

wo $|\epsilon_n|$ kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden kann für genügend große n . Somit folgt

$$f(x) = f(o) + x f'(o) + \frac{a_0 x^2}{2} + \dots + \frac{a_n x^{n+2}}{n \cdot (n+1)} + y_n(x),$$

wo von y_n gleiches wie von ϵ_n gilt; hier haben wir also einen angenäherten Polynomialausdruck von $f(x)$, der zweimal differenzierbar ist. Ob er es auch dreimal ist, hängt von der Natur von f''' , aber auch vom gewählten Interpolationsmodus ab. Dies läßt sich ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Variablen ausdehnen.

Ob und wie oft Fourierreihen differenzierbar sind, hängt von analogen Umständen ab, wie sie unten bei den Entwicklungen nach den $u_m(x)$, $u_n(y)$ zu besprechen sein werden.

Ist die Variation δw selbst gewissen Bedingungen unterworfen (was bei eingespannten Platten der Fall ist, wo am Rande

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad \delta w = 0, \quad \frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0$$

sein muß), so müssen alle ψ_i diese Bedingungen erfüllen. Diesen Fall habe ich in der eingangs zitierten Arbeit eingehend besprochen.

Daß die vorliegende Methode auch auf viele andere Probleme, insbesondere auf Gleichgewichtsprobleme, die ja stets aus einer Minimumsforderung ableitbar sind, angewendet werden kann, braucht kaum erwähnt zu werden. Es ist nun zu zeigen, daß sie auch wirklich, bei geeigneter Wahl der ψ_i , numerisch brauchbar ist.

Entwickelungen nach den Eigenschwingungen von Stäben mit freien Enden.

Die Amplitude $u(x)$ eines an beiden Enden freien Stabes genügt bekanntlich¹⁾ der Gleichung

$$(20) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = k^4 u,$$

und an beiden Enden den Bedingungen

$$(21) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

woraus sich u als eine Summe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ergibt, während k Wurzel einer bekannten transzendenten Gleichung ist. Jeder Wurzel k_m derselben entspricht ein Eigen-ton $u_m(x)$, und es gilt die *Orthogonalitätsbedingung*

$$(22) \quad \int u_m u_n dx = 0 \text{ für } m \neq n,$$

das Integral über die Länge des Stabes erstreckt. Um die Symmetrieverhältnisse gehörig hervortreten zu lassen, wähle man als Anfangspunkt $z = 0$, die Mitte des Stabes; ferner bestimme man den willkürlichen, konstanten Faktor, mit dem

1) Zur Theorie der Schwingungen freier Stäbe vgl. man z. B. Lord Rayleigh, Sound § 160 ff.

jede Lösung noch multipliziert werden kann, durch die Bedingung

$$(23) \quad \int u_m^2 dx = 1,$$

und setze endlich der Einfachheit halber als Längeneinheit die halbe Stablänge an, so daß $x = \pm 1$ die Koordinaten der Endpunkte sind. Dann ergeben sich für die u_m , wie man leicht findet, die Ausdrücke:

Für gerade m :

$$(24) \quad u_m = \frac{\cos k_m \cos k_m x + \cos k_m \cos k_m x}{\sqrt{\cos^2 k_m + \cos^2 k_m}},$$

wobei $\operatorname{tg} k_m + \operatorname{Tg} k_m = 0$.

Für ungerade m :

$$(25) \quad u_m = \frac{\sin k_m \sin k_m x + \sin k_m \sin k_m x}{\sqrt{\sin^2 k_m - \sin^2 k_m}},$$

wobei $\operatorname{tg} k_m - \operatorname{Tg} k_m = 0$.

Beide Gleichungen lassen die Wurzel $k = 0$ als erste zu; in der Tat erfüllen auch die Funktionen

$$(26) \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{const.}, \quad k_0 = 0,$$

$$(27) \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad k_1 = 0$$

alle Bedingungen (20) bis (23), und sind als Eigenschwingungen mit der Schwingungszahl Null einzuführen, bei welchen der Stab geradlinig bleibt. Die Notwendigkeit dieser Einführung wird sich unten zeigen.

Bei dieser Festsetzung entspricht $m = 2$ dem gewöhnlichen Grundton mit zwei Knotenpunkten; allgemein gibt jedesmal der Index m die Anzahl der Knotenpunkte der entsprechenden Schwingung an. Die Schwingung ist eine gerade Funktion von x für gerade m , eine ungerade für ungerade m .

Die Wurzeln $k_2, k_4, k_6 \dots$ von $\operatorname{tg} k_m + \operatorname{Tg} k_m = 0$ unterscheiden sich wenig von $m\pi/2 - \pi/4$; es ist $k_2 = 2,3650$; k_4 ist von $(2 - \frac{1}{4})\pi$ nur in der 6^{ten} Stelle verschieden, k_6 noch weniger von $(3 - \frac{1}{4})\pi$.

Die Wurzeln $k_3, k_5, k_7 \dots$ von $\operatorname{tg} k_m - \operatorname{Tg} k_m = 0$ sind

$$k_3 = 3,92660; \quad k_5 = (2 + \frac{1}{4})\pi; \quad k_7 = (3 + \frac{1}{4})\pi \dots$$

Allgemein ist für $m > 2$ auf fünf Stellen genau

$$(27a) \quad k_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}.$$

Für $m > 2$ ist auf vier Stellen genau

$$(28) \quad u_m(x) = \cos\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{Cof}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x}{\sqrt{2} \operatorname{Cof}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi}$$

für gerade m , und

$$(29) \quad u_m(x) = \sin\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{Sin}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x}{\sqrt{2} \operatorname{Sin}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi}$$

für ungerade m .

Die hyperbolischen Teile sind für kleine x um so kleiner, als m größer ist; für qualitative Betrachtungen kommen sie nur in der Nähe der Endpunkte in Betracht, und es reduzieren sich die u_m auf

$$\cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2}.$$

Infolge von (22) und (23) lassen sich, wie bekannt, die Koeffizienten einer Entwicklung

$$(30) \quad f(x) = A_0 u_0 + A_1 u_1 + \dots + A_m u_m(x) + \dots$$

durch Multiplikation mit u_m und Integration, wie bei den Fourierreihen, bestimmen; es ist

$$(31) \quad A_m = \int_{-1}^{+1} f(x) u_m(x) dx.$$

Schreibt man dies

$$A_m = \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^4 u_m}{dx^4} dx$$

und integriert partiell, so wird, da

$$\frac{d^3 u_m}{dx^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u_m}{dx^2} \quad \text{für} \quad x = \pm 1$$

verschwinden,

$$(32) \quad A_m = \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f''(x) u_m'' dx,$$

und weiter

$$A_m = \frac{1}{k_m^4} \left[f'' \frac{d u_m}{d x} \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{k_m^4} \int_{-1}^{+1} f'''' \frac{d u_m}{d x} d x.$$

Da $\frac{1}{k_m} \frac{d u_m}{d x}$ mit 1 vergleichbar bleibt für jedes m , und f'' , f'''' endlich und stetig sein sollen, so ergibt sich, daß für beliebige m , $A_m k_m^3$ unter einer festen Zahl bleibt; oder, da $k_m = (m - \frac{1}{2}) \pi / 2$, daß die A_m wie $1/m^3$ abnehmen. Die Reihe (30) konvergiert also absolut und gleichmäßig, nebst ihrer ersten, gliedweise genommenen Ableitung. Die zweite Ableitung konvergiert nur noch wie $1/m$. Da (Lord Rayleigh, l. c.) die u_m'' die Eigenfunktionen von an beiden Enden eingespannten Stäben sind, so entspricht die Formel

$$f''(x) = A_0 u_0'' + A_1 u_1'' + \dots + A_m u_m''(x) + \dots$$

der Entwicklung nach solchen Eigenfunktionen, wie sich auch aus dem Ausdruck (32) der A_i ergibt. Daß diese Entwicklung, wenn auch nicht absolut, so doch in der Art einer Fourierreihe konvergiere, darf wohl vorausgesetzt werden. Daraus folgt dann die zweimalige gliedweise Differentiierbarkeit der Reihe (30).

Nun sind aber die Formeln (31) und die folgenden Betrachtungen ebensogut anwendbar, wenn man einige der u_i wegläßt; soll die Reihe gegen $f(x)$ und nicht gegen eine andere Funktion konvergieren, so ist es wichtig festzustellen, daß das Orthogonalsystem der u_i ein *vollständiges* ist, d. h. daß nicht etwa weitere Funktionen U_i existieren, die den Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} U_m u_n d x = 0, \quad \int_{-1}^{+1} U_m U_n d x = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

genügen. Daß die gewöhnlich nicht betrachteten Funktionen $u = \text{const.}$, $u = x \cdot \text{const.}$ hierher gehören, ist schon bemerkt worden, und wir haben sie als u_0 und u_1 bereits eingeführt. Ohne diese Einführung aber konvergiert $\sum A_i u_i(x)$ gar nicht gegen $f(x)$, sondern gegen

$$f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 = f(x) - \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\sqrt{2}} dt - x \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{3}{2}} f(t) t dt.$$

Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein¹⁾; da der Ausdruck xy nahezu dem Grundton einer quadratischen Platte entspricht, erkennt man wie *praktisch* wichtig diese Einführung ist.

Daß damit aber die u_i wirklich zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt sind, läßt sich nach einer Methode von Liouville zeigen, und ist in letzter Instanz darauf zurückzuführen, daß nun jeder Ausdruck²⁾

$$(33) \quad A_0 u_0 + A_1 u_1 + \dots + A_m u_m$$

höchstens m Wurzeln besitzt, über die man offenbar willkürlich verfügen kann, durch geeignete Wahl des A_i ; dies war *vor* der Adjunktion von u_0, u_1 (mit keiner bzw. einer Wurzel) nicht der Fall; bei den Entwicklungen nach den Eigenfunktionen eingespannter Stäbe ist keine Adjunktion notwendig (und möglich), weil der Grundton im Innern *keine* Wurzel, der erste Oberton nur eine usw. hat.

In einem analogen Fall bemerkt nun Liouville, daß, wenn man $f(x)$ durch (33) darstellen will und der Methode der kleinsten Quadrate entsprechend die A_i so wählt, daß das Integral des Fehlerquadrates

$$(34) \quad \int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots]^2 dx$$

ein Minimum wird, man für die A_i eben die Formel (31) erhält. Ist $[a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m] \varepsilon$ das totale Differential von (33) nach den A_i ($\varepsilon =$ unendlich klein, die a_i willkürliche Zahlen), so ergibt die Forderung des Minimums:

$$\varepsilon \int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \dots - A_m u_m] [a_0 u_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m] dx = 0$$

für beliebige a_i . Daraus folgt, daß $f(x)$ durch $A_0 u_0 + \dots$ mindestens $m + 1$ mal geschnitten wird, sonst könnte man über die Wurzeln von $a_0 u_0 + \dots$ so verfügen, daß sie mit den Wurzeln des ersteren Ausdruckes zusammenfallen, und das

1) Insbesondere nicht von Lord Rayleigh, Sound, Art. 168.

2) Der Beweis dieses Satzes von Sturm läßt sich genau wie bei Riemann-Weber, Part.-Differentialgl. II. p. 69 führen.

unsere Ausdrücke sich nicht eignen werden. *Durch diesen Verzicht wird aber gerade die Darstellung der Lösung selbst wesentlich vereinfacht.*

Bevor wir zur wirklichen Berechnung des A_{mn} übergehen, ist es nötig, uns von den allgemeinen Eigenschaften der Lösung $w(x, y)$ ein Bild zu machen.

Allgemeine Eigenschaften der Lösung.

Sei $w(x, y)$ irgend eine Funktion, die den Gleichungen (3), (5), (6) genügt, und λ der durch (10) gegebene zugehörige Eigenwert. Die Symmetrie dieser Gleichungen und der Ränder läßt ohne weiteres die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

Ist $w(x, y)$ eine Lösung, so ist auch $w(-x, +y)$ eine zu demselben λ gehörige Lösung. Falls also w einem einfachen Ton entspricht, sind diese zwei Ausdrücke höchstens durch das Vorzeichen verschieden (welches durch die Bedingung (8) nicht festgelegt ist), d. h.:

Einfache Töne entsprechen Funktionen, die in bezug auf jede der beiden durch den Mittelpunkt des Quadrates gehenden zu den Seiten parallelen Achsen entweder gerade oder ungerade sind.

Mehrfache Töne können stets aus ebensolchen Funktionen linear zusammengesetzt werden.

Führt man ebenso die Substitution $x = y'$; $y = x'$; $w(x, y) = w'(x', y')$ aus, so ist in bezug auf die neuen Variablen die Form der Gleichungen ungeändert geblieben; $w'(x', y')$ muß ebenfalls eine Lösung sein, die zu demselben λ wie $w(x, y)$ gehört, und sich bei einfachen Tönen von $w(x, y)$ nur um das Vorzeichen unterscheiden kann.

Einfache Töne entsprechen also entweder in x und y symmetrischen oder in x und y antisymmetrischen Lösungen: d. h. im ersteren Fall ändert sich w nicht bei Vertauschung von x und y ; im zweiten ändert es sein Vorzeichen.

Mehrfache Töne entsprechen Summen solcher Lösungen.

Dies bedingt, daß wir bei den Entwicklungen nach den $u_m(x)u_n(y)$ uns darauf beschränken können, die diesen verschiedenen Symmetriebedingungen genügenden Lösungen einzeln zu berücksichtigen. Ist w gerade in x und in y , so werden nur gerade $u_m(x)$, $u_n(y)$, d. h. gerade m , n auftreten. Ist es außerdem symmetrisch, so wird $A_{mn} = A_{nm}$; im anderen Falle

$A_{mn} = -A_{nm}$. So werden wir zu den anfangs besprochenen Entwicklungen nach den Aggregaten $u_m(x) u_n(y) \pm u_n(x) u_m(y)$ geführt.

Über den Verlauf der Knotenlinien läßt sich folgendes feststellen:

1. wenn sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern schneiden, so bilden sie nicht notwendig gleiche Winkel untereinander, wie man nach Analogie der Schwingungen von Membranen erwarten könnte;

2. ebensowenig steht eine den Rand schneidende Knotenlinie immer senkrecht auf ihm.

Zum Beweis entwickle man in der Nähe des betreffenden Schnittpunktes w nach Potenzen von x und y . Für den Fall zweier in $x = 0$, $y = 0$ sich schneidender Knotenlinien ist außer $w = 0$ auch $\partial w / \partial x = 0$, $\partial w / \partial y = 0$ für $x = 0$, $y = 0$ zu setzen; also $w = a x^2 + 2 b x y + c y^2 + a' x^3 + \dots$. Bei Membranen ist nun die Gleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ identisch zu erfüllen, woraus für die Glieder niedrigster Ordnung folgt $a + b = 0$; dies ist aber die Bedingung, damit die zwei durch $a x^2 + 2 b x y + c y^2 = 0$ definierten Geraden sich rechtwinklig schneiden. Bei Platten dagegen bringt die Gleichung $\Delta \Delta w = k^2 w$ die Glieder m^{ter} Ordnung mit den Gliedern $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung in Zusammenhang; insbesondere bleiben die Glieder zweiter und dritter Ordnung ganz willkürlich; die Knotenlinien können sich unter beliebigen Winkeln schneiden. Wenn die Winkel, wenigstens bei Rechtecken, dennoch meist 90° betragen, so liegt dies in manchen Fällen an Symmetriegründen, öfter aber auch daran, daß, wie schon hervorgehoben, im Innern eines Quadrates für w die angenäherten Ausdrücke

$$\begin{aligned} & \cos k_m x \cos k_n y \pm \cos k_n x \cos k_m y; \\ & \cos k_m x \sin k_n y \pm \cos k_n x \sin k_m y \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

gelten, welche der Gleichung $\Delta w + (k_m^2 + k_n^2) w = 0$ genügen, und somit die Eigenschaften von Membranenschwingungen haben.

Am Rande ergeben die Bedingungen für die Glieder erster Ordnung in w gar nichts, für die Glieder $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ die Gleichung $a + \mu c = 0$, aus der über den Winkel der Knotenlinie gegen den Rand nichts geschlossen werden kann.

Interessanter sind die Ergebnisse an einer Ecke. Hier muß $(\partial^2 w / \partial x \partial y) = 0$ sein. Ferner ist

$$\begin{aligned} (37) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ (38) \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{nebst den Ableitungen} \\ \text{dieses Ausdruckes nach } y \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (39) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ (40) \quad & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{nebst den Ableitungen} \\ \text{dieses Ausdruckes nach } x \end{array} \right\}$$

endlich

$$(41) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda w$$

eine Gleichung, die beliebig oft nach x und y differentiiert werden darf. Wir legen die Koordinatenachsen in die zwei sich in der Ecke schneidenden Seiten und suchen die Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung

$$w = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

wo u_m ein homogenes Polynom m^{ten} Grades in x und y ist, zu bestimmen. Aus (37) und (39) und $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ folgt zunächst, daß u_2 identisch verschwindet, wenn $\mu \neq 1$ ist, was wir annehmen. Ebenso ergeben (38) und (40), nebst den Differentialquotienten von (37) nach y , (39) nach x , daß $u_3 \equiv 0$ ist. Danach weicht w von dem linearen Ausdruck $u_0 + u_1 = a + bx + cy$ nur in den Gliedern vierter Ordnung ab, was zuerst von Lamb (l. c.) bemerkt worden ist. *An den Ecken wird die Platte nicht merklich deformiert.*

Für die fünf Koeffizienten der Glieder vierter Ordnung ergeben sich durch Differentiation von (37) bis (40) für

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{x=0, y=0}, \text{ usw.}$$

vier Gleichungen, aus (41) eine fünfte; die Koeffizienten derselben sind also sämtlich bestimmt und proportional a :

$$u_4 = \frac{\lambda a}{48(1-\mu)} [x^4 + y^4 - 6\mu x^2 y^2].$$

Ebenso sind die Glieder fünfter Ordnung linear in b, c ; diejenigen sechster und siebenter Ordnung verschwinden usw. Für die Glieder m^{ter} Ordnung ergeben sich durch $m - 2$ fache Differentiation von (37) nach y , (39) nach x ; durch $m - 3$ fache von (38) nach y , (40) nach x vier Gleichungen; die Bildung der $m - 3$ Differentialquotienten von (41) vervollständigt die Zahl der $m + 1$ Gleichungen, durch welche alle Koeffizienten von u_m durch solche von u_{m-4} , also schließlich durch a, b, c und λ ausgedrückt werden können.

Die Entwicklung von w in einer Ecke hängt also nur ab von den vier Konstanten a, b, c, λ . Da wir aber über den weiteren Verlauf des Randes in einiger Entfernung und über die daselbst zu erfüllenden Bedingungen hierbei nichts vorausgesetzt haben, so müßte die Entwicklung von w eine unendliche Anzahl Konstanten enthalten; *der von diesen Konstanten abhängige Teil von w ist an der Stelle $x = 0, y = 0$ nicht nach Potenzreihen entwickelbar, die Lösung ist in den Ecken nicht analytisch.* Nur sehr ausnahmsweise, z. B. in dem oben zitierten, von Lord Rayleigh bemerkten Spezialfall $\mu = 0$ sind einige der Lösungen analytisch, weil es dann gelingt, mit den drei zur Verfügung stehenden Konstanten den Bedingungen an den anderen Rändern zu genügen.

Es ist wahrscheinlich, daß um die Ecken herum die Lösung mehrdeutig ist, so daß die analytische Fortsetzung von $w(x, y)$ über den einen Rand hinaus, um die Ecke herum bis zum anderen Rand und ins Innere, hier nicht die Ausgangswerte von w ergibt.

Für den Fall eingespannter Platten ist ein entwickelbarer Bestandteil überhaupt nicht vorhanden, wie man leicht findet.

Berechnung der Koeffizienten.

Es seien die Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt des Quadrates parallel zu den Seiten gelegt und als Längeneinheit die halbe Quadratseite gewählt, so daß für $u_m(x), u_n(y)$ die Ausdrücke (24), (25) gelten.

Man hat nunmehr einen Ausdruck der Form

$$(42) \quad w_s = \sum_0^s \sum_0^s A_{mn} u_m(x) u_n(y)$$

in das Integral

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} V(A_{mn}) = & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right)^2 - \lambda_s w_s^2 \right\} dx dy \end{aligned} \right.$$

einzutragen, und die Koeffizienten von A_{mn}^2 , $A_{mn} A_{pq}$ zu berechnen. Dies führt zur Berechnung der Größen:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_{mn} = & \int_{-1}^{+1} u'_m(x) u_n(x) dx = \frac{2k_m^4 [u'_m u_n - u_m u'_n]_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \\ \omega_{0m} = & \omega_{1m} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{mn} = \alpha_{nm} = & \int_{-1}^{+1} u'_m u'_n dx = \frac{2 [k_m^4 u_m u'_n - k_n^4 u_n u'_m]_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \\ \alpha_{0n} = \alpha_{n0} = & 0 \end{aligned} \right.$$

$$\int_{-1}^{+1} u'_m u''_n dx = 0 \quad (m \neq n); \quad \int_{-1}^{+1} u''_m^2 dy = k_m^4.$$

Man erhält diese Formeln durch Berücksichtigung der Differentialgleichung für u_m und u_n und partielle Integration. Für $m = n$ sind sie ungültig; hier ergibt sich

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_{mm} = & \frac{-k_m^2 (\text{Co}^2 k_m - \text{cos}^2 k_m)}{\text{Co}^2 k_m + \text{cos}^2 k_m} + 2k_m \frac{\text{cos}^2 k_m \text{Co}^2 k_m \text{Zg} k_m}{\text{Co}^2 k_m + \text{cos}^2 k_m} \\ & \text{für } m \text{ gerade, } (\omega_{00} = 0), \\ \omega_{mm} = & \frac{-k_m^2 (\text{Si}^2 k_m + \text{sin}^2 k_m)}{\text{Si}^2 k_m - \text{sin}^2 k_m} + 2k_m \frac{\text{Si}^2 k_m \text{sin}^2 k_m \text{Cotg} k_m}{\text{Si}^2 k_m - \text{sin}^2 k_m} \\ & \text{für } m \text{ ungerade, } (\omega_{11} = 0), \end{aligned} \right.$$

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{mm} = & \frac{k_m^2 (\text{Co}^2 k_m - \text{cos}^2 k_m)}{\text{Co}^2 k_m + \text{cos}^2 k_m} + 6k_m \frac{\text{cos}^2 k_m \text{Co}^2 k_m \text{Zg} k_m}{\text{Co}^2 k_m + \text{cos}^2 k_m} \\ & \text{für } m \text{ gerade, } (\alpha_{00} = 0), \\ \alpha_{mm} = & \frac{k_m^2 (\text{Si}^2 k_m + \text{sin}^2 k_m)}{\text{Si}^2 k_m - \text{sin}^2 k_m} + 6k_m \frac{\text{sin}^2 k_m \text{Si}^2 k_m \text{Cotg} k_m}{\text{Si}^2 k_m - \text{sin}^2 k_m} \\ & \text{für } m \text{ ungerade, } (\alpha_{11} = 3). \end{aligned} \right.$$

Begnügt man sich mit vier genauen Ziffern, so ist

$$\frac{\cos k_m}{\sqrt{(\mathfrak{E}0)^2 k_m + \cos^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{2}}; \quad \frac{\sin k_m}{\sqrt{(\mathfrak{E}0)^2 k_m - \sin^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

für $m > 2$,

$$\frac{\cos k_2}{\sqrt{(\mathfrak{E}0)^2 k_2 + \cos^2 k_2}} = \frac{-[1 - 0,0173]}{\sqrt{2}}$$

und es folgt für $m > 2$, $n > 2$:

$$(48) \quad \omega_{mn} = \sigma \frac{4 k_m^4 [k_m - k_n]}{k_m^4 - k_n^4},$$

wo $\sigma = 0$, wenn m und n verschiedener Parität sind; $= (-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n gerade; und $= -(-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n ungerade sind. Es ist $k_m = (m - \frac{1}{2})\pi/2$ zu setzen

$$(49) \quad \omega_{mm} = -k_m^2 + k_m,$$

$$(50) \quad \begin{cases} \alpha_{mn} = \sigma \frac{4 [k_n^4 k_n - k_n^4 k_m]}{k_n^4 - k_m^4}, \\ \alpha_{mm} = +k_m^2 + 3k_m. \end{cases}$$

Mit einer Genauigkeit von mindestens 2 Proz. sind diese Formeln auch für m und n gleich 2 anwendbar, und es ist

$$(50a) \quad \begin{cases} \omega_{0n} = 0, \quad \omega_{n0} = 2k_n (-1)^{\frac{n}{2}} \begin{cases} \text{für } n \text{ gerade,} \\ = 0 \text{ für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \\ \alpha_{0n} = \alpha_{n0} = 0, \\ \omega_{1n} = 0, \quad \omega_{n1} = 2\sqrt{3}(k_n - 1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \begin{cases} \text{für } n \text{ ungerade,} \\ = 0 \text{ für } n \text{ gerade.} \end{cases} \\ \alpha_{11} = 3, \quad \alpha_{1n} = \alpha_{n1} = 2\sqrt{3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

Der Koeffizient von A_{mn}^2 im Integral V wird nun

$$(51) \quad k_m^4 + k_n^4 + 2\mu \omega_{mm} \omega_{nn} + 2(1 - \mu) \alpha_{mm} \alpha_{nn} - \lambda_s = \alpha_{mn}^{(2n)} - \lambda_s.$$

Der Koeffizient von $2A_{mn} A_{pq}$

$$(52) \quad \mu [\omega_{mp} \omega_{qn} + \omega_{pm} \omega_{nq}] + 2(1 - \mu) \alpha_{nq} \alpha_{mp} = \alpha_{mn}^{(2q)}$$

und es sind die Gleichungen zu lösen

$$(53) \begin{cases} 0 = (a_{00}^{(00)} - \lambda_s) A_{00} + a_{01}^{(00)} A_{01} + a_{10}^{(00)} A_{10} + \dots + a_{ss}^{(00)} A_{ss}, \\ 0 = a_{00}^{(01)} A_{00} + (a_{01}^{(01)} - \lambda_s) A_{01} + a_{10}^{(01)} A_{10} + \dots + a_{ss}^{(01)} A_{ss}, \\ \dots \\ 0 = a_{00}^{(ss)} A_{00} + a_{01}^{(ss)} A_{01} + a_{10}^{(ss)} A_{10} + \dots + (a_{ss}^{(ss)} - \lambda_s) A_{ss}. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung wird man die aus der Symmetrie der Lösung sich ergebenden Beziehungen zwischen den A_{mn} sogleich einführen: bei einer in x und y geraden symmetrischen Lösung kommen nur gerade Indizes in Betracht und es ist $A_{mn} = A_{nm}$; die Zahl der Unbekannten reduziert sich so bei gegebenem s beträchtlich. Ähnliches gilt für die anderen Fälle von Symmetrie. Nichtsdestoweniger wäre eine Rechnung auf drei bis vier Stellen für eine größere Anzahl von Eigenschwingungen undurchführbar, wenn das Gleichungssystem nach dieser Reduktion nicht die Eigenschaft hätte, daß die $a_{mn}^{(mn)}$ der Diagonalglieder erheblich größer sind und mit m und n rascher wachsen als die übrigen $a_{mn}^{(pq)}$. Infolgedessen läßt sich das System (53) mit einem geringen Aufwand an Rechnung durch sukzessive Approximationen leicht lösen. Wir wollen dies für den Fall in x und y ungerader, aber symmetrischer Schwingungen zeigen, zu welchen der Grundton der Platte gehört. Wir wählen für μ den Wert $\mu = 0,225$ (vgl. unten), und entwickeln bis zu den Gliedern in u_5 , setzen also $s = 5$. Es sei abkürzend $u_m(y) = v_m$ gesetzt und

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 + v_1 u_3) + A_2 u_3 v_3 + A_3 (u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_4 (u_3 v_5 + u_5 v_3) + A_5 u_5 v_5.$$

Das System (53) wird hier

$$(54) \begin{cases} 0 = (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5, \\ 0 = -16,04 A_0 + (411,8 - \lambda) A_1 - 120,0 A_2 - 133,6 A_3 + 166,8 A_4 + 140 A_5, \\ 0 = +18,60 A_0 - 240,0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218,0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\ 0 = +16,04 A_0 - 133,6 A_1 + 109,0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\ 0 = -18,6 A_0 + 166,8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6303 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\ 0 = +18,6 A_0 + 280 A_1 + 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + [13674 - \lambda] A_5. \end{cases}$$

Würde sich das System wirklich auf seine Diagonalglieder beschränken, so wäre die kleinste Wurzel $\lambda = 13,95$, die nächste 411,8 usw.; für die erste bleibt A_0 willkürlich, die

anderen A_i sind Null; für die zweite gilt dies für A_1 usw. Da es auf den konstanten Faktor nicht ankommt, setzen wir, um den Grundton zu erhalten, $A_0 = 1$, und in erster Annäherung $\lambda_0 = 13,95$. Dann ergeben die fünf letzten Gleichungen die übrigen A_i . *Wesentlich ist nun, daß diese A_i gegen 1 klein sind*, so daß sie nur mit geringerer Genauigkeit berechnet zu werden brauchen. Beschränkt man sich auf vier Stellen beim Schlußresultat, *so sind sämtliche Operationen, auch schon die Berechnung der ω_{mn} und α_{mn} und ihrer in den $a_{mn}^{(pq)}$ auftretender Produkte, mit dem Rechenschieber ausführbar*, wodurch bei dem Charakter dieser Operationen die Rechnung sich sehr einfach und sicher gestaltet. Direkt mit vier Stellen zu berechnen sind bloß die in den ω_{mn} , α_{mn} und den $a_{mn}^{(mn)}$ auftretenden Potenzen der k_i .

Wir berechnen für die A_i eine erste Approximation, indem wir alle Glieder rechts vernachlässigen neben den Diagonalgliedern, es wird also

$$A_1 = \frac{+16,04}{411,8 - 13,95}, \quad A_2 = \frac{-18,60}{1686 - 13,95}, \quad A_3 = \dots$$

Diese A_i sind ersichtlich sämtlich klein. Aus der ersten Gleichung folgt eine kleine Korrektur für λ :

$$\delta\lambda = -32,08 A_1 + 18,60 A_2 + 32,08 A_3 - 37,20 A_4 + 18,60 A_5.$$

Diese Werte der A_i und $\lambda + \delta\lambda$ setzen wir in (54) ein; das Ergebnis wird in den einzelnen Gleichungen nicht Null sein, aber doch eine kleine Zahl. Die Korrekturen der A_i , die dadurch nötig werden, berechne man wieder unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder; eine oder zwei sukzessive Korrekturen genügen meist, um die vierte Stelle bis auf wenige Einheiten festzustellen.

Hat man eine erste Approximation schon berechnet, unter Berücksichtigung einer kleineren Anzahl Glieder der Entwicklung, so wird man sie bei der Berechnung der erweiterten Formel vorteilhaft benutzen können. Im vorliegenden Falle ist es z. B. zweckmäßig, zuerst das System

$$(55) \quad \begin{cases} (13,95 - \lambda) A_0 - 32,08 A_1 = 0 \\ -16,04 A_1 + (411,8 - \lambda) A_1 = 0 \end{cases}$$

zu lösen, welches dem Ansatz

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 + v_1 u_3)$$

entspricht; diese Werte trägt man in das vollständigere System (54), und berechnet nun die Korrekturen δA_0 , δA_1 und $A_2 \dots A_5$ in der angegebenen Weise.¹⁾

Die Korrektur, die λ erfährt, ist *stets negativ*, weil λ das Minimum des oben besprochenen Integrals ist, welches bei der Anwendung von mehr Konstanten notwendig abnehmen muß.

Nimmt man $A_1 = 1$, $\lambda = 411,8$, und berechnet ebenso die Korrekturen, so erhält man den nächsten Oberton, der dieselbe Symmetrie besitzt. Wieder ist die Korrektur von λ negativ; dies tritt jedoch erst ein für das System (54), nicht schon für die erste Approximation (55). Der Grund liegt darin, daß das neue λ einem Minimumwert des Integrals nur entspricht, wenn die Bedingung

$$\iint w_0 w \, dx \, dy = 0 \quad (w_0 = \text{Grundton})$$

hinzugefügt wird, welcher durch den Ansatz (55) nur roh genügt wird, während (55) sie innerhalb der Genauigkeit der Rechnung erfüllt. In dieser Bedingung liegt auch, wenn mehrere Oberschwingungen mittels (54) berechnet worden sind, eine einfache Kontrolle der Rechnung. Denn ist $w = A_0 u_1 v_1 + \dots$ die eine derselben, $w' = A_0' u_1 v + \dots$ irgend eine andere, so ist

$$\begin{aligned} \iint w w' \, dx \, dy = & A_0 A_0' + 2 A_1 A_1' + A_2 A_2' + 2 A_3 A_3' \\ & + 2 A_4 A_4' + A_5 A_5' \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck muß einen Betrag haben, der zu vernachlässigen ist.

Der Umstand, daß die Diagonalglieder größer sind und rascher wachsen als die übrigen, gilt auch für höhere Approximationen, und folgt daraus, daß die ω_{mn} , α_{mn} ($m \neq n$), die in die anderen Glieder eingehen, nach (48), (49) und (50) wesentlich langsamer wachsen als die ω_{mm} und α_{nn} , k_m^4 und k_n^4 der

1) Die erste Annäherung gibt, wenn $A_0 = 1$ ist:

$$A_1 = 0,0408; A_2 = -0,0053; A_3 = -0,0036; A_4 = +0,0019; A_5 = -0,0022.$$

Exakt ist:

$$A_1 = 0,0394; A_2 = -0,0040; A_3 = -0,0034; A_4 = +0,0011; A_5 = -0,0019;$$

und $\lambda = 12,43$ statt $13,95$.

Diagonalglieder. Für höhere Obertöne, die komplizierten Funktionen entsprechen, ist natürlich die Entwicklung weniger rasch konvergent; immerhin bleibt auch hier der Fehler, der bei Beschränkung auf das Hauptglied $u_m v_n \pm v_m u_n$ entsteht, von der Ordnung $1/10$, und dies bedingt, wegen des raschen Oszillierens der u, v für größere m , für die Klangfiguren nur Fehler von etwa 1 Proz.; für die λ von 5—10 Proz.

Die Aggregate $u_0 v_0$; $u_0 v_1 \pm u_1 v_0$, die linearen Funktionen von x und y entsprechen, ergeben $\lambda = 0$; dies ist selbstverständlich, da die Platte eben bleibt. Aus dem Ausdruck von J verschwinden sie, und können daher bei allen Rechnungen weggelassen werden. *Bei Entwicklungen nach den Eigenfunktionen w_s der Platte aber müssen sie beibehalten werden, ebenso wie u_0 und u_1 für den Stab.*

Im folgenden sind die höheren Approximationen für diejenigen Töne angegeben, die in erster Annäherung den Formeln $u_m v_n \pm v_m u_n$ entsprechen, mit $m < 4, n < 4$; es sind die Glieder bis zu $m = n = 5$ beibehalten, womit die dritte Stelle bis auf 1—2 Einh. sichergestellt ist. Dies bedingt für die Klangfiguren eine noch geringere Unsicherheit, die ganz innerhalb der Beobachtungsfehler liegt.

Dem Aggregat $u_m v_n + v_m u_n$ entspricht stets ein etwas größeres λ , also ein höherer Ton, als dem Aggregat $u_m v_n - v_m u_n$, wenn m und n beide gerade oder ungerade sind. In dem anderen Falle liegt ein Doppelton vor, und es sind die Schwingungen $w = u_m v_n, w = v_m u_n$ auch einzeln möglich, ferner jede lineare Verbindung der Form $A u_m v_n + B v_m u_n$.

Zur Berechnung der *Klangfiguren*, d. h. der Linien, in welchen w verschwindet, wird man zweckmäßig die beobachteten Werte als erste Approximation benutzen.¹⁾ Bei der Berechnung der Korrekturen, die stets sehr klein sind, genügt die Berücksichtigung des Hauptgliedes der Formel. Von m und $n = 4$ an bis m und $n = 7$ sind die Klangfiguren auf Grund der vereinfachten Formel $u_m v_n \pm u_n v_m$ berechnet, da

1) Tabellen für u_2, u_3 gibt Lord Rayleigh, Sound § 178; für vier Stellen sind die zweiten Differenzen bei der Interpolation zu berücksichtigen. Zur direkten Berechnung auch der $u_4, u_5 \dots$ benutzt man mit Vorteil die „Tafeln der Funktionen \cos und \sin “ (Kreis- und Hyperbelfunktionen) von Dr. Carl Burrau, Berlin 1907.

hier genaue Beobachtungen nicht vorliegen und auch schwer möglich sind.

Die Tonhöhen.

Aus einem bekannten λ ergibt sich nach (4) die Anzahl Schwingungen pro Sekunde

$$(56) \quad v = \frac{h}{4\pi} \sqrt{\frac{E\lambda}{3\rho(1-\mu^2)}}.$$

Genaue Beobachtungen über die *absoluten* Tonhöhen unter genauer Angabe der Elastizitätskonstanten, des Verhältnisses $2h$ der Dicke zur halben Seite der Platte und der Dichte ρ des betreffenden Materials sind mir nicht bekannt. Die *relativen* Tonhöhen der verschiedenen Obertöne gegen den Grundton, wenn für diesen der Ton G gesetzt wird, hat Chladni¹⁾ angegeben. Es ist die gleichmäßig temperierte Skala vorausgesetzt; ein + bedeutet, daß der wahrgenommene Ton etwas höher war, ein – daß er tiefer war. Leider ist von Chladni nicht angegeben, ob er Metall oder Glas benutzt habe, wodurch der Wert von μ erheblich unsicher wird; vielleicht hat er Platten aus beiderlei Material in einzelnen Fällen gebraucht, im allgemeinen jedoch zeigt die Übereinstimmung mit unserer für Glas ausgeführten Rechnung, daß er Glasplatten benutzt hat. Durch den Übergang zu Metall wird die Tonhöhe leicht um eine Sekunde verändert, wie dies beim Kreis schon die Berechnungen von Kirchhoff gezeigt haben.

Die Tonhöhen, die auf Grund exakterer Formeln (unter Berücksichtigung höherer Approximationen) berechnet sind, stimmen *genau* mit Chladnis Angaben überein. Es sind dies die Hauptschwingungen, in der Tabelle mit * bezeichnet. Die übrigen, nach dem einfachen Ansatz $w = u_m v_n \pm v_m u_n$ berechneten, sind teilweise um $\frac{1}{2}$ Ton zu hoch. Dies wird uns nicht wundern, da ja die entsprechenden λ , wie oben bemerkt, stets zu groß sind, und zwar sind sie bei den Hauptschwingungen, wie sich gezeigt hat, meist um 5–10 Proz. zu groß, was einem viertel bis einem halben Tone entspricht. So ist λ aus dem Ansatz $u_1 v_1$ gleich 13,74; bei genauer Berechnung dagegen

1) E. F. Chladni, Akustik, p. 138. Leipzig 1802.

12,43 (vgl. oben). Würde man die höheren λ auf den Grundton beziehen, wie er in erster Approximation gegeben ist, so würden die Töne um $1/2$ Ton zu erniedrigen sein, und die Übereinstimmung wäre so gut wie sie überhaupt, bei der oben erwähnten Unsicherheit, erwartet werden kann.

In der folgenden Tabelle sind die Schwingungen nach ihren Tonhöhen geordnet, und jedesmal die charakteristischen Hauptglieder $u_m v_n \pm v_m u_n$ angegeben, nebst den zugehörigen λ . Das Zeichen \pm deutet einen Doppelton an.

Tabelle der Tonhöhen ($\mu = 0,225$).

Hauptglieder	λ	ber.	beob.	Hauptglieder	λ	ber.	beob.
$u_1 v_1$	12,43	G^*	G	$u_3 v_4 \pm u_4 v_3$	3240	$g_3 +$	fis_3
$u_0 v_2 - v_0 u_2$	26,40	d^*	d	$u_5 v_2 \pm u_2 v_5$	3927	$a_3 +$	$gis_3 +$
$u_0 v_2 + v_0 u_2$	35,73	e^*	e	$u_4 v_4$	5480	$ais_3 +$	ais_3
$u_1 v_2 \pm u_2 v_1$	80,8	h^*	h	$u_0 v_6 - u_6 v_0$	5500	$c_4 -$	$-^2)$
$u_0 v_3 \pm u_3 v_0$	237,1	$gis_1^* +$	$gis_1 +$	$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5570	$c_4 -$	$ais_3 -$
$u_1 v_1$	266,0	$ais_1^* -$	$ais_1^* -$	$u_0 v_6 + u_6 v_0$	5640	$c_4 -$	$-^2)$
$u_1 v_3 - u_3 v_1$	316,1	h_1^*	h_1	$u_1 v_6 \pm v_1 u_6$	6036	$c_4 +$	$c_4 -$
$u_1 v_3 + u_3 v_1$	378	cis_2^*	cis_2	$u_3 v_5 + u_5 v_3$	6303	cis_4	$c_4 -$
$u_2 v_3 \pm u_3 v_2$	746	$fis_2^* +$	fis_2	$u_2 v_6 - u_6 v_2$	7310	$d_4 +$	$cis_4 +$
$u_0 v_4 - v_0 u_4$	886	gis_2	gis_2	$u_2 v_6 + u_6 v_2$	7840	$dis_4 -$	$d_4 -$
$u_0 v_4 + v_0 u_4$	941	$gis_2 +$	$gis_2 +$	$u_5 v_4 \pm u_4 v_5$	9030	e_4	dis_4
$u_1 v_4 \pm u_4 v_1$	1131	ais_2	$ais_2 -$	$u_6 v_3 \pm u_3 v_6$	10380	f_4	e_4
$u_3 v_3$	1554	$c_3 +$	c_3	$u_5 v_5$	13670	$g_4 +$	$fis_4 +$
$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1702	$d_3 -$	cis_3	$u_6 v_4 - u_4 v_6$	13840	$g_4 +$	$g_4 +$
$u_2 v_4 + u_4 v_2$	2020	dis_3	d_3	$u_6 v_4 + u_4 v_6$	15120	$gis_4 +$	$g_4 +$
$u_0 v_6 \pm v_0 u_6$	2500	$f_3 -$	$f_3 -$	$u_6 v_5 \pm u_5 v_6$	20400	h_4	$ais_4 -$
$u_1 v_5 - v_1 u_5$	2713	fis_3	$fis_3 -$	$u_6 v_6$	28740	d_6	$-^2)$
$u_1 v_5 + v_1 u_5$	2945	$fis_3 +$	$fis_3^1)$				

Dabei ist, um daran zu erinnern, $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt.

Die Übereinstimmung der mit * bezeichneten Schwingungen mit Chladnis Beobachtung ist eine vollkommene, während nach Kirchhoffs Rechnungen für den Kreis Abweichungen sich zeigen, die für $\mu = 1/4$ (Poisson) kleiner sind als für

1) Von Chladni von dem vorigen Ton nicht getrennt.

2) Von Chladni nicht beobachtet.

$\mu = 1/3$ (Wertheim). Dies zeigt, daß Chladni auch hier mit Glasscheiben operiert hat, und daß für Glas μ jedenfalls kleiner als $1/4$ ist, und von dem hier benutzten Wert 0,225 nur wenig abweicht.

Benutzt man für eine Schwingung den angenäherten Ausdruck $w_{mn} = u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$, so berechnet sich, wie schon hervorgehoben, das zugehörige angenäherte λ aus der Formel

$$\lambda = \frac{J}{a},$$

wo J_{mn} das für $w = w_{mn}$ gebildete Integral (7) ist, während

$$a = \iint w_{mn}^2 dx dy.$$

Setzt man hierin die für u_m (p. 752) gegebenen Ausdrücke ein, so wird

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = k_m^4 + k_n^4 + \mu [2 \omega_{mn} \omega_{nn} \pm \omega_{mn}^2 \pm \omega_{nm}^2] \\ \quad + 2(1 - \mu) [\alpha_{mn} \alpha_{nn} \pm \alpha_{mn}^2], \quad m \neq n, \end{array} \right.$$

$$(58) \quad \lambda = 2k_m^4 + 2\mu \omega_{mm}^2 + 2(1 - \mu) \alpha_{mm}^2 \quad \text{für } m = n.$$

Bei $m = n$ kommt das untere Vorzeichen natürlich nicht in Betracht; bei den Doppeltönen verschwinden in λ die Glieder mit den doppelten Vorzeichen, so daß beide Vorzeichen dasselbe λ ergeben.

Nach den Gleichungen (48) bis (50a) sind die ω_{mm} , α_{mm} zweiten Grades in den k_i ; die α_{mn} und ω_{mn} für $m \neq n$ dagegen ersten Grades. Zur Aufstellung einer *angenäherten Formel für λ* beschränken wir uns auf die Glieder vierten und dritten Grades; dann können wir die \pm Glieder in λ gegen die übrigen vernachlässigen (wodurch je zwei benachbarte Töne in einem vereinigt werden). Für die ω_{mm} , α_{mm} benutzen wir die Ausdrücke (49), (50), (50a), so ergibt sich angenähert

$$(59) \quad \lambda = (k_m^2 + k_n^2)^2 + 2\mu k_m^2 k_n^2 + (6 - 8\mu) k_m k_n (k_m + k_n),$$

wobei

$$k_m = \frac{\pi}{2} \left(m - \frac{1}{2} \right)$$

ist; für $m = 0$ und $m = 1$ ist dagegen $k_0 = k_1 = 0$ zu setzen.

Ist $u = 0$, so schwingt die Fläche angenähert wie ein Stab, und es stimmen, wie bei einem solchen, die Tonhöhen

mit den Quadraten der ungeraden Zahlen angenähert überein, wie schon Chladni bemerkte. Für $n = 1$ ergibt sich dasselbe Resultat; nach der Formel (57) sind die entsprechenden Töne aber in Wirklichkeit etwas verschieden, die Abweichung ist bei den Grundtönen relativ am bedeutendsten. Sind endlich m und n genügend groß, so ergibt sich das *asymptotische Gesetz der λ*

$$(60) \quad \lambda = [m^4 + n^4 + 2(1 - \mu)m^2 n^2] \left(\frac{\pi}{2}\right)^4.$$

Die Schwingungszahlen sind der Wurzel aus λ proportional.

Die systematischen Fehler bei der Beobachtung Chladnischer Klangfiguren.

Für eine Anzahl von Klangfiguren hat Strehlke¹⁾ sehr genaue Messungen an verschiedenen sorgfältig gearbeiteten quadratischen und kreisförmigen Platten aus Spiegelglas angestellt. Insbesondere hat er drei quadratische Platten benutzt, deren Dicke etwa $\frac{1}{70}$, $\frac{1}{65}$ und $\frac{1}{40}$ der Seite war. Die Beobachtungen stimmen für die drei Platten innerhalb 0,001 der Seitenlänge, manchmal noch genauer. Diese Genauigkeit erweist sich jedoch für den Vergleich mit der Theorie als illusorisch und ist durch den Umstand ermöglicht, daß Strehlke die Unterstützung und die Erregung durch den Violinbogen für eine bestimmte Klangfigur bei allen Versuchen genau an dieselben Stellen verlegte. Welcher Art nun bei diesen Versuchen die wichtigste systematische Fehlerquelle ist, ergibt die Diskussion der Messungsergebnisse in folgender Weise:

In einer Klangfigur (vgl. unten Fig. 21), in welcher, der Symmetrie nach, die beiden Diagonalen Knotenlinien sein sollten, findet Strehlke an deren Stelle zwei hyperbelartige Kurven, deren Scheitel im Abstand von 0,037 (die Quadratseite als Einheit gesetzt) lagen. Auch Chladni gibt an, daß er dies Verhalten *unter Umständen* beobachtet habe. Theoretisch ist dies ausgeschlossen; denn durch eine Drehung um 90° entsteht bei solcher Dissymmetrie eine neue Figur, die der-

1) F. Strehlke, Repertorium der Physik, von H. W. Dove, 3. p. 112 ff. Berlin 1839; vgl. auch Pogg. Ann. 95. p. 577. 1855; 146. p. 319. 1872.

selben Tonhöhe entsprechen muß; es läge also ein Doppelton vor und eine unendliche Anzahl von Figuren müßte möglich sein; dies widerspricht der Erfahrung, die zweite Figur muß also mit der ersten identisch sein, die Diagonalen sind Knotenlinien. Wie kommt diese Abweichung zustande?

Es ist klar, daß zur Überwindung der Reibung die Schwingungsamplitude ein gewisses, von der Beschaffenheit der Oberfläche und des Sandes abhängiges Minimum $\pm \epsilon$ überschreiten muß; unterhalb desselben bleibt der Sand unbeweglich. Wo sich die zwei Durchmesser schneiden, ist aber außer $w = 0$ auch

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Bezogen auf die Durchmesser als Achsen ist der Ausdruck für die Amplitude $w(x, y)$ in erster Annäherung

$$w = A \cdot xy \quad (A = \text{const.})$$

und der Sand bleibt in indifferentem Gleichgewicht innerhalb eines Gebietes, welches von den zwei Hyperbeln

$$\pm \epsilon = Axy$$

begrenzt wird. Ob der Sand sich hier gleichmäßig verteilt oder gegen die einen oder anderen Ränder des Gebietes gedrängt wird (beide Fälle sind beobachtet), hängt von der Stelle ab, wo der Bogen angelegt wird, von welcher aus, neben dem betrachteten Ton, auch Nebentöne von verschiedener, zum Teil beträchtlicher Höhe sich als Wellen ausbreiten und eine Bewegung des Sandes bewirken können. Theoretisch ist der Vorgang nicht zu übersehen wegen der Reflexionen an den Seiten des Quadrates. Bei dem besprochenen Versuch von Strehlke ist der Sand an die Ränder des Gebietes getrieben worden, womit die beträchtliche Abweichung von der Theorie sich erklärt. Allein dieselbe Ursache ist auch in der ganzen Ausdehnung der Klangfiguren wirksam, wenn auch hier der Anstieg von der Amplitude Null zu $\pm \epsilon$ rascher erfolgt, der mögliche Fehler also kleiner wird. Aber mehrere Tausendstel der Seitenlänge beträgt er unter allen Umständen, so daß die Übereinstimmung der Versuche Strehlkes auf weniger als $\frac{1}{1000}$ der Seite untereinander, und ihre Abweichung um mehrere Tausendstel, ja

um beinahe $\frac{1}{100}$ (in einzelnen Fällen) von der Theorie nichts besagt.

Hierher gehört auch die von Strehlke und schon von Chladni gemachte Beobachtung, daß bei einer Kreisscheibe, wenn drei oder mehr konzentrische Kreise die Klangfigur bilden, der innerste Kreis entweder diffus bleibt, oder eine Ellipse bildet, während die anderen Kreise keine meßbare Abweichung von der Symmetrie zeigen. Strehlke¹⁾ erblickt den Grund in einer ungenügenden Homogenität der Platte; doch ist kaum begreiflich, warum diese Ursache stets nur den innersten Kreis beeinflussen sollte, und warum die Kreise manchmal einfach diffus bleiben. Dies folgt aber ohne weiteres aus dem Umstand, daß die Amplitude bei drei Kreisen gering ist, und vom Rand gegen die Mitte zu im Mittel abnimmt; daraus folgt um den innersten Kreis eine besonders große Zone indifferenten Gleichgewichtes für den Sand. Wird nun die Amplitude sehr erhöht, etwa indem man zum Bestreichen der Platte mit dem Bogen ein in die Mitte eingebohrtes kreisförmiges Loch benutzt (Strehlke), so werden die Sandkörner zum Teil an den Rand des Bereiches getrieben, es entsteht eine elliptische Figur, deren Achsenrichtungen von der Streichrichtung abhängen. Bei Strehlke war die eine Achse um $+0,003$ zu groß, die andere um $0,003$ zu klein (Durchmesser der Platte = 1); eine Größenordnung, wie sie a priori zu erwarten war.

Den Einfluß der Streichrichtung auf die Knotenlinien hat auch Zeissig²⁾ direkt beobachtet.

Den Wert von μ für seine Platten hat Strehlke nicht angegeben, wodurch der Vergleich mit der Theorie ebenfalls etwas (wenn auch nur wenig) unsicher wird. Für Glas haben verschiedene Beobachter Werte zwischen $0,210$ (Voigt) und $0,257$ (Caulon) erhalten; ich habe das Mittel $\mu = 0,225$ gewählt, welches jedenfalls nur um $\frac{1}{10}$ fehlerhaft sein wird; auf die Knotenlinien ist dies ohne merklichen Einfluß; bei den Haupttönen, die in höherer Approximation berechnet werden, ist die Korrektion für $\mu = 0,225 + \delta\mu$ gegeben; genaue Be-

1) F. Strehlke, Pogg. Ann. 95. p. 594. 1855.

2) J. Zeissig, Inaug.-Diss.; Wied. Ann. 64. p. 360. 1898.

obachtung der Verhältnisse der Schwingungszahlen können in der Tat dazu dienen, μ zu bestimmen.

Der Einfluß der endlichen Dicke h der Platte dürfte wohl erst in den Gliedern zweiter Ordnung in Betracht kommen. Da Dicke/Seite der Platte bei Strehlke = $1/70$ bis $1/40$ war, gibt dies Fehler von der Ordnung 0,0002 bis 0,0006 (Seite = 1), die nicht in Betracht kommen.

Durch die Art der Unterstützung, vor allem aber durch das Bestreichen des Plattenrandes mit dem Bogen, wird, wie Lord Rayleigh (l. c.) hervorhebt, die Bewegung zu einer nicht ganz freien, was sowohl auf die Lage der Knotenlinien wie auch auf die Tonhöhe von Einfluß sein kann. Endlich sind diese Bewegungen stark gedämpft, vor allem durch die Fortleitung des Schalles durch die Luft, zum Teil auch durch innere Reibung: auch hierin liegt eine Abweichung vom theoretischen Ansatz, die aber wohl in entgegengesetztem Sinne wirkt wie der Einfluß des angelegten Bogens, so daß sich beide Fehlerquellen zum Teil kompensieren dürften.

Die Klangfiguren quadratischer Platten mit freien Rändern.

Im folgenden sind die Formeln für die Eigenschwingungen, die sich auf Grund der mitgeteilten Methode ergeben, zusammengestellt und mit den Beobachtungen von Strehlke verglichen.¹⁾ Bei den höheren Eigenschwingungen, wo keine genauen Messungen vorliegen, sind die angenäherten Formeln (I) p. 739 zugrunde gelegt; der Fehler (1—2 Proz.) ist bei dem Maßstab der Figuren bedeutungslos, und bei den mannigfachen Schwierigkeiten und Fehlerquellen der experimentellen Herstellung der Figuren dürften die hier gegebenen die Wahl der Unterstützungspunkte und somit die experimentelle Darstellung wesentlich erleichtern.

Die im folgenden mitgeteilten 46 Klangfiguren erschöpfen ungefähr das, was ohne allzugroße Schwierigkeit experimentell erreicht werden kann; sie sind von Chladni in seiner Akustik

1) Die Ausdrücke für w sind auf drei Stellen genau, doch wird die vierte Stelle geführt, um eine Anhäufung von Fehlern zu vermeiden, die die dritte Stelle stark beeinflussen könnten.

zum größten Teil gegeben worden, jedoch sind die Zeichnungen meist nur ziemlich roh, wie schon der Vergleich mit Strehlke zeigt, und es sind Töne als doppelt und ineinander transformierbar bezeichnet, die es nur durch die Methode der Herstellung geworden sind; dementsprechend sind diese Figuren stark verzerrt.

Für die Doppeltöne wären an und für sich unendlich viele Figuren möglich. Den Ausdrücken $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$ entsprechen hier zwei Figuren, die auseinander durch Drehung um 90° entstehen; den einzelnen Schwingungen $u_m(x)u_n(y)$ Linien, die angenähert parallel zu den Seiten verlaufen, und deren Lage den Wurzeln von $u_m(x) = 0$ bzw. $u_n(y) = 0$ entspricht; sie schneiden also jede Parallele zur x -Achse (bzw. zur y -Achse) in Punkten, die genau so liegen wie die n (bzw. m) Knotenpunkte der n^{ten} (bzw. m^{ten}) Schwingung eines Stabes von gleicher Länge mit freien Enden. Für jeden Doppelton wird eine Figur, die $u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x) = 0$ entspricht, und eine solche, die $u_m(x)u_n(y) = 0$ entspricht, gegeben. Wie man die Schar der unsymmetrischen, der allgemeinen Formel

$$A u_m(x)u_n(y) + B u_n(x)u_m(y) = 0$$

entsprechenden Figuren ihrem ungefähren Verlauf nach daraus herstellen kann, ist oft für den Fall von Membranen usw. beschrieben worden; da für jeden Ton diese Figuren sämtlich durch gewisse feste Punkte, die *Pole* der Figur gehen müssen, wird ihre Konstruktion dadurch auch erleichtert. Diese Pole sind (in erster Annäherung) die Nullstellen der Gleichungssysteme $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$ und $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$. Ihre Lagen sind also auch mit denen der Knotenpunkte freier Stäbe identisch.

Die Figuren sind zunächst nach den Symmetrien der Schwingung geordnet; innerhalb jeder Abteilung nach der Tonhöhe. Es sind angegeben die Formel für w , der Wert von λ für $\mu = 0,225$ (Glas) und die Korrektur dieses Wertes für $\mu = 0,225 + \delta\mu$ (wo $\delta\mu$ klein ist); letztere allerdings nur bei den genau berechneten λ , wo sie allein einen Sinn hat.

Aus dem schon besprochenen Sturm-Liouvilleschen Satz, daß ein Ausdruck der Form $A u_m(x) + B u_n(x)$, wo $m \geq n$

ist, höchstens m und mindestens n Wurzeln hat, folgt, daß eine Parallele zu einer Seite des Quadrats die durch $u_m(x)u_n(y) \pm u_m(y)u_n(x) = 0$ gegebene Figur in höchstens m und mindestens n Punkten schneidet. Die Korrekturen, die die höhere Approximation einführt, sind zu klein, um hieran etwas zu ändern.

Ist (Vorzeichen +) die Diagonale $x = y$ keine Knotenlinie, so wird sie von Knotenlinien (und zwar senkrecht) geschnitten in den Punkten, deren Koordinaten $x = y$ die Wurzeln von $u_m(x) = 0$ und $u_n(x) = 0$ sind, also in $n + m$ Punkten, deren Abszissen und Ordinaten wieder den Knotenpunkten schwingender Stäbe entsprechen. Auf scheinbare Ausnahmen, die durch nahe Koinzidenz zweier Wurzeln entstehen, wird unten hingewiesen.

Ist das Vorzeichen $-$ genommen, so gehört stets die Diagonale $x = y$ zur Klangfigur. Sind dann n und m beide gerade oder ungerade, so gilt gleiches von der zweiten Diagonale. Wenn nicht, so liegt ein Doppelton vor, der sich somit durch seine geringere Symmetrie kennzeichnet.

Sind m und n ungerade, so gehören die beiden Koordinatenachsen (Seitenhalbierenden) zur Figur. Diese Sätze ließen sich leicht vermehren; sie gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die zugehörigen Indizes m, n zu finden.

Es ist im folgenden wieder abkürzend $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt, wo die $u_n(x)$ die durch (24), (25) p. 752 gegebenen Funktionen sind; die x -Achse ist nach rechts gelegt, die y -Achse nach oben, durch den Mittelpunkt des Quadrats parallel den Seiten. Längeneinheit ist die halbe Seitenlänge. Wegen der Symmetrien hat man beim Vergleich mit der Erfahrung nur positive x und y zu berücksichtigen.

A. Lösungen, die in x und y ungerade und symmetrisch sind.

I. Grundton. $\lambda = 12,43 - 18,0 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w = & u_1 v_1 + 0,0394(u_1 v_3 + v_1 u_3) \\ & - 0,0040 u_3 v_3 - 0,0034(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\ & + 0,0011(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,0019 u_5 v_5. \end{aligned}$$

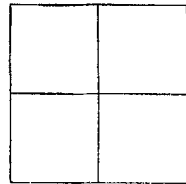


Fig. 1.

II. $\lambda = 378 - 57 \delta \mu$.

$$\begin{aligned}
 w = & -0,075 u_1 v_1 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) \\
 & + 0,173 u_3 v_3 + 0,045 (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\
 & - 0,015 (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,029 u_5 v_5.
 \end{aligned}$$

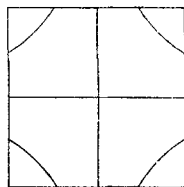


Fig. 2.

Es ist

y beob.:	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,893
x beob.:	0,937 ₅	0,8750	0,812 ₅	0,7500	0,687 ₅	0,6250	0,562 ₅
x ber. - x beob.:	-0,003	-0,002	0,000	-0,001	-0,000 ₅	0,000	0,000

Nach der Formel $u_1 v_3 + u_3 v_1 = 0$ ergeben sich die Koordinaten der Punkte, in denen diese Kurven die Diagonalen schneiden, zu $x = y = 0,736$ (beob. 719); die der Randpunkte der Kurven: $x = 1$, $y = 0,533$ (beob. 0,487). Da die Seite gleich 2 ist, würde die angenäherte Formel für die Kurve Fehler von 0,8 bis 2,2 Proz. der Seite geben, was im Maßstab der Zeichnung schon kaum zu bemerken wäre — geschweige die nach der genauen Formel erhaltenen Fehler.

III. $\lambda = 1554$.

$$\begin{aligned}
 w = & 0,009 u_1 v_1 - 0,075 (u_1 v_3 + v_1 u_3) \\
 & + u_3 v_3 - 0,057 (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\
 & + 0,121 (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0,007 u_5 v_5.
 \end{aligned}$$

Messungen fehlen.

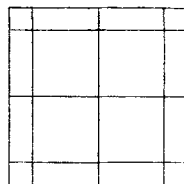


Fig. 3.

IV. $\lambda = 2945$.

$$w = u_1 v_5 + u_5 v_1.$$

Diese Figur fehlt bei Chladni.

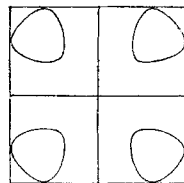


Fig. 4.

V. $\lambda = 6303$.

$$w = u_3 v_5 + u_5 v_3.$$

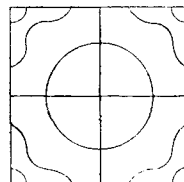


Fig. 5.

VI. $\lambda = 13674.$

$$w = u_5 v_5.$$

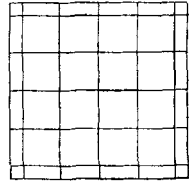


Fig. 6.

B. Lösungen, die in x und y ungerade und antisymmetrisch sind.

I. $\lambda = 316,1 - 270 \delta \mu.$

$$w = u_1 v_3 - v_1 u_3 + 0,0002 (u_1 v_5 - v_1 u_5) + 0,0033 (u_3 v_5 - v_3 u_5).$$

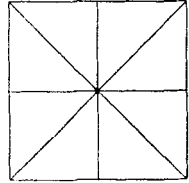


Fig. 7.

II. $\lambda = 2713.$

$$w = u_1 v_5 - v_1 u_5.$$

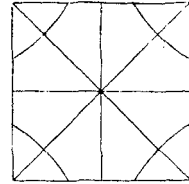


Fig. 8.

III. $\lambda = 5570.$

$$w = u_3 v_5 - v_3 u_5.$$

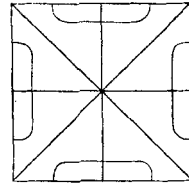


Fig. 9.

C. Lösungen, die in x und y gerade und symmetrisch sind.

Die Klangfiguren dieser und der folgenden Abteilung erscheinen besonders leicht und es können besonders viele Obertöne zur experimentellen Darstellung gebracht werden.

I. $\lambda = 35.73 + 20,8 \delta \mu.$

$$w = u_0 v_2 + u_2 v_0 - 0,0238 u_2 v_2 + 0,0130 (u_0 v_4 + v_0 u_4) + 0,0026 (u_2 v_4 + v_2 u_4) + 0,0016 u_4 v_4.$$

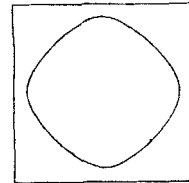


Fig. 10.

x beob.:	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
y beob.:	0,840	0,829	0,796	0,744	0,675	0,589
y ber. - y beob.:	+0,003	+0,003	+0,003	+0,003	+0,003	+0,004

Die Abweichung ist offenbar einem der besprochenen, systematischen Versuchsfehler zuzuschreiben. Die erste Annäherung $u_0 v_2 + v_0 u_2$ ergibt für die Schnittpunkte mit den Achsen die Koordinaten 0,830 (beob. 0,839); mit der Diagonale 0,552 (beob. 0,546).

$$\text{II. } \lambda = 266,0 - 274 \delta \mu.$$

$$\begin{aligned} w = & 0,0122 (u_0 v_2 + v_0 u_2) + u_2 v_2 \\ & - 0,0188 (u_0 v_4 + v_0 u_4) \\ & + 0,0880 (u_4 v_2 + v_4 u_2) \\ & - 0,0044 u_4 v_4. \end{aligned}$$

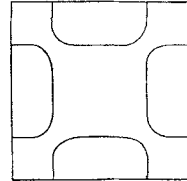


Fig. 11.

x beob.:	0,100	0,200	0,300	0,400
y beob.:	0,533	0,534	0,538	0,546 ₅
y ber. - y beob.:	-0,003	-0,003	-0,004	-0,005

Für den zweiten Teil jedes der Kurvenstücke ist:

y beob.:	0,600	0,700	0,800	0,900
x beob.:	0,495	0,517	0,524	0,528
x ber. - x beob.:	+0,005	+0,005	-0,004	-0,006

Die berechnete Kurve ist in den fast geradlinigen Teilen weniger gekrümmt als die beobachtete. Aus $w = u_2 v_2$ würden sich Parallelen zu den Achsen mit x bzw. $y = 0,551$ ergeben haben. Da in den Punkten der Kurven, wo sie sich sehr nahe kommen, die Amplitude gering bleibt, der Sand also in indifferentem Gleichgewicht sich befindet, wenn nicht sehr sorgfältig operiert wird, so wird meist die Figur als aus vier Geraden bestehend erscheinen, wie auch Chladni sie angibt; an den Schnittpunkten wird sie undeutlich sein. Der Fehler der ersten Annäherung in den geradlinigen Teilen beträgt 1 Proz. der Plattenseite.

$$\text{III. } \lambda = 941.$$

$$w = u_0 v_4 + v_0 u_4.$$

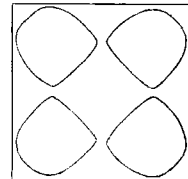


Fig. 12.

IV. $\lambda = 2020.$

$$w = u_2 v_4 + v_2 u_4.$$

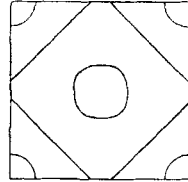


Fig. 13.

V. $\lambda = 5480.$

$$w = u_4 v_4.$$

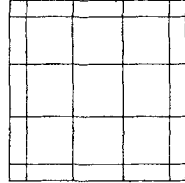


Fig. 14.

VI. $\lambda = 5640.$

$$w = u_0 v_6 + v_0 u_6$$

(von Chladni nicht beobachtet).

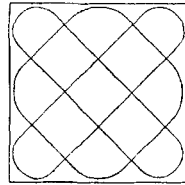


Fig. 15.

VII. $\lambda = 7840.$

$$w = u_2 v_6 + v_2 u_6.$$

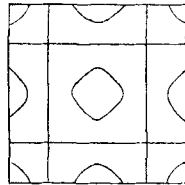


Fig. 16.

Die nahe Koinzidenz der Wurzeln $x = 0,552$ von $u_2 = 0$ und $x = 0,544$ von $u_6 = 0$ bedingt hier und in Fig. 23 die nahezu geraden Linien, und die scheinbaren Ausnahmen von den p. 775 gegebenen Sätzen.

VIII. $\lambda = 15120.$

$$w = u_4 v_6 + v_4 u_6.$$

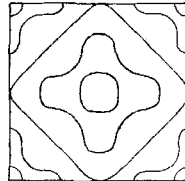


Fig. 17.

XI. $\lambda = 28740$.

$$w = u_6 v_6$$

(fehlt bei Chladni).

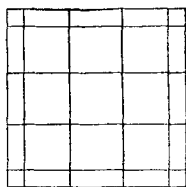


Fig. 18.

D. Lösungen, die in x und y gerade und antisymmetrisch sind.

I. $\lambda = 26,40$.

$$w = u_0 v_2 - v_0 u_2$$

$$- 0,0129 (u_0 v_4 - v_0 u_4)$$

$$- 0,0045 (u_2 v_4 - v_2 u_4).$$

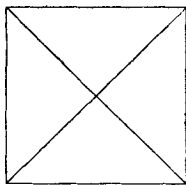


Fig. 19.

II. $\lambda = 886$.

$$w = u_0 v_4 - v_0 u_4.$$

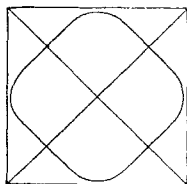


Fig. 20.

III. $\lambda = 1702$.

$$w = u_2 v_4 - v_2 u_4.$$

Die Figur stimmt auf weniger als 1 Proz. mit Strehlkes Messungen.

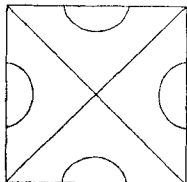


Fig. 21.

IV. $\lambda = 5500$.

$$w = u_0 v_6 - v_0 u_6$$

(fehlt bei Chladni).

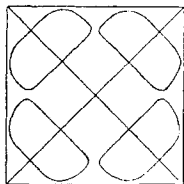


Fig. 22.

V. $\lambda = 7310$.

$$w = u_2 v_6 - v_2 u_6.$$

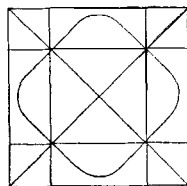


Fig. 23.

VI. $\lambda = 13840$.

$$w = u_4 v_6 - v_4 u_6.$$

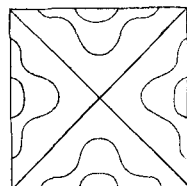


Fig. 24.

E. Doppeltöne.

I. $\lambda = 80,8 - 73 \delta \mu$.

$$\begin{aligned} w(x, y) = & u_1 v_2 - 0,0682 u_3 v_0 \\ & + 0,0760 u_3 v_2 + 0,0260 u_1 v_4 \\ & + 0,0073 u_5 v_0 - 0,0027 u_3 v_4 \\ & - 0,0112 u_5 v_2 + 0,0030 u_5 v_4. \end{aligned}$$

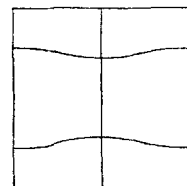


Fig. 25.

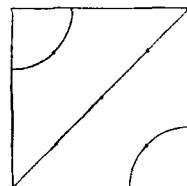


Fig. 26.

Die allgemeine Formel ergibt sich hieraus (wie bei allen Doppeltönen)

$$A w(x, y) + B w(x, y).$$

Die erste Figur (25) entspricht $B = 0$; die zweite (26) $B = -A$.

Pole: $x = y = 0$; $\pm x = 0,522 = \pm y$ (beob.); die berechneten Pole liegen auf der Diagonale um 0,001 mehr nach außen. (Vgl. Fig. 26.)

II. $\lambda = 237,1$.

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & + 0,0678 u_1 v_2 + u_3 v_0 \\
 & - 0,0150 u_3 v_2 + 0,0355 u_1 v_4 \\
 & + 0,0000 u_5 v_0 + 0,0100 u_3 v_4 \\
 & - 0,0007 u_5 v_2 + 0,0016 u_5 v_4.
 \end{aligned}$$

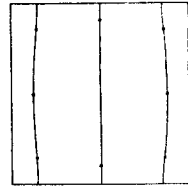


Fig. 27.

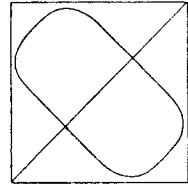


Fig. 28.

Für die annähernd parallel den Seiten verlaufenden Kurven in Fig. 27 findet sich

	$y:$	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
	x beob.:	0,758	0,753	0,746	0,738	0,730
	x ber. - x beob.:	-0,0045	-0,0055	-0,0045	-0,003	-0,0005
	$y:$	0,600	0,700	0,800	0,900	
	x beob.:	0,722	0,717	0,716	0,717	
	x ber. - x beob.:	-0,0005	+0,0005	+0,0005	+0,0010	

Als Pole sind beobachtet

$$\begin{aligned}
 y = 0, \quad x = 0,760, \quad \text{ber. } 0,761, \\
 y = x = 0,716, \quad \text{ber. } 0,722,
 \end{aligned}$$

nebst den symmetrischen, in den anderen Quadranten gelegenen Punkten. (Vgl. Fig. 27).

III. $\lambda = 746$.

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & - 0,0709 u_1 v_2 + 0,0214 u_3 v_0 \\
 & + u_3 v_2 - 0,1260 u_1 v_4 \\
 & - 0,0038 u_5 v_0 + 0,1234 u_3 v_4 \\
 & - 0,0095 u_5 v_2 - 0,0100 u_5 v_4.
 \end{aligned}$$

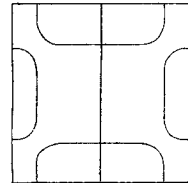


Fig. 29.

Strehlke gibt die Pole an, die jedoch mit dieser Formel nur auf 1 Proz. stimmen, was sich wohl aus dem Umstand erklärt, daß sie in einer Zone nahezu indifferenten Gleichgewichtes liegen (in Fig. 29 dort, wo sich die Kurvenzweige einander nähern).

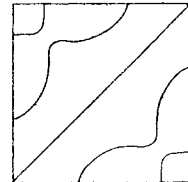


Fig. 30.

IV. $\lambda = 1131.$

$$w = u_1 v_4,$$

$$w = u_1 v_4 - u_4 v_1.$$

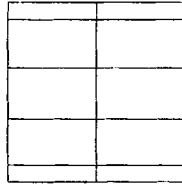


Fig. 31.

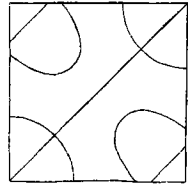


Fig. 32.

V. $\lambda = 2497.$

$$w = u_5 v_0,$$

$$w = u_5 v_0 - u_0 v_5.$$

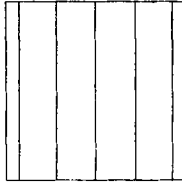


Fig. 33.

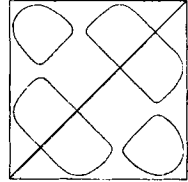


Fig. 34.

VI. $\lambda = 3240.$

$$w = u_3 v_4,$$

$$w = u_3 v_4 - u_4 v_3.$$

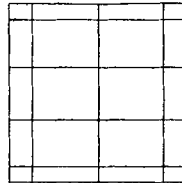


Fig. 35.

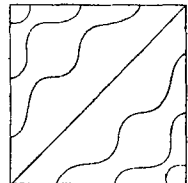


Fig. 36.

VII. $\lambda = 3927.$

$$w = u_5 v_2,$$

$$w = u_5 v_2 - u_2 v_5.$$

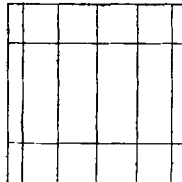


Fig. 37.

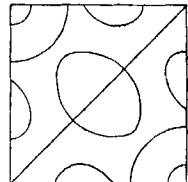


Fig. 38.

VIII. $\lambda = 9030.$

$$w = u_5 v_4,$$

$$w = u_5 v_4 - v_5 u_4.$$

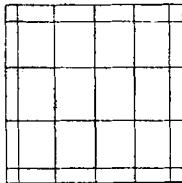


Fig. 39.

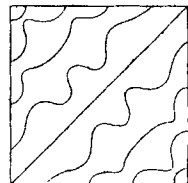


Fig. 40.

IX. $\lambda = 6036.$

$$w = u_1 v_6,$$

$$w = u_1 v_6 - v_1 u_6.$$

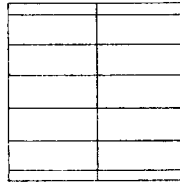


Fig. 41.

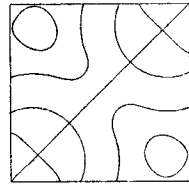


Fig. 42.

X. $\lambda = 10380.$

$$w = u_3 v_6,$$

$$w = u_3 v_6 - v_3 u_6.$$

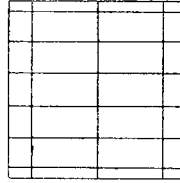


Fig. 43.

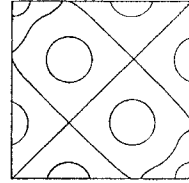


Fig. 44.

XI. $\lambda = 20400.$

$$w = u_6 v_6,$$

$$w = u_6 v_6 - v_6 u_6.$$

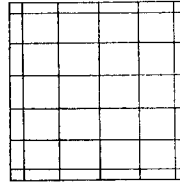


Fig. 45.

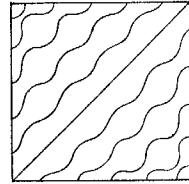


Fig. 46.

Schlußbemerkungen.

Es braucht wohl kaum betont zu werden, daß dieselben Ansätze auch für Rechtecke gelten; sind a, b deren halbe Seiten, so werden sich Lösungen der Form

$$u_m \left(\frac{x}{a} \right) u_n \left(\frac{y}{b} \right) \pm u_n \left(\frac{x}{a} \right) u_m \left(\frac{y}{b} \right)$$

ergeben und das Verfahren bleibt im übrigen ungeändert.

Ist eine Seite des Rechtecks eingespannt, die übrigen frei, so wird man dementsprechend für die Richtung x der zwei freien Seiten diejenigen Funktionen, die einem an einem Ende eingespannten, am anderen freien Stabe entsprechen, einführen; für die zweite Richtung bleiben die u_m anwendbar.

Entsprechendes gilt für die ringsum eingespannten Platten usw.

Wie dieselbe Methode Gleichgewichtsprobleme zu behandeln gestattet, habe ich in der eingangs zitierten Arbeit

gezeigt. Wird z. B. eine rechteckige Platte durch an den Rändern angreifende Kräfte gebogen (Maxwell), so ist für die transversale Deformation $w(x, y)$ derselbe Ansatz (Entwickelungen nach $u_m(x/a)u_n(y/b)$) zu machen, wie wir ihn in dieser Arbeit benutzt haben; die Koeffizienten bestimmen sich daraus, daß die potentielle Energie — sie ist, bis auf einen Faktor, durch unser Integral J gegeben — plus dem die Arbeit der Kräfte für ein kleines w ausdrückenden Randintegral, nach Einführung des Ansatzes, möglichst klein sein soll. Da das Randintegral w nur linear enthält, ergeben sich diesmal lineare, *nicht* homogene Gleichungen für die Koeffizienten. Für eine quadratische Platte und geeignet symmetrische Kräfte erhält man wieder die Gleichungen (54) p. 763, wenn darin $\lambda = 0$ gesetzt wird und die linken Seiten (Null) durch bestimmte Zahlwerte ersetzt werden. Die einmalige Aufstellung des Schemas (54) genügt also, um eine ganze Reihe von Gleichgewichtsproblemen bezüglich quadratischer Platten einfach zu lösen.

Es ist oben bemerkt worden, daß ein Polynom stets, bei jeder Begrenzung, als möglicher Ansatz für w in Betracht kommt, wobei nur fraglich bleibt, ob bei der verlangten Genauigkeit die Rechenarbeit nicht zu groß wird. Da der Eigenwert des Fundamentals, λ_0 , dem Minimum von J entspricht, so wird im ganzen bei jeder Approximation, wenn es sich um den Grundton handelt, λ das durch die Methode am genauesten gegebene Element sein. Zur Berechnung des Grundtones aus den Konstanten der Platte wird also sehr oft der Ansatz eines Polynoms mit wenigen Gliedern genügen. So entspricht der Symmetrie des Grundtones beim Kreise der allgemeinste Ansatz

$$(\alpha) \quad w = xy[a + b(x^2 + y^2) + cx^2y^2 + d(x^4 + y^4) + \dots],$$

wobei die x - und y -Achse die Knotenlinien der Klangfigur bilden. Trägt man dies in das über den Kreis vom Radius $R = 1$ erstreckte Integral J (Gleichung (7) p. 745) ein, so ergibt unsere Methode ohne weiteres für λ_0 folgende sukzessive Approximationen:

Wenn man Formel (α) mit dem *ersten* Glied abbricht ($b = c = d = \dots = 0$):

$$\lambda_0 = \frac{48(1 - \mu)}{R^4} = 32 \quad \text{für } \mu = \frac{1}{3} \quad \text{und } R = 1.$$

Bei zwei Gliedern (λ_0 Wurzel einer Gleichung zweiten Grades)

$$\lambda_0 = 27,794,$$

während aus Kirchhoffs Rechnungen sich ergibt

$$\lambda_0 = 27,574.$$

Der Fehler der Tonhöhe, die $\sqrt{\lambda_0}$ proportional ist, ist somit schon in zweiter Annäherung nur $\frac{1}{2}$ Proz., also an der Grenze des Beobachtbaren.

Ebenso elementare Rechnungen ergeben die Grundtöne und selbst die ersten Obertöne des Dreiecks, Fünfecks, Sechsecks usw., und überhaupt irgendwelcher durch gerade Linien und Kreisbögen begrenzter Figuren.

Göttingen, Januar 1909.

(Eingegangen 14. Januar 1909.)
