

# Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete\*).

Von

DAVID HILBERT in Königsberg.

In der gegenwärtigen Mittheilung wird ein eigenthümliches Verfahren zur Darstellung von Invarianten und Covarianten eines binären Formensystems allgemein begründet und dann für die invariantentheoretische Untersuchung gewisser binärer Formen von speciellem Charakter verworhet.

Der Uebersichtlichkeit halber legen wir zunächst nur eine binäre Form der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung und zwar in der nicht homogenen Schreibart;

$$(1) \quad f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

zu Grunde; es mögen dann für die einseitigen Differentialquotienten derselben nach der nicht homogenen Variablen  $x$  die später stets wiederkehrenden Bezeichnungen gelten:

$$(2) \quad \begin{aligned} f_0 &= f, \\ f_1 &= \frac{(n-1)!}{n!} \frac{df}{dx}, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}. \end{aligned}$$

Nach diesen charakteristischen Festsetzungen untersuchen wir, unter welchen Bedingungen eine Function jener einseitigen Derivirten  $f_0, f_1, \dots, f_n$  eine Invariante oder Covariante der Grundform darstellt. Die zur Verwendung gelangende linear gebrochene Transformation der nicht homogenen Variablen sei:

$$x = \frac{\alpha x' + \beta}{\gamma x' + \delta},$$

\*) Die vorliegende Arbeit ist zum Theil eine verkürzte Wiedergabe derjenigen Gesichtspunkte, welche der Verfasser in seiner Inauguraldissertation: Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Königsberg i. Pr. 1885, entwickelt hat. Doch waren insonderheit die Ergebnisse des zweiten Theiles der citirten Dissertation bemerkenswerther Vervollständigungen und erweiternder Zusätze fähig.

worin der einfacheren Rechnung halber die Constanten  $\alpha$  und  $\delta$  nur unendlich wenig von der Einheit,  $\beta$  und  $\gamma$  nur unendlich wenig von Null abweichen mögen. Die für die transformirte Form  $f'$  gebildeten einseitigen Differentialquotienten nehmen dann allgemein die Gestalt an \*):

$$f'_i = (\alpha\delta)^i (\gamma x' + \delta)^{n-2i} (f_i + i\gamma f_{i-1})$$

und es bedarf nur einiger einfacher Ueberlegungen, um zu dem folgenden Theorem zu gelangen:

*Jede homogene und isobare Function  $F$  der einseitigen Differentialquotienten  $f_0, f_1, \dots, f_n$  vom Grade  $g$  und dem Gewichte  $p$  ist eine Invariante oder Covariante der Form  $f$  von der Ordnung  $m = ng - 2p$ , sobald sie der Differentialgleichung:*

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \dots = 0$$

genügt.

Um eine derart vorgelegte Covariante  $F$  in gewöhnlicher Weise als Function der Coefficienten der Form und der Variablen auszudrücken, setzen wir:

$$F = A_0 x^m + \binom{m}{1} A_1 x^{m-1} + \dots + A_m.$$

Die  $k$ -malige Differentiation dieser Identität nach  $x$  liefert unter Berücksichtigung der Relation:

$$\frac{df_i}{dx} = (n-i) f_{i+1}$$

und mit Benutzung des abkürzenden Operationssymbols:

$$\Delta = n f_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1) f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2) f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \dots$$

das Ergebniss:

$$\Delta^k F = \frac{m!}{(m-k)!} A_0 x^{m-k} + \dots + \frac{m!}{(m-k)!} A_{m-k},$$

oder für  $x=0$  und nach Vertauschung der Coefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  bezüglich mit  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ :

$$A_k = \pm \frac{(m-k)!}{m!} [\Delta^k F]_{f_i=a_i}.$$

Im speciellen Falle  $k=0$  erhalten wir den ersten Coefficienten d. h. die Quelle der Covariante  $F$  als Function der Coefficienten von  $f$ . Umgekehrt folgt daher der Satz:

*Für eine vorgelegte Invariante resp. Covariante der Grundform ergibt sich, abgesehen vom Vorzeichen, die Darstellung als Function der einseitigen Derivirten, wenn in der Invariante resp. Covarianten-*

\*) Die genaue Formel findet sich in der citirten Dissertation, pag. 2.

quelle die Formencoefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  durch die entsprechenden Differentialquotienten  $f_0, f_1, \dots, f_n$  ersetzt werden\*).

Gleichzeitig finden wir die bekannte Ableitung der Coefficienten einer Covariante aus ihrer Quelle wieder. Auch die Berechtigung der lediglich mit Quellen rechnenden Methode von Roberts, sowie die gewöhnlichen Cayleyschen Differentialgleichungen der Invarianten und Covarianten als Function der Coefficienten und Variablen\*\*) sind unmittelbare Folgen unserer Ueberlegungen.

Die bisher verwendeten Schlüsse führen für den Fall eines gegebenen Systems von mehreren Grundformen  $f, \varphi, \dots$  zu folgender leicht erweisbaren Verallgemeinerung:

Jede isobare Function  $F$  der einseitigen Derivirten  $f_0, f_1, \dots, f_n, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots$ , vom Gewichte  $p$ , welche überdies in den Derivirten jeder einzelnen Form homogen beziehungsweise von den Graden  $g, \gamma, \dots$  sein möge, ist eine simultane Invariante oder Covariante des Formensystems  $f, \varphi, \dots$  von der Ordnung  $m = ng + v\gamma + \dots - 2p$ , sobald sie der Differentialgleichung:

$$f_0 \frac{\partial F}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial F}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial F}{\partial f_3} + \dots + \varphi_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} + 2\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} + 3\varphi_2 \frac{\partial F}{\partial \varphi_3} + \dots = 0$$

genügt. Die Beziehung zur Invariante oder Covariantenquelle in gewöhnlicher Darstellung wird durch die gleichzeitige Vertauschung der Differentialquotienten  $f_0, f_1, \dots, f_n, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots$  mit den entsprechenden Formencoefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots$  vermittelt\*\*\*).

Die gewonnene Darstellungsweise der invarianten Gebilde bedingt keine wesentliche Unterscheidung zwischen Invarianten und Covarianten und da sie überdies von der Ordnung der Grundformen unabhängig erscheint, dürfte sie dazu geeignet sein, in naturgemässer Weise auch die gebrochenen und irrationalen algebraischen Gebilde der invarianten-

\*) Die Möglichkeit dieser Darstellungsweise der invarianten Gebilde scheint bisher wenig beachtet oder verwerthet zu sein, vergl. jedoch Faà di Bruno, Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Th. Walter § 14, 11. — Neuerdings veröffentlicht Brioschi in diesen Annalen Bd. 29 einen Satz, welcher aus dem obigen, bereits in der citirten Dissertation aufgestellten Theorem unmittelbar folgt, wenn man darin an Stelle der willkürlichen Variablen  $x$  den Werth irgend einer Wurzel der Gleichung  $f=0$  einführt. Wie Brioschi an Beispielen zeigt, findet dieser Satz eine nützliche Verwendung zur algebraischen Transformation jener Gleichung  $f=0$ . — Uebrigens gilt ein analoges Theorem auch für ternäre, quaternäre etc. Grundformen, deren Invarianten und Covarianten als Function der Differentialquotienten nach zwei, drei, etc. Variablen darstellbar sind.

\*\*) Vergl. Salmon, Algebra der linearen Transformationen. Art. 143 — 147.

\*\*\*) In diesem Theorem ist zugleich als specieller Fall das Lemma enthalten, welches kürzlich S. Gundelfinger in der Abhandlung „Zur Theorie der binären Formen“ Crelles Journal Bd. 100, pag. 413 mittheilt.

theoretischen Behandlung zugänglich zu machen. Berücksichtigen wir ferner, dass nach Anwendung des obigen Verfahrens jede Invariante und Covariante des Formensystems uns als ein Differentialausdruck vorliegt, so führt eine Relation zwischen jenen Gebilden zu einer Differentialgleichung, deren Studium für gewisse Fragen der Formentheorie von Vortheil sein kann\*). Endlich sei noch bemerkt, dass die Anwendung unserer Darstellungsweise in vielen Fällen die wirkliche Auswerthung von Invarianten und Covarianten für specielle vorgelegte Grundformen wesentlich erleichtert und vereinfacht.

Nach den vorangegangenen allgemeinen Darlegungen kehren wir wieder zu einer Grundform zurück und beschäftigen uns eingehender mit den gegenseitigen Beziehungen und sich ergänzenden Eigenschaften der beiden bereits im Bisherigen aufgetretenen Differentiationssymbole:

$$D = f_0 \frac{\partial}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial}{\partial f_2} + 3f_2 \frac{\partial}{\partial f_3} + \dots,$$

$$\Delta = nf_1 \frac{\partial}{\partial f_0} + (n-1)f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + (n-2)f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} + \dots$$

Denken wir uns dieselben angewendet auf eine beliebige homogene und isobare Function  $F$  der Differentialquotienten  $f_0, f_1, \dots, f_n$  vom Grade  $g$  und dem Gewichte  $p$ , so gilt zunächst betreffs der Vertauschung ihrer Reihenfolge die fundamentale Formel:

$$(3) \quad [D\Delta - \Delta D] F = mF, \quad m = ng - 2p.$$

Der Beweis derselben gelingt am einfachsten, wenn wir von ihrer Richtigkeit für die specielle Annahme  $F = f_i$  ausgehen und dann zeigen, dass die Formel für die Summe sowie für das Product zweier Functionen  $F$  und  $F'$  immer dann gilt, sobald ihre Gültigkeit für jeden der beiden Summanden, beziehungsweise Factoren  $F$  und  $F'$  feststeht.

Durch wiederholte Anwendung des Symbols  $D$  auf Formel (3) bei gleichzeitiger Benutzung derselben für die Functionen  $DF, D^2F, \dots$  ergibt sich die allgemeinere Relation:

$$D^k \Delta - \Delta D^k = k(m + k - 1) D^{k-1}$$

und in analoger Weise:

$$D \Delta^l - \Delta^l D = l(m - l + 1) \Delta^{l-1}.$$

Beide Formeln erscheinen als Specialfälle der folgenden Relationen von allgemeinstem Charakter, deren Richtigkeit durch den Schluss von  $k, l$  auf  $k+1, l+1$  bestätigt wird:

\*) Auf dem erwähnten Umstande beruht die Beweismethode in der citirten Abhandlung von S. Gundelfinger. — Vergl. ferner die Note des Verfassers: „Ueber die nothwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständige Potenz.“ Mathematische Annalen Bd. 27, pag. 158.

$$\begin{aligned}
 D^k \Delta^l &= \Delta^l D^k + \binom{m+k-l}{1} l k \Delta^{l-1} D^{k-1} \\
 &\quad + \binom{m+k-l}{2} l(l-1) k(k-1) \Delta^{l-2} D^{k-2} + \dots, \\
 (4) \quad \Delta^l D^k &= D^k \Delta^l + \binom{l-k-m}{1} l k D^{k-1} \Delta^{l-1} \\
 &\quad + \binom{l-k-m}{2} l(l-1) k(k-1) D^{k-2} \Delta^{l-2} + \dots,
 \end{aligned}$$

Legen wir endlich mehrere Formen  $f, \varphi, \dots$  zu Grunde und betrachten simultane Functionen der Derivirten  $f_0, f_1, \dots, f_n, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\nu$ , so werden wir nunmehr unter  $D$  und  $\Delta$  die Summe aller auf  $f, \varphi, \dots$  einzeln bezogenen Differentiationssymbole zu verstehen haben, also:

$$\begin{aligned}
 D &= D_f + D_\varphi + \dots, \\
 \Delta &= \Delta_f + \Delta_\varphi + \dots
 \end{aligned}$$

und es ist leicht erkennbar, dass bei diesen Festsetzungen sämtliche obige Formeln auch für simultane Gebilde gültig bleiben, sobald wir nur der Zahl  $m$  überall die modificirte Bedeutung:

$$m = ng + \nu\gamma + \dots - 2p$$

ertheilen.

Für die folgenden, allgemeinen Betrachtungen setzen wir ferner des kürzeren Ausdruckes halber fest, dass eine homogene und isobare Function  $F$  der Derivirten  $f_0, f_1, \dots, f_n, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\nu, \dots$  vom Range  $r$  heissen möge, wenn in der Reihe:

$$DF, D^2F, \dots$$

$D^{r+1}F$  die erste Bildung ist, welche identisch verschwindet. Wie sich mittelst der Formeln (4) zeigt, ist dann in der Reihe:

$$\Delta F, \Delta^2 F, \dots$$

$\Delta^{m+r+1}F$  die erste identisch verschwindende Bildung, d. h. die Function  $F$  vom Range  $r$  besitzt die Ordnung  $m+r$  in Bezug auf die Variable  $x$ . Mit Benutzung der Formeln (4) erhalten wir aus einer vorgelegten Function  $F$   $r$ ten Ranges der Reihe nach folgendes System von Functionen nullten Ranges d. h. von Covarianten:

$$\begin{aligned}
 F^{(r)} &= D^r F, \\
 F^{(r-1)} &= D^{r-1} F - \frac{(m+r)!}{(m+2r)! r!} D^{r-1} \Delta^r F^{(r)}, \\
 &\dots \dots \dots \vdots \dots \dots \\
 F^{(0)} &= F - \frac{(m+r)!}{(m+2r)! r!} \Delta^r F^{(r)} - \dots - (m-1) \Delta F^{(1)},
 \end{aligned}$$

oder nach successiver Einsetzung der Werthe von  $F^{(r)}, F^{(r-1)}, \dots$  auf der rechten Seite:

$$F^{(r)} = D^r F,$$

$$F^{(r-1)} = \left[ D^{r-1} - \frac{1}{m-2r} \Delta D^r \right] F,$$

$$F^{(0)} = \left[ 1 - \frac{1}{m+2} \Delta D + \frac{1}{2(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - + \dots \right] F.$$

Die Einführung der abkürzenden Bezeichnung:

$$[F] = \left[ 1 - \frac{1}{1(m+2)} \Delta D + \frac{1}{1 \cdot 2(m+2)(m+3)} \Delta^2 D^2 - + \dots \right] F$$

gestattet, das obige System von Covarianten in der einfachen Gestalt zu schreiben:

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= [F], \\ F^{(1)} &= [D F], \\ &\dots \dots \dots \\ F^{(r)} &= [D^r F], \end{aligned} \quad (5)$$

während die letzte Gleichung des vorangegangenen Gleichungssystems die Identität:

$$F = c^{(0)} F^{(0)} + c^{(1)} \Delta^1 F^{(1)} + \dots + c^{(r)} \Delta^r F^{(r)},$$

$$c^{(k)} = \frac{(m+k)!}{(m+2k)! k!}.$$

liefert, d. h.: Jede Function  $F$   $r^{\text{ten}}$  Ranges ist auf eine eindeutig bestimmte Weise als Summe von  $(r+1)$  Ausdrücken darstellbar, welche durch blosse Vorsetzung des Symbols  $\Delta$  aus Covarianten entspringen. Die Covarianten  $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(r)}$ , sind gleichsam als die Erzeugenden der Function  $F$  zu betrachten.

Was übrigens die neu eingeführte Operation betrifft, so ergibt beispielsweise die Rechnung:

$$[f_0 \varphi_p] = \frac{n! (n+p+1)!}{(n-p)! (n+p+p+1)!} \left\{ f_0 \varphi_p - \binom{p}{1} f_1 \varphi_{p-1} + \dots + (-1)^p f_p \varphi_0 \right\}.$$

Das in Rede stehende Covariantsymbol  $[ ]$  erscheint hiernach im Lichte einer Verallgemeinerung des bekannten Ueberschiebungsprocesses.

Die bisherigen allgemeinen Entwicklungen können unter Anderem zu einem strengen Beweise eines bekannten Satzes über die Anzahl invarianter Bildungen dienen. Da nämlich nach den Formeln (5) einer jeden Function  $F$  von bestimmten Graden  $g, \gamma, \dots$  und dem Gewichte  $p$  ein System von Covarianten  $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(r)}$ , mit gleichen oder kleineren Gewichten eindeutig zugeordnet ist und umgekehrt jedes solche Covariantsystem zu einer bestimmten Function  $F$  führt, so müssen nothwendig die Anzahl jener Functionen  $F$  und die Anzahl der Covarianten von den Graden  $g, \gamma, \dots$  und von einem  $p$  nicht

überschreitenden Gewichte untereinander übereinstimmen. Bezeichnen wir diese Anzahl mit  $Z_p$ , so ist offenbar die Anzahl der linear unabhängigen Covarianten von den betreffenden Graden  $g, \gamma, \dots$  und dem Gewichte  $p$  gleich der Differenz der Zahlen  $Z_p$  und  $Z_{p-1}$ , womit der in Aussicht gestellte Beweis für den Fundamentalsatz\*) des Cayley-Sylvester'schen Abzählungscalculs in voller Strenge erbracht ist.

Eine weitere Anwendung gestatten unsere Entwicklungen, wenn es sich um die Construction einer Function  $G$  handelt, welche nach Vorsetzung des Symbols  $D$ , beziehungsweise  $\Delta$  ein vorgeschriebenes Resultat  $F$  ergeben soll. Lösen wir nämlich die vorgelegte Function  $F$  nach Formel in ihre Erzeugenden  $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(r)}$  auf, so ergibt sich, dass eine Function  $G$  der verlangten Art im ersteren Falle für ein positives  $m$  immer, für  $m \leq 0$  dagegen nur unter der Bedingung:

$$[D^{-m}F] = 0$$

existirt, während anderseits im zweiten Falle durchweg die Bedingung:

$$[F] = 0$$

erforderlich wird. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so erhält die gesuchte Function  $G$  den Werth:

$$G = \frac{1}{1 \cdot m} c^{(0)} \Delta F^{(0)} + \frac{1}{2(m+1)} c^{(1)} \Delta^2 F^{(1)} + \dots + \frac{1}{(r+1)(m+r)} c^{(r)} \Delta^{r+1} F^{(r)},$$

beziehungsweise:

$$G = c^{(1)} F^{(1)} + c^{(2)} \Delta^1 F^{(2)} + \dots + c^{(r)} \Delta^{r-1} F^{(r)},$$

wo rechter Hand natürlich noch beliebige Functionen  $H$  mit der Eigenschaft:

$$DH = 0, \text{ beziehungsweise: } \Delta H = 0$$

hinzugefügt werden dürfen.

Das obige allgemeine Theorem und die daran anschliessenden Betrachtungen werden sich insbesondere von Nutzen erweisen, sobald es sich um die Ermittlung invarianter Eigenschaften und Kriterien für solche besondere binäre Formen handelt, deren Natur durch gegebene algebraische Differentialgleichungen gekennzeichnet ist. Formen oder Formensysteme mit speciellen oder beschränkt willkürlichen Coefficienten haben bisher nur ausnahmsweise vom Standpunkte invariantentheoretischer Anschauungen aus Erörterung gefunden. Nehmen wir die Untersuchungen aus, in welchen F. Klein\*\*) auf Grund einer

\*) Vergl. Sylvester, Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées. Crelles Journal, Bd. 85, pag. 89.

\*\*) Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Mathematische Annalen Bd. 9. — Vergl. andererseits: Gordan, Ueber Formen mit verschwindenden Covarianten. Mathematische Annalen Bd. 12.

functionentheoretisch-geometrischen Betrachtungsweise für die in sich selbst linear transformirbaren Formen die nothwendigen und hinreichenden invarianten Kriterien ableitet, so war man im übrigen zur Auffindung invarianter Relationen auf die umständliche directe Ausrechnung aller in Frage kommenden Invarianten und Covarianten angewiesen\*). Im Folgenden soll nun an dem Beispiele der hypergeometrischen Reihe gezeigt werden, in welcher Weise durch unsere früheren Entwicklungen eine allgemeine und directe Herleitung invarianter Kriterien aus der vorgelegten algebraischen Differentialgleichung möglich wird.

Die hypergeometrische Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  ist offenbar dann und nur dann eine ganze rationale Function der Variablen  $x$ , wenn wir einen der beiden im Zähler jedes Gliedes auftretenden Parameter gleich einer negativen ganzen Zahl, etwa  $\alpha = -n$  annehmen. Unter dieser Voraussetzung erhält durch Vorzeichenänderung und reciproke Transformation der Variablen jene hypergeometrische Reihe die Gestalt der folgenden binären Form  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in nicht homogener Schreibart:

$$(6) \quad f = x^n + \binom{n}{1} \frac{\beta}{\gamma} x^{n-1} + \dots + \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)},$$

und die Vergleichung mit der allgemeinen Schreibweise (1) zeigt, dass die specielle Natur der in Rede stehenden Form durch die einfache Formel:

$$a_i = \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+i-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+i-1)}$$

charakterisirt ist.

Vollziehen wir nun in der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe:

$$x(1-x) \frac{d^2 F}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\} \frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

den Uebergang zu der Grundform  $f$ , so ergibt sich bei gleichzeitiger Einführung der cubischen und der linearen homogen geschriebenen Form:

$$\varphi = \alpha_0 x_1^3 + 3\alpha_1 x_1^2 x_2 + 3\alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,$$

$$\psi = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 = \frac{3\gamma+2(n-1)}{3(n-1)} x_1 + \frac{3\beta+n-1}{3(n-1)} x_2$$

unserer früheren Bezeichnungsweise (2) entsprechend:

$$\text{d. h.} \quad \varphi_0 f_2 - 2\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_0 - \psi_0 f_1 + \psi_1 f_0 = 0,$$

$$(7) \quad (\varphi, f)_2 + (\psi, f)_1 = 0.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass aus einer Covarianten-

\*) Vergl. beispielsweise die Behandlung der Modular- und Multiplicatorgleichung 6<sup>ten</sup> Grades. Clebsch, Binäre Formen § 114 und 115.



relation der letzteren Art stets eine Differentialgleichung von der obigen Gestalt folgt. Es lässt sich demnach der Satz aussprechen:

*Eine binäre Form  $f$  von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung ist immer dann und nur dann in eine endliche hypergeometrische Reihe linear transformirbar, wenn eine cubische Form  $\varphi$  und eine lineare Form  $\psi$  existiren, welche mit  $f$  durch die Formel (7) verbunden sind.*

Zugleich sei hier kurz bemerkt, dass, einem allgemeinen Theoreme zufolge, die eben ausgesprochene Eigenschaft der Form  $f$  nothwendigerweise das Vorhandensein einer  $(n-6)$ -fach unendlichen Mannigfaltigkeit von Formen  $\chi$  der  $(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung bedingt, von denen jede einzelne durch die invarianten Beziehungen:

$$(8) \quad (\chi, f)_{n-2} = 0, \quad (\chi, f)_{n-1} = 0$$

mit der Grundform  $f$  verkettet ist\*). Auch umgekehrt zieht das Vorhandensein einer solchen  $(n-6)$ -fach unendlichen Formenmannigfaltigkeit jene charakteristische Eigenschaft der hypergeometrischen Reihe nach sich.

Die Kenntniss der Formen  $\varphi$  und  $\psi$  setzt uns gleichzeitig in den Stand, die lineare Transformation der fraglichen Form in die Gestalt der hypergeometrischen Reihe (6) zu bewerkstelligen. Führen wir nämlich die cubische Form  $\varphi$  in die specielle Gestalt:

$$(9) \quad x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$$

über, so sind die Coefficienten der simultan transformirten Linearform  $\psi$  von den Parametern der hypergeometrischen Reihe in der oben bezeichneten Weise abhängig und es ergeben sich für letztere demnach die Werthe:

$$(10) \quad \beta = \frac{1}{3}(n-1)(3\beta_1-1),$$

$$\gamma = \frac{1}{3}(n-1)(3\beta_0-2).$$

Da die Transformation der cubischen Form  $\varphi$  in die fragliche Gestalt auf 6 verschiedene Arten geschehen kann, so giebt es ebensoviele verschiedene hypergeometrische Reihen, welche im Sinne der Invariantentheorie mit der vorgelegten Grundform äquivalent erscheinen\*\*).

Unsere weitere Aufgabe wird darin bestehen, das gefundene nothwendige und hinreichende Criterium (7) seines simultanen Charakters zu entkleiden. Zu dem Zwecke lösen wir dasselbe durch Nullsetzen

\*) Vergl. am Schlusse dieser Mittheilung das Beispiel der Kugelfunction 6<sup>ter</sup> Ordnung.

\*\*) Mit Benutzung dieser bekannten linearen Transformation ist die genaue Auswerthung der Discriminante für die im Endlichen abbrechende hypergeometrische Reihe möglich.

sämmtlicher Coefficienten der linken Seite in die  $n$  einzelnen Bedingungen auf:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 a_2 - 2\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 + \beta_0 a_1 - \beta_1 a_0 = 0, \\ & (n-2)\alpha_0 a_3 - (2n-5)\alpha_1 a_2 + (n-4)\alpha_2 a_1 + \alpha_3 a_0 + (n-1)\beta_0 a_2 - (n-1)\beta_1 a_1 = 0, \\ & (n-3)\alpha_0 a_4 - (2n-8)\alpha_1 a_3 + (n-7)\alpha_2 a_2 + 2\alpha_3 a_1 + (n-1)\beta_0 a_3 - (n-1)\beta_1 a_2 = 0, \\ & 1) (n-4)\alpha_0 a_5 - (2n-11)\alpha_1 a_4 + (n-10)\alpha_2 a_3 + 3\alpha_3 a_2 + (n-1)\beta_0 a_4 - (n-1)\beta_1 a_3 = 0, \\ & (n-5)\alpha_0 a_6 - (2n-14)\alpha_1 a_5 + (n-13)\alpha_2 a_4 + 4\alpha_3 a_3 + (n-1)\beta_0 a_5 - (n-1)\beta_1 a_4 = 0, \\ & (n-6)\alpha_0 a_7 - (2n-17)\alpha_1 a_6 + (n-16)\alpha_2 a_5 + 5\alpha_3 a_4 + (n-1)\beta_0 a_6 - (n-1)\beta_1 a_5 = 0, \\ & \dots \dots \dots \alpha_1 a_n - 2\alpha_2 a_{n-1} + \alpha_3 a_{n-2} + \beta_0 a_n - \beta_1 a_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

welche mittelst Elimination der Coefficienten  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1$  und geeigneter Einführung der  $(n-6)$  willkürlichen Variablenreihen  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; \dots x_1^{(n-6)}, x_2^{(n-6)}$  zur Bildung der  $n$ -reihigen Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0 & a_1, & -a_0, & x_2^{(1)n-1}, \dots, x_2^{(n-6)n-1} \\ . & . & . & . & . & . & \dots \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n & -a_{n-1}, & x_1^{(1)n-1}, \dots, x_1^{(n-6)n-1} \end{vmatrix}$$

Anlass geben. Elementaren Ueberlegungen zufolge ist dieselbe betreffs ihrer Abhängigkeit von den enthaltenen Variablen als Determinante der folgenden Art darstellbar:

$$G = \begin{vmatrix} g_1(x^{(1)}), & g_2(x^{(1)}), & \dots, g_{n-6}(x^{(1)}) \\ . & . & \dots, . \\ g_1(x^{(n-6)}), & g_2(x^{(n-6)}), & \dots, g_{n-6}(x^{(n-6)}) \end{vmatrix},$$

worin  $g_1, g_2, \dots, g_{n-6}$  gewisse binäre Formen der  $(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung bedeuten. Die Functionalcovariante dieser  $(n-6)$  Formen wird:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left[ \frac{G}{\prod (x_1^{(i)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(i)})} \right]_{x^{(1)} = \dots = x^{(n-6)} = x} \\ &= \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^6, \dots, 0 \\ . & . & . & . & . & . & \dots \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & 0, \dots, x_1^6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

und man erkennt leicht, dass das identische Verschwinden dieser Determinante einerseits und der Determinante  $G$  andererseits sich gegenseitig bedingt. Zur Charakterisirung der speciellen Form  $f$  ist mithin das identische Verschwinden der Covariante  $\Gamma$  nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend.

Die Covariante  $\Gamma$  ist vom Grade 6 in den Coefficienten der Grundform, vom Gewichte 18 und von der Ordnung  $6(n-6)$  bezüglich

der allein noch auftretenden Variablen  $x_1, x_2$ . Um sie durch übersichtlichere covariante Bildungen auszudrücken, schreiben wir vor allem ihre Quelle in der einfachen, von unwesentlichen Zahlenfactoren befreiten Determinantengestalt:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} (n-1) a_2, a_1, a_0, 0, 0, 0 \\ (n-2) a_3, a_2, a_1, a_0, a_1, a_0 \\ (n-3) a_4, a_3, a_2, 2a_1, 2a_0, 2a_1 \\ (n-4) a_5, a_4, a_3, 3a_2, 3a_1, 3a_0 \\ (n-5) a_6, a_5, a_4, 4a_3, 4a_2, 4a_1 \\ (n-6) a_7, a_6, a_5, 5a_4, 5a_3, 5a_2 \end{vmatrix}.$$

Für  $n-6$  erhält dieselbe als Invariante der Form 6<sup>ter</sup> Ordnung den Werth:

$$(13) \quad c_1 A^3 + c_2 AB + c_3 C,$$

wo  $A, B, C$  nach der Salmon'schen Bezeichnungsweise\*) die drei bekannten allein in Frage kommenden Invarianten der Form 6<sup>ter</sup> Ordnung bedeuten. Die Constanten  $c_1, c_2, c_3$  bestimmen sich durch Anwendung der beiden Specialisirungen:

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0,$$

wie folgt:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = -5.$$

Um auf den allgemeinen Fall überzugehen, schreiben wir die Elemente der ersten Verticalreihe der Determinante (12) in der Zertheilung:

$$5a_2 + (n-6)a_2, 4a_3 + (n-6)a_3, 3a_4 + (n-6)a_4, \dots (n-6)a_7,$$

so dass dementsprechend auch die Determinante selbst als Summe zweier Determinanten erscheint, deren erste mit der eben berechneten Quelle (13) übereinstimmt, während die zweite den Zahlenfactor  $n-6$  enthält. Das angedeutete Verfahren liefert somit schliesslich die Relation:

$$\Gamma = 4AB - 5C + (n-6)D,$$

worin die Covarianten  $A, B, C, D$  allgemein für die Form  $n$ <sup>ter</sup> Ordnung die Bedeutung haben:

$$A = [a_0 a_6 - 6a_1 a_5 + \dots] x_1^{2(n-6)} + \dots,$$

$$B = [a_0 a_2 a_4 a_6 - a_0 a_2 a_5^2 - \dots] x_1^{4(n-6)} + \dots,$$

$$C = [a_0^2 a_3^2 a_6^2 - 6a_0^2 a_3 a_4 a_5 a_6 + 4a_0^2 a_3 a_5^3 + \dots] x_1^{6(n-6)} + \dots,$$

$$D = [-2a_0^2 a_2 a_4 a_5 a_7 + 4a_0^2 a_2 a_4 a_6^2 - 2a_0^2 a_2 a_5^2 a_6 + \dots] x_1^{6(n-6)} + \dots$$

Durch folgerechte Zusammenfassung aller bisherigen Ergebnisse erhalten wir den definitiven Satz:

\*) Vergl. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Art. 251, 252, 253.

Eine binäre Form der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung ist immer dann und nur dann in eine endliche hypergeometrische Reihe linear transformirbar, wenn die Covariantenrelation:

$$(14) \quad 4AB - 5C + (n-6)D = 0$$

besteht. Die letztere ist mithin der präzise und vollständige Ausdruck für die invariantentheoretische Eigenart der endlichen hypergeometrischen Reihe.

Zur Bewerkstelligung der in Rede stehenden linearen Transformation, sowie zur Berechnung der Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  der resultirenden hypergeometrischen Reihe bedarf es nach den früheren Ausführungen der Kenntniss der beiden Formen  $\varphi$  und  $\psi$ . Wir fügen deshalb zu den  $n$  Gleichungen (11) noch die weiteren Identitäten hinzu:

$$\alpha_0 y_1^3 + 3\alpha_1 y_1^2 y_2 + 3\alpha_2 y_1 y_2^2 + \alpha_3 y_2^3 = \varphi(y),$$

beziehungsweise:

$$\beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 = \psi(y)$$

und erkennen aus den so erhaltenen Gleichungssystemen, dass die Determinantenbildungen:

$$F = \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^{(1)n-1}, & \dots, & x_2^{(n-5)n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & x_1^{(1)n-1}, & \dots, & x_1^{(n-5)n-1} \\ y_1^3, & 3y_1^2 y_2, & 3y_1 y_2^2, & y_2^3, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix},$$

beziehungsweise:

$$P = \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^{(1)n-1}, & \dots, & x_2^{(n-5)n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & x_1^{(1)n-1}, & \dots, & x_1^{(n-5)n-1} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & y_1, & y_2, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix}$$

für beliebige Werthe der neu eingeführten  $(n-5)$  Variablenreihen mit den Formen  $\varphi(y)$ , beziehungsweise  $\psi(y)$  nothwendig proportional ausfallen. Um betreffs jener mehrfachen Variablenreihen eine analoge Reduction wie vorhin eintreten zu lassen, construiren wir durch Grenzübergang die beiden folgenden Covarianten:

$$\Phi(x, y) = \left[ \prod_{(x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_{n-5}^{(n-5)})} \frac{F}{x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_{n-5}^{(n-5)}} \right]_{x_1^{(1)} = \dots = x_{n-5}^{(n-5)} = x}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^5, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & 0, & \dots, & x_1^5 \\ y_1^3, & 3y_1^2 y_2, & 3y_1 y_2^2, & y_2^3, & 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix}$$

und:

$$\Psi(x, y) = \left[ \frac{P}{\prod (x_1^{(i)} x_2^{(k)} - x_1^{(k)} x_2^{(i)})} \right]_{x^{(1)} = \dots = x^{(n-5)} = x}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2, & -2a_1, & a_0, & 0, & a_1, & -a_0, & x_2^5, & \dots, & 0 \\ 0, & a_n, & -2a_{n-1}, & a_{n-2}, & a_n, & -a_{n-1}, & 0, & \dots, & x_1^5 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & y_1, & y_2, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix}$$

Dieselben enthalten nur noch die Variablenreihen  $x_1, x_2; y_1, y_2$ ; sie sind vom Grade 5 in den Coefficienten der Grundform und von der Ordnung 5 ( $n-5$ ) bezüglich der ersteren Variablenreihe. Im Hinblick auf die früheren Darlegungen sprechen wir den zusammenfassenden Satz aus:

*Ist für eine binäre Form der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung die Covariantenrelation (14) erfüllt, so verhalten die Ansätze:*

$$\Phi(x, y) = \Omega(x) \varphi(y),$$

$$\Psi(x, y) = \Omega(x) \psi(y)$$

*zur Construction der cubischen Form  $\varphi$  und der linearen Form  $\psi$ . Jede der 6 linearen Substitutionen, welche die cubische Form  $\varphi(x)$  in die specielle Gestalt (9) überführt, leistet zugleich die Transformation der vorgelegten Form in eine endliche hypergeometrische Reihe mit den beiden Parameterwerthen (10).*

Was nun die Darstellung unserer beiden Covarianten durch übersichtliche Bildungen betrifft, so ist dieselbe in einfacher und allgemeiner Weise nur dann möglich, wenn wir durch Identificirung der beiden Variablenreihen  $x_1, x_2$  und  $y_1, y_2$  zu den invarianten Bildungen  $\Phi(x, x)$  und  $\Psi(x, x)$  übergehen. Bringen wir nämlich die Quellen der letzteren:

$$-9(n-1) \begin{vmatrix} a_1, & a_0, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & a_1, & a_2, & a_1, & a_0 \\ a_3, & a_2, & 2a_3, & 2a_2, & 2a_1 \\ a_4, & a_3, & 3a_4, & 3a_3, & 3a_2 \\ a_5, & a_4, & 4a_5, & 4a_4, & 4a_3 \end{vmatrix}$$

und:

$$\begin{aligned} & (n-1) a_2, (2n-2) a_1, a_0, 0, 0 \\ & (n-2) a_3, (2n-5) a_2, a_1, a_1, a_0 \\ + 3 & (n-3) a_4, (2n-8) a_3, a_2, 2a_2, 2a_1 \\ & (n-4) a_5, (2n-11) a_4, a_3, 3a_3, 3a_2 \\ & (n-5) a_6, (2n-14) a_5, a_4, 4a_4, 4a_3 \end{aligned}$$

mit den bekannten vollständigen Formensystemen der Grundform 5<sup>ter</sup>

und 6<sup>ter</sup> Ordnung zur Vergleichung, so ergibt sich nach erfolgter Bestimmung der Zahlencoefficienten die gesuchte Darstellung:

$$\Phi(x, x) = -18(n-1)K,$$

$$\Psi(x, x) = 6(n-1)(n-4)L + 18(n-4)(n-5)Bf - 6(n-1)(n-5)i\bar{l},$$

wo allgemein die weiteren Bezeichnungen gelten:

$$K = [a_0^2 a_2 a_4 a_6 - 3a_0^2 a_3^2 a_5 + 2a_0^2 a_3 a_4^2 - \dots] x_1^{5n-22} + \dots,$$

$$L^* = [a_0^2 a_2 a_5^2 - 2a_0^2 a_3 a_4 a_5 + a_0^2 a_4^3 - \dots] x_1^{5n-24} + \dots,$$

$$i = [a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2] x_1^{2(n-4)} + \dots,$$

$$\bar{l} = [a_0 a_2 a_6 - 3a_0 a_3 a_5 - a_1^2 a_6 + \dots] x_1^{3n-16} + \dots.$$

Es sei überdies bemerkt, dass die Kenntniss der eben dargestellten Covarianten in Folge der bestehenden Proportion:

$$\varphi : \psi = \Phi(x, x) : \Psi(x, x)$$

zur Construction der gesuchten Formen  $\varphi$  und  $\psi$  wesentlich ausreicht.

Die im Vorstehenden allgemein entwickelten Resultate können für die hypergeometrische Reihe der 5<sup>ten</sup> und 6<sup>ten</sup> Ordnung durch wirkliche Aufstellung und Berechnung der in Frage kommenden Invarianten und Covarianten directe Bestätigung finden\*\*).

Nachdem nun die beiden fundamentalen Fragen nach den Bedingungen der Möglichkeit und den Mitteln zur Ausführung der Transformation einer binären Form in eine endliche hypergeometrische Reihe zur allgemeinen Erledigung gebracht sind, liegt es nahe, noch einer gewissen ausgezeichneten Ausartung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe zu gedenken, welche in Folge unseres gegenwärtigen invariantentheoretischen Standpunktes eine besonders einfache Deutung erhält.

Wählen wir nämlich die bisher allgemeinen Formen  $\varphi$  und  $\psi$  derart, dass der Wurzelpunkt der letzteren Form harmonisch zu den drei Wurzelpunkten der ersteren gelegen ist, so wird durch diese invariante Bedingung die simultane Ueberführung jener beiden Formen in die Gestalten:

$$x_1^2 x_2 - x_3^2, \text{ beziehungsweise: } cx_1$$

ermöglicht. Unter Anwendung unserer oben behandelten Darstellungsmethode mittelst einseitiger Derivirter gewinnen wir aus der allgemeinen Covariantenrelation (7) der hypergeometrischen Reihe die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

\*) Vergl. die Cayleysche Tabelle für die Invarianten und Covarianten der Grundform 5<sup>ter</sup> Ordnung. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Art. 232. Nr. 10 und 11.

\*\*) Vergl. die anfangs citirte Dissertation des Verfassers, pag. 17 und 28, wo diese Rechnung für die allgemeine Kugelfunction der 5<sup>ten</sup> und der 6<sup>ten</sup> Ordnung im Wesentlichen durchgeführt ist.

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{3} (n-1) (3c+4) x \frac{df}{dx} + \frac{1}{3} n (n-1) (3c+1) f = 0,$$

in welcher wir nach der Substitution:

$$c = - \frac{4n + 3p - 4}{3(n-1)}$$

die gewöhnliche Differentialgleichung für die allgemeine Kugelfunction  $P_p^*$  wiedererkennen. Da offenbar auch umgekehrt die Differentialgleichung der Kugelfunction mit Nothwendigkeit zu jenen invarianten Beziehungen führt, so ist die Existenz zweier harmonisch liegender Formen  $\varphi$  und  $\psi$  mit der simultanen Beziehung (7) in invariantentheoretischem Sinne das nothwendige und hinreichende Kriterium für die Kugelfunction  $P_p^*$ .

Im Uebrigen gelten naturgemäss für die Kugelfunctionen dieselben Ueberlegungen, wie für die allgemeine hypergeometrische Reihe. So ersieht man beispielsweise für die Kugelfunction 6<sup>ter</sup> Ordnung die Existenz einer Form 5<sup>ter</sup> Ordnung mit den covarianten Beziehungen (8), da in der That die Relationen:

$$(P_p^6, P_{p'}^5)_5 = 0, \quad (P_p^6, P_{p'}^5)_4 = 0$$

für:

$$p + p' + 12 = 0$$

identisch erfüllt sind. \*)

Königsberg i. Pr., den 23. Februar 1887.

---

\*) Betreffs weiterer den Kugelfunctionen allein zukommenden invarianten Eigenthümlichkeiten vergl. die citirte Dissertation, pag. 15, 16, 18, 26.