Sulla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici.

(*Di* Carlo Bigiavi, *a Firenze.*)

1. Nella Memoria (*): *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari riducibili,* ho esposto, assieme ad altre considerazioni generali, la dimostrazione di un teorema sulla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici. In cotesta dimostrazione sono caduto in una leggera inesattezza, che è bene rilevare, tanto più che per correggerla bisogna anche modificare l'enunciato del teorema, che, sebbene di secondaria importanza, è pur sempre di un certo interesse.

Trattandosi di cosa breve, trascriverò dapprima l'enunciato e la dimostrazione del teorema come figurano nella Memoria sopraccennata, indicando poi in che consista l'errore, ed esponendo da ultimo, dopo qualche considerazione ausiliaria; il nuovo enunciato e la nuova dimostrazione, che farò seguire da alcune osservazioni ed esempi.

2. Mi servirò delle medesime notazioni di allora:

$$F(x,\ y,\ n)=0,\quad G(x,\ y,\ m)=0,\quad \Phi(v,\ z,\ p)=0,$$

o $F=0$, $G=0$, $\Phi=0$ per rappresentare le equazioni differenziali lineari omogenee che hanno il coefficiente della più alta derivata eguale all'unità e gli altri eguali a funzioni meromorfe tali che quello della derivata i^{esima} abbia soltanto poli d'ordine inferiore o tutt'al più eguali ad i. Quest'equazioni godono della proprietà di avere tutti i loro integrali regolari nelle vicinanze di ogni punto singolare a distanza finita. Nelle prime notazioni le tre lettere fra parentesi stanno ad indicare rispettivamente la variabile indipendente, la funzione incognita e l'ordine dell'equazione.

(*) *Annali di Matematica pura ed applicata.* Serie II, tomo XIX.

Ciò premesso ecco l'enunciato e la dimostrazione del teorema:

Un'equazione $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti ellittici e riducibile, ammette tutti gl'integrali di un'altra equazione $G(x, y, m) = 0$, pure a coefficienti ellittici e di ordine $m < n$.

La $F(x, y, n) = 0$, essendo riducibile, ammetterà tutti gl'integrali di un'altra equazione $G(x, y, m) = 0$, d'ordine $m < n$. Di queste equazioni ve ne potranno essere più d'una: noi peraltro sceglieremo una di quelle per le quali m abbia il massimo valore. Si tratta di dimostrare che l'equazione $G(x, y, m) = 0$, scelta in questo modo, è pure a coefficienti ellittici.

Supponiamo infatti che non lo sia; allora, indicando con 2ω e $2\omega'$ i periodi dei coefficienti di $F = 0$, osserviamo che quest'equazione sarà ancora soddisfatta dagl'integrali delle altre due:

$$G(x + 2\omega, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega', y, m) = 0.$$

Confrontiamo la $G(x, y, m) = 0$ con una di queste equazioni, ad es.: colla prima; può darsi che le due equazioni:

$$G(x, y, m) = 0, \quad G(x + 2\omega, y, m) = 0 \tag{1}$$

non abbiano alcun integrale a comune, come pure può accadere che siano ambedue riducibili ed abbiano p integrali a comune, essendo naturalmente $p < m$. In tal caso questi p integrali appartengono ad un'equazione $H(x, y, p) = 0$.

Consideriamo un punto qualunque x_0 che non sia un polo dei coefficienti di $F = 0$, e indichiamo con $u_1, u_2, \dots u_n$ n integrali distinti di quest'equazione, definiti dai loro sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0. È chiaro che potremo supporli scelti in modo che:

$$u_1, u_2, \dots u_{m-p}, u_{m-p+1}, \dots u_m, \tag{2}$$

$$u_{m-p+1}, u_{m-p+2}, \dots u_{2m-p}, \tag{3}$$

appartengono gli uni alla prima delle (1) e gli altri alla seconda. Allora $u_{m-p+1}, u_{m-p+2}, \dots u_m$ saranno gl'integrali di $H = 0$. Se le (1) non avessero integrali a comune, e quindi la $H = 0$ non esistesse, basterebbe fare $p = 0$.

Si descriva con la x un cammino qualunque tale che, partendo da x_0, non passi per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, e ritorni in x_0. Durante questo giro chiuso, che potremo indicare con Γ, le funzioni u variano con continuità; ma, quando x ritorna in x_0, le u prendono valori differenti dagli iniziali, e che si possono ottenere effettuando su questi valori iniziali una sostituzione lineare a coefficienti costanti.

Ma col giro Γ si vengono ad eseguire altre due sostituzioni lineari, cioè una sugl'integrali (2) e l'altra sugl'integrali (3), e ciò perchè i coefficienti delle equazioni (1) sono monodromi. Da ciò risulta subito che, se consideriamo le funzioni:

$$u_1, \; u_2, \ldots \; u_{2m-p}, \tag{4}$$

su di esse pure si viene ad eseguire una sostituzione lineare a coefficienti costanti, quando colla x si fa il giro Γ. Se quindi si costruisce un'equazione che nelle vicinanze di x_0 abbia le funzioni (4) per integrali, si vede subito che essa è a coefficienti monodromi e di quelle che si possono indicare con una notazione della forma $K(x, y, 2m-p) = 0$.

Ma quest'equazione non può sussistere, perchè tutti i suoi integrali, che sono in numero di $2m - p > m$ appartengono anche alla $F = 0$. Per conseguenza i coefficienti di $G(x, y, m) = 0$ devono avere il periodo 2ω. Similmente si prova che ammettono il periodo $2\omega'$; quindi la $G(x, y, m) = 0$ è un'equazione a coefficienti ellittici c. d. d.

Questa dimostrazione per altro non regge più, quando le funzioni (4) costituiscono un sistema d'integrali particolari della $F = 0$, cioè quando è $2m - p = n$, nel qual caso la $K = 0$ viene a coincidere coll'equazione data $F = 0$, e quindi sussiste effettivamente.

3. Avanti di esporre il nuovo teorema modificato, sarà utile, per abbreviarne e semplificarne la dimostrazione, di premettere tre lemmi relativi alle equazioni differenziali lineari. Faremo precedere da alcune osservazioni il primo di essi, che si riferisce alle equazioni a coefficienti semplicemente periodici.

Essendo data un'equazione $G(x, y, m) = 0$ ed un punto x_0 del piano della variabile, scelto ad arbitrio, colla condizione peraltro che non sia un polo dei coefficienti di $G = 0$, si può sempre determinare uno ed un solo sistema $y_1, y_2, \ldots y_m$ d'integrali particolari distinti di questa equazione, quando siano dati i valori che essi devono prendere nel punto x_0. *Chiameremo x_0 origine del sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$, e chiameremo valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in x_0.*

Uno dei modi per costruire gl'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$ è quello di determinarne gli sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0. Si ottengono così m funzioni definite entro un circolo di centro x_0, che possono proseguirsi in tutto il piano, quando ne siano esclusi i poli dei coefficienti di $G = 0$. Esse variano con continuità, quando x si muove, evitando tali punti, e, al ritorno della variabile in x_0, dopo un cammino qualunque chiuso Γ, prendono in questo punto e nelle sue vicinanze dei valori che possono ottenersi eseguendo sui valori iniziali delle y, nei punti corrispondenti, una sostituzione lineare S a coefficienti costanti e a determinante diverso da zero. Le nuove funzioni così ottenute, che sono e si mantengono legate alle antiche dalla sostituzione S, possono nel medesimo modo di esse proseguirsi in tutto il piano, e costituiscono un altro sistema di m integrali particolari distinti di $G=0$, coll'origine in x_0 e di cui i valori iniziali si esprimono coi valori iniziali antichi mediante la sostituzione S.

Si può dimostrare facilmente che tutte le sostituzioni S che subiscono gl'integrali $y_1, y_2, \dots y_m$ con tutti i possibili giri Γ costituiscono un gruppo.

Considerando un altro sistema $z_1, z_2, \dots z_m$ d'integrali particolari distinti di $G=0$, coll'origine in x_0 e con valori iniziali differenti da quelli degl'integrali y, e denotando con T la sostituzione lineare per mezzo della quale gl'integrali z si esprimono con quelli y, è facile vedere che col giro Γ le funzioni z subiscono la sostituzione $T\,S\,T^{-1}$, da cui risulta che il gruppo di sostituzioni relativo agl'integrali z è il trasformato mediante T di quello relativo agl'integrali y.

Considerando poi un altro punto x_1 diverso da x_0, che non sia un polo dei coefficienti di $G=0$, ed una linea Δ che vada da x_0 a x_1 passando per punti tutti della stessa natura di x_0 ed x_1, si può prendere x_1 e i valori che in esso assumono gl'integrali y, quando la variabile partendo da x_0 vi giunge per Δ, come origine e come valori iniziali degl'integrali y. In tal caso si vede facilmente che il gruppo di sostituzioni che ne risulta coincide con quello relativo al punto x_0, e ciò anche modificando la scelta della linea Δ Sicchè ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti di $G=0$, e che principii da un punto qualunque del piano, fa subire agli integrali y una sostituzione che appartiene al gruppo del punto x_0 o a quello del punto x_1. Perciò *chiameremo gruppo di sostituzione dell'equazione* $G=0$ *relativo al sistema d'integrali* y *quel gruppo di sostituzioni che subiscono questi integrali con tutti i possibili giri chiusi della variabile che non passano per alcun polo dei coefficienti di* $G=0$.

Diremo che più equazioni, in numero finito e dello stesso ordine, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando si può determinare per ognuna di esse un sistema d'integrali particolari distinti in modo che gl'integrali di questi diversi sistemi subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei loro coefficienti.

Per mezzo della proprietà, che il cambiamento del sistema d'integrali trasforma il gruppo mediante una sostituzione, si dimostra facilmente *che tre equazioni posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando ciò accade per due coppie qualunque di esse.*

Diremo finalmente che tutte le equazioni di una successione infinita posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, quando ciò accade per un numero finito qualunque di esse, scelte ad arbitrio.

4. Ciò premesso ecco l'enunciato del 1.º lemma:

Un'equazione riducibile $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti semplicemente periodici, a cui appartengono tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile $\Phi_0(x, y, p) = 0$, a coefficienti non periodici, ammette tutti gl'integrali d'infinite altre equazioni che posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni di $\Phi_0 = 0$.

Essendo 2ω il periodo dei coefficienti di $F = 0$, si faccia nell'equazione $\Phi_0 = 0$ un cambiamento di variabile, ponendo:

$$x = x' + 2s\omega,$$

essendo s un numero intero qualunque, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la variabile indipendente della nuova equazione che così si ottiene, che indicheremo con $\Phi_s(x, y, p) = 0$, e che è distinto dalla $\Phi_0 = 0$, poichè i coefficienti di quest'ultima equazione non sono periodici. Dando successivamente ad s tutti i valori interi positivi e negativi diversi da zero, si ottiene, considerando anche la $\Phi_0 = 0$, la serie di equazioni di ordine p:

$$\ldots \Phi_{-s} = 0, \ldots\ \Phi_{-1} = 0,\ \Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = 0, \ldots\ \Phi_s = 0, \ldots \tag{5}$$

che sono tutte distinte, irriduttibili e godono della proprietà che i loro integrali sono anche integrali di $F = 0$.

Essendo ε_1 un numero intero e positivo, eguale o immediatamente inferiore al rapporto $\frac{n}{p}$, consideriamo le $\varepsilon_1 + 1$ equazioni:

$$\Phi_0 = 0,\ \Phi_1 = 0, \ldots\ \Phi_{\varepsilon_1} = 0, \tag{6}$$

ed un punto x_0 sul piano della variabile tale che i punti:

$$x_0 - 2\varepsilon_1\omega, \ldots\ x_0 - 2\omega,\ x_0,\ x_0 + 2\omega, \ldots\ x_0 + 2\varepsilon_1\omega,$$

non siano poli dei loro coefficienti, e determiniamo per ciascuna delle (6) un sistema di p integrali particolari distinti mediante sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0.

Può darsi che tutti gl'integrali così definiti delle prime $\varepsilon_2 + 1$ equazioni (6), essendo ε_2 un numero intero compreso fra zero ed ε_1, non siano legate fra loro da alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, il che accade sempre per $\varepsilon_2 \leqq 1$; come pure può darsi, e ciò si verifica sempre per $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, che essi siano legati fra loro da alcune di tali relazioni. Esisterà quindi un valore intero ε tale che per $\varepsilon_2 \geqq \varepsilon$ si verifichi questo secondo caso e per $\varepsilon_2 < \varepsilon$ si verifichi invece il primo.

In ognuna delle relazioni lineari omogenee che sussistono fra gl'integrali delle prime $\varepsilon + 1$ equazioni (6), e nelle quali si devono sempre trovare integrali di $\Phi_\varepsilon = 0$, devono pure figurare integrali di $\Phi_0 = 0$. Supponendo infatti che gl'integrali di $\Phi_h = 0$, essendo $h > 0$, siano i primi che figurano in una di tali relazioni, consideriamo una linea Δ che vada da x_0 a $x_0 - 2\,h\,\omega$ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (6), e prendiamo il punto $x_0 - 2\,h\,\omega$ come nuova origine degl'integrali delle equazioni $\Phi_h = 0, \ldots\, \Phi_\varepsilon = 0$ e come valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in $x_0 - 2\,h\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, gl'integrali già stabiliti per queste equazioni. Per ricondurre l'origine nel punto x_0 si faccia un cambiamento di variabile, penendo $x = x' - 2\,h\,\omega$, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la nuova variabile indipendente. In questo modo le equazioni precedenti si trasformano nelle altre $\Phi_0 = 0, \ldots\, \Phi_{\varepsilon-h} = 0$, e i loro integrali divengono integrali di quest'ultime equazioni, e possono quindi rappresentarsi con gl'integrali già stabiliti per esse mediante espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Perciò la relazione che si considera viene a trasformarsi in un'altra fra integrali di equazioni (6), comprese fra la $\Phi_0 = 0$ e la $\Phi_{\varepsilon-h} = 0$, e nella quale figurano sempre alcuni integrali di ognuna di queste due equazioni, il che è impossibile, essendo ε il più piccolo indice che possa dare origine ad una simile relazione.

Dalle prime $\varepsilon + 1$ delle (6) escludiamo alcune equazioni, diverse dalla prima e dall'ultima, in modo da formare un sistema di $q + 1$ equazioni tali che fra gl'integrali di q qualunque di esse non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e che esistano invece di tali relazioni fra gl'integrali di tutte le $q + 1$ equazioni.

Esaminando in modo speciale una di queste relazioni, osserviamo che in essa deve sempre figurare almeno un integrale di ciascuna delle $q + 1$ equazioni, che considereremo sempre secondo l'ordine crescente dei loro indici. Se $\tau_1, \tau_2, \ldots\, \tau_p$ sono i p integrali particolari distinti di $\Phi_0 = 0$, e se quest'integrali si trovano nella relazione, formando in essa l'espressione

$\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2 + \cdots + \delta_p \tau_p$, nella quale le δ sono costanti, potremo sostituire nella relazione a questa espressione delle τ un unico integrale u_1 di $\Phi_0 = 0$, legato alle τ dalla relazione:

$$A u_1 = \delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2 + \cdots + \delta_p \tau_p ,$$

nella quale A è una costante che si può scegliere ad arbitrio, purchè si escluda il valore $A = 0$. Operando sullo stesso modo sugl'integrali delle altre q equazioni potremo sempre mettere la relazione che si considera sotto la forma:

$$A u_1 + B v_1 + C w_1 + \cdots = 0, \tag{7}$$

nella quale le A, B, C,... sono costanti sempre diverse da zero, ma che del resto possono scegliersi ad arbitrio, ed ogni funzione u_1, v_1, w_1,... è un integrale di quella delle $q + 1$ equazioni che occupa il medesimo posto.

Esclusa l'equazione $Q_0 = 0$, tutti gl'integrali delle altre q, che sono linearmente indipendenti, costituiscono, come si può dimostrare facilmente, un sistema di $q\,p$ integrali particolari distinti di un'equazione $F_1 = 0$ di ordine $q\,p$. Ma anche u_1 a causa della (7) verifica la $F_1 = 0$. Perciò tutti gli altri integrali di $\Phi_0 = 0$ devono pure verificarla, essendo la $\Phi_0 = 0$ irriduttibile. Epperò, se u_2 è un altro integrale di quest'equazione, distinto da u_1, esso, dovendo verificare la $F_1 = 0$, sarà un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti degl'integrali di $F_1 = 0$, ossia degl'integrali delle altre q equazioni $\Phi = 0$, ed in questa espressione dovrà figurare almeno un integrale di ogni equazione. Potremo qui pure raggruppare in un solo tutti gl'integrali di una stessa equazione e scegliere questi nuovi integrali in modo che la relazione che ci dà u_2 possa anch'essa convertirsi in una relazione della forma:

$$A u_2 + B v_2 + C w_2 + \cdots = 0,$$

nella quale ogni funzione u_2, v_2, w_2,... è un integrale di un'equazione, di quella medesima a cui appartiene come integrale la funzione corrispondente della (7). Scegliendo quindi per l'equazione $\Phi_0 = 0\,p$ integrali particolari distinti, fra i quali si trovino anche u_1 e u_2, e che indicheremo con u_1, u_2,... u_p, si potranno formare per queste funzioni u le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} A u_1 + B v_1 + C w_1 + \cdots = 0 \\ A u_2 + B v_2 + C w_2 + \cdots = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A u_p + B v_p + C w_p + \cdots = 0 , \end{array}\right\} \tag{8}$$

nelle quali le funzioni di una medesima colonna, che posseggono il medesimo fattore costante e sono rappresentate dalla medesima lettera con indici differenti, sono p integrali particolari di una stessa equazione e sono distinti. Difatti, se esistessero p costanti $l_1, l_2, \ldots l_p$ per le quali fosse:

$$e_1 v_1 + e_2 v_2 + \cdots + e_p v_p = 0,$$

si avrebbe pure:

$$A \Sigma_i e_i u_i + C \Sigma_i e_i w_i + \cdots = 0,$$

e quindi esisterebbe una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali di q delle $q+1$ equazioni, il che è impossibile.

Abbiamo così per ciascuna delle $q+1$ equazioni scelto un sistema speciale di p integrali particolari distinti, ed al tempo stesso siamo giunti alla conclusione che tutti questi integrali sono legati fra loro dalle p relazioni indipendenti (8). È facile anche vedere che all'infuori delle (8) non può sussistere alcun'altra relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali delle $q+1$ equazioni che non sia una conseguenza di esse. Difatti, se una tal relazione esistesse, si potrebbe fra essa e le (8) eliminare i p integrali $u_1, u_2, \ldots u_p$, e si otterrebbe così una relazione fra gl'integrali di q soltanto delle $q+1$ equazioni, il che è impossibile.

Si faccia percorrere alla variabile a partire dal punto x_0 un cammino chiuso qualunque Γ che non passi per alcun polo dei coefficienti delle $q+1$ equazioni. Gl'integrali di ciascuna di esse, dopo questo giro chiuso, si trasformano in altri integrali, che possono ottenersi eseguendo sui primitivi una sostituzione lineare. Siano:

$$[u_1], \ldots [u_p]; \quad [v_1], \ldots [v_p]; \quad [w_1], \ldots [w_p]; \ldots$$

le nuove funzioni in cui si mutano le antiche:

$$u_1, \ldots u_p; \quad v_1, \ldots v_p; \quad w_1, \ldots w_p; \ldots$$

col giro Γ e:

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{pp}; \quad \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots \beta_{pp}; \quad \gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots \gamma_{pp}, \ldots$$

le costanti delle sostituzioni che ci danno i valori delle prime espressi con quelli delle seconde. Avremo allora:

$$\begin{aligned}
[u_1] &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \cdots + \alpha_{1p} u_p \\
[u_2] &= \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \cdots + \alpha_{2p} u_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[v_1] &= \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \cdots + \beta_{1p} v_p \\
[v_2] &= \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \cdots + \beta_{2p} v_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[w_1] &= \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \cdots + \gamma_{1p} w_p \\
[w_2] &= \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \cdots + \gamma_{2p} w_p \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots ,
\end{aligned}
$$

da cui si ottiene:

$$
\begin{aligned}
A\,\alpha_{11} u_1 + B\,\beta_{11} v_1 + C\,\gamma_{11} w_1 + \cdots + A\,\alpha_{12} u_2 + B\,\beta_{12} v_2 + C\,\gamma_{12} w_2 + \cdots &= 0 \\
A\,\alpha_{21} u_1 + B\,\beta_{21} v_1 + C\,\gamma_{21} w_1 + \cdots + A\,\alpha_{22} u_2 + B\,\beta_{22} v_2 + C\,\gamma_{22} w_2 + \cdots &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}
$$

Sostituendo a $u_1, \ldots u_p$ i loro valori ricavati dalle (8), si ha:

$$
\begin{aligned}
& B\,(\beta_{11} - \alpha_{11})\, v_1 + C\,(\gamma_{11} - \alpha_{11})\, w_1 + \cdots + \\
& \qquad\qquad + B\,(\beta_{12} - \alpha_{12})\, v_2 + C\,(\gamma_{12} - \alpha_{12})\, w_2 + \cdots = 0 \\
& B\,(\beta_{21} - \alpha_{21})\, v_1 + C\,(\gamma_{21} - \alpha_{21})\, w_1 + \cdots + \\
& \qquad\qquad + B\,(\beta_{22} - \alpha_{22})\, v_2 + C\,(\gamma_{22} - \alpha_{22})\, w_2 + \cdots = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Quest'ultime relazioni non possono sussistere altro che nel caso che tutti i coefficienti degl'integrali v_1, $w_1, \ldots$ siano identicamente nulli, perchè esse sono relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti fra gl'integrali di q delle $q+1$ equazioni. Perciò le costanti β_{11}, $\beta_{12}, \ldots$ γ_{11}, $\gamma_{12}, \ldots$ devono eguagliare rispettivamente le α cogli stessi indici. Quindi la sostituzione, che col giro qualunque chiuso Γ subiscono gl'integrali di ognuna delle $q+1$ equazioni, è la stessa per tutte. Epperò tutte queste equazioni posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni.

Siano $\Phi_i = 0$, $\Phi_{i+l_1} = 0$ due delle $q+1$ equazioni, consecutive e scelte in modo che la differenza positiva l_1 dei loro indici abbia il minimo valore. Essendo r un numero intero qualunque, si faccia un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\,r\,\omega$, e si chiami nuovamente con x la variabile indipendente. Si ottengono così le due equazioni $Q_{i+r} = 0$, $Q_{i+r+l_1} = 0$, le quali posseggono evidentemente lo stesso gruppo di sostituzioni come le precedenti. Se diamo ad r tutti i valori interi positivi e negativi, si vede che due equazioni della serie (5), che hanno l_1 per differenza dei loro indici, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.

Considerando poi la serie di equazioni:

$$\Phi_{a-sl_1} = 0, \ldots \quad \Phi_{a-l_1} = 0, \quad \Phi_a = 0, \quad \Phi_{a+l_1} = 0, \ldots \quad \Phi_{a+sl_1} = 0 \ldots \tag{9}$$

nelle quali a è un numero intero qualunque, e confrontando ciascuna di esse con quelle che la segue, si può concludere che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5) che hanno un multiplo qualunque di l_1 per differenza dei loro indici.

Nel caso speciale di $a = 0$ le (9) divengono equazioni della serie (5) che hanno per indici tutti i multipli di l_1, e che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni di $\Phi_0 = 0$. Questo risultato è sufficiente per la dimostrazione del lemma; noi per altro lo completeremo con alcune osservazioni.

5. Se le $q + 1$ equazioni, fra le quali è anche la $\Phi_0 = 0$, non hanno tutte la forma $\Phi_{hl_1} = 0$, ove h è un numero intero e positivo, essendo nullo solo per $\Phi_0 = 0$, se ne troverà sempre una di esse $\Phi_m = 0$ di cui l'indice sarà compreso fra due multipli consecutivi di l_1, ad es.: $b\, l_1$, $(b + 1)\, l_1$. Allora le tre equazioni:

$$\Phi_{bl_1} = 0, \quad \Phi_m = 0, \quad \Phi_{(b+1)\, l_1} = 0,$$

posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni, e le differenze d'indici $m - b\, l_1$, $(b + 1)\, l_1 - m$ sono tutte due minori di l_1. Indicando con l_2 la più piccola di esse, si trova che posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5) che hanno un multiplo qualunque di l_2 per differenza dei loro indici.

Ragionando sul numero l_2 come sul numero l_1, e seguitando in questo modo si giungerà ad un numero intero e positivo l_k, che potrà anche essere l'unità, tale che gl'indici delle $q + 1$ equazioni risultino multipli positivi di l_k, eccetto quello della prima che è lo zero. Inoltre anche per l_k come per l_1 e l_2, sussiste la proprietà che due equazioni (5), che hanno per differenza dei loro indici un multiplo di l_k, posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.

Nel caso che sia $l_k > 1$ può anche darsi che posseggano lo stesso gruppo di sostituzioni due equazioni (5), che hanno per differenza dei loro indici un numero minore di l_k, e per conseguenza anche due qualunque della (5), che hanno per differenza dei loro indici un multiplo di questo numero minore di l_k. Se l è il più piccolo numero intero e positivo che gode di questa proprietà, si può vedere facilmente che l_k è un multiplo di l, e che quindi gli indici delle $q + 1$ equazioni, esclusa la $\Phi_0 = 0$, sono multipli di l.

6. Passiamo a dimostrare il 2.° lemma che si può enunciare così:

Se un'equazione irriduttibile $G(x, y, m) = 0$ ammette due sistemi di m integrali particolari distinti, che subiscono la medesima sostituzione lineare *per ogni giro chiuso della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti dell'equazione, gl'integrali del 1.º sistema differiscono per un medesimo fattore costante da quelli corrispondenti del secondo.*

Siano $y_{11}, y_{12}, \ldots y_{1m}; y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2m}$ due sistemi d'integrali particolari distinti di $G=0$, che subiscono la medesima sostituzione lineare S per ogni giro chiuso Γ della variabile che non passi per alcun polo dei coefficienti di $G=0$, e sia:

$$T=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{Bmatrix},$$

la sostituzione lineare che ci dà i valori degl'integrali del 1.º sistema espressi per mezzo di quelli del 2.º Quando questi ultimi subiscono col giro Γ la sostituzione S quelli del 1.º sistema subiscono la sostituzione $T S T^{-1}$, che, dovendo essere eguale ad S, ci conduce all'eguaglianza $S=T S T^{-1}$, o anche all'altra $T=S T S^{-1}$, dalla quale risulta, come del resto è già noto che il giro Γ trasforma i due sistemi d'integrali in altri due sistemi tali che gl'integrali del 1.º sistema si esprimono sempre con quelli del 2.º mediante la sostituzione T.

Considerando altri due sistemi d'integrali particolari distinti di $G=0$ $z_{11}, z_{12}, \ldots z_{1m}; z_{21}, z_{22}, \ldots z_{2m}$, i quali siano espressi rispettivamente con quelli y dei due sistemi precedenti mediante la sostituzione R. Evidentemente gl'integrali di questi due nuovi sistemi col giro Γ della variabile subiscono anch'essi una medesima sostituzione, la quale è data da $S_1=R S R^{-1}$ e gli integrali z del 1.º sistema possono esprimersi con quelli del 2.º mediante la sostituzione $T_1=R T R^{-1}$. Cosicchè, essendo:

$$S_1 T_1 = R S T R^{-1}, \quad T_1 S_1 = R T S R^{-1},$$

avremo pure: $T_1 = S_1 T_1 S_1^{-1}$.

Potremo disporre delle costanti di R in modo che la sostituzione T_1 abbia la forma canonica, cioè tale che gl'integrali $z_{11}, z_{12}, \ldots z_{1m}$ del 1.º sistema e quindi anche quelli corrispondenti $z_{21}, z_{22}, \ldots z_{2m}$ del 2.º possano distribuirsi in gruppi, in modo che per uno qualunque di questi gruppi, ad es.: per il primo si abbia:

$$
\begin{aligned}
z_{11} &= \mu\, z_{21} \\
z_{12} &= \alpha_{21}\, z_{21} + \mu\, z_{22} \\
z_{13} &= \alpha_{31}\, z_{21} + \alpha_{32}\, z_{22} + \mu\, z_{23} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
z_{1k} &= \alpha_{k1}\, z_{21} + \alpha_{k2}\, z_{22} + \alpha_{k3}\, z_{23} + \cdots + \alpha_{kk-1}\, z_{2k-1} + \mu\, z_{2k},
\end{aligned}
$$

essendo μ una radice multipla secondo k dell'equazione caratteristica:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11}-\varepsilon & a_{12} & \dots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22}-\varepsilon & \dots & a_{2m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}-\varepsilon
\end{vmatrix} = 0.
$$

Può darsi che alcune delle costanti α siano nulle in modo che oltre all'integrale z_{11} ve ne siano altri del 1.° sistema d'integrali z che eguaglino i corrispondenti del 2.° sistema moltiplicati per il medesimo fattore μ. Supponendo che in tutti siano in numero di h, indichiamoli con t_{11}, $t_{12}, \dots$ t_{1h} e indichiamo con t_{21}, $t_{22}, \dots$ t_{2h} quelli corrispondenti del 2.° sistema.

Dalla relazione $T_1 = S_1\, T_1\, S_1^{-1}$ risulta che i valori che prendono gl'integrali t_{11}, $t_{12}, \dots$ t_{1h} dopo un giro Γ devono sempre eguagliare il fattore μ moltiplicato pei valori che prendono gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \dots$ t_{2h} dopo lo stesso giro Γ. Ma, quando sugl'integrali z del 2.° sistema si effettua la sostituzione T_1 per avere i valori di z_{11}, $z_{12}, \dots$ z_{1m} espressi per mezzo di quelli di z_{21}, $z_{22}, \dots$ z_{2m}, tutte le espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di quest'ultime funzioni: che mediante T_1 si riproducono moltiplicate per il fattore costante μ, devono contenere soltanto gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \dots$ t_{2h}. Quindi con un giro qualunque Γ quest'integrali devono trasformarsi in espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di essi stessi, ossia devono subire una sostituzione lineare a coefficienti costanti e a determinante diverso da zero. Quest'ultima condizione è necessaria, perchè altrimenti fra gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \dots$ t_{2h} sussisterebbero delle relazioni omogenee a coefficienti costanti, il che è impossibile. Ma, se gl'integrali t_{21}, $t_{22}, \dots$ t_{2h} godono di questa proprietà, esiste un'equazione $G_1(x, y, h) = 0$, d'ordine h a m, di cui essi costituiscono un sistema d'integrali particolari distinti, il che è pure impossibile, perchè l'equazione $G(x, y, m) = 0$ è irriduttibile. Da tutto ciò si conclude che tutti gl'integrali $z_{21}, z_{22}, \ldots z_{2m}$ devono, mediante la sostituzione T_1, riprodursi moltiplicati per il fattore costante μ, e lo stesso deve accadere per gl'integrali $y_{21}, y_{22}, \ldots y_{2m}$, quando su di essi si effettua la sostituzione T, che quindi coincide con T_1 ed è della forma:

$$T = \begin{vmatrix} \mu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu \end{vmatrix}.$$

Di qui risulta che gl'integrali del primo sistema differiscono per un medesimo fattore costante μ da quelli corrispondenti del 2.° sistema. c. d. d.

7. Valendoci di questi due lemmi, possiamo dimostrare il terzo, che è relativo alla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti semplicemente periodici, e che si può enunciare nel modo seguente:

Un'equazione differenziale lineare riducibile $F(x, y, n) = 0$, a coefficienti semplicemente periodici, ammette tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile $\Phi(x, y, p) = 0$, pure a coefficienti semplicemente periodici ed aventi lo stesso periodo 2ω di $F = 0$ o un multiplo conveniente di questo periodo.

Indichiamo con $\Phi_0(x, y, p) = 0$ un'equazione d'ordine $p < n$ e tale che tutti i suoi integrali appartengano anche ad $F = 0$, e supponiamola scelta in modo che p abbia il minimo valore. Ne viene di conseguenza che una simile equazione è necessariamente irriduttibile. Escludendo l'ipotesi che la $\Phi_0 = 0$ sia a coefficienti periodici con un multiplo di 2ω per periodo, nel qual caso non occorrerebbe più proseguire la dimostrazione, si deduca dalla $\Phi_0 = 0$ la serie di equazioni analoghe alle (5):

$$\ldots \Phi_{-s} = 0, \quad \Phi_{-1} = 0, \quad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \ldots \quad \Phi_s = 0, \ldots, \tag{10}$$

sulle quali potremo ragionare ed operare come nel 1.° dei due lemmi precedenti.

Troveremo così il numero ε_1 che ci permetterà di scegliere il punto x_0 e di determinare i numeri ε, q, l_k, l e le $q + 1$ equazioni, che potremo rappresentare con:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_{al} = 0, \quad \Phi_{bl} = 0, \ldots \quad \Phi_{hl} = 0, \tag{11}$$

ove $a, b, c, \ldots h$ sono numeri interi soggetti alle disuguaglianze:

$$0 < a < b < \cdots < h.$$

Dovendo la $\Phi_\varepsilon = 0$ essere la $\Phi_{hl} = 0$, avremo pure: $h\,l = \varepsilon$.

Considerando le prime due delle $h+1$ equazioni:

$$\Phi_0 = 0\,, \quad \Phi_l = 0\,, \quad \Phi_{2l} = 0\,, \ldots \quad \Phi_{hl} = 0\,, \tag{12}$$

che posseggono tutto il medesimo gruppo di sostituzioni, denotiamo con u_{01}, $u_{02}, \ldots u_{0p}$ e con u_{11}, $u_{12}, \ldots u_{1p}$ due sistemi d'integrali particolari distinti, l'uno di $\Phi_0 = 0$ e l'altro di $\Phi_l = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, e tali che subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile, che, partendo da x_0, vi ritorni senza passare per alcun polo dei coefficienti di $\Phi_0 = 0$ e di $\Phi_l = 0$.

Considerando una linea Δ che vada da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (12), prendiamo il punto $x_0 + 2\,l\,\omega$ come nuova origine degl'integrali dell'equazione $\Phi_0 = 0$ e come valori iniziali di questi integrali i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, gl'integrali $u_{01}, \ldots u_{0p}$. Per ricondurre l'origine nel punto x_0 si faccia un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\,l\,\omega$, e si seguiti a rappresentare con x, invece che con x', la nuova variabile indipendente. In questo modo l'equazione $\Phi = 0$ si trasforma nell'altra $\Phi_l = 0$, e i suoi integrali, che dopo il cambiamento indicheremo con $(u_{01}), \ldots (u_{0p})$, divengono p integrali particolari distinti di $\Phi_l = 0$, che nel punto x_0 prendono rispettivamente i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$ gl'integrali $u_{01}, \ldots$ u_{0p}, quando la variabile giunge in questo punto passando per Δ. Perciò le funzioni $(u_{01}), \ldots (u_{0p})$ potranno esprimersi con gl'integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$, già stabiliti per $\Phi_l = 0$, mediante una sostituzione lineare T.

Considerazioni analoghe a queste possono farsi sull'equazione $\Phi_l = 0$ e sui suoi integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$. Dopo il cambiamento di variabile la $\Phi_l = 0$ si trasforma nella $\Phi_{2l} = 0$, e i suoi integrali, che indicheremo con $(u_{11}), \ldots$ (u_{1p}), divengono p integrali particolari distinti di $\Phi_{2l} = 0$, che nel punto x_0 prendono rispettivamente i valori che prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$ gl'integrali $u_{11}, \ldots u_{1p}$, quando la variabile giunge in questo punto passando per Δ. Potremo quindi determinare un sistema $u_{21}, \ldots u_{2p}$ di p integrali particolari distinti di $\Phi_{2l} = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, in modo che le funzioni $(u_{11}), \ldots (u_{1p})$ possano esprimersi con essi mediante la sostituzione T.

Evidentemente le funzioni $u_{01}, \ldots u_{0p}$ subiscono la medesima sostituzione lineare delle altre $u_{11}, \ldots u_{1p}$ per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da $x_0 + 2\,l\,\omega$, vi ritorni senza passare per alcun polo dei coefficienti di $\Phi_0 = 0$ e di $\Phi_l = 0$. Col cambiamento di variabile che abbiamo indicato le due equazioni $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_l = 0$ si trasformano nelle altre due $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$, e gl'integrali dei due sistemi $u_{01}, \dots u_{0p}$; $u_{11}, \dots u_{1p}$ si trasformano in quelli degli altri due $(u_{01}), \dots (u_{0p})$; $(u_{11}), \dots (u_{1p})$. Epperò questi ultimi integrali subiscono una medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coëfficienti delle due equazioni $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$. Lo stesso deve quindi accadere per gli altri integrali $u_{11}, \dots u_{1p}$; $u_{21}, \dots u_{2p}$ di queste equazioni, che sono legati ai precedenti dalla sostituzione T. Perciò gl'integrali dei tre sistemi $u_{01}, \dots u_{0p}$; $u_{11}, \dots u_{1p}$; $u_{21}, \dots u_{2p}$, che appartengono rispettivamente alle equazioni $\Phi_0 = 0$, $\Phi_l = 0$, $\Phi_{2l} = 0$, subiscono la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coefficienti di queste tre equazioni.

Anche per l'equazione $\Phi_{2l} = 0$ e pei suoi integrali $u_{21}, \dots u_{2p}$ possiamo fare le stesse considerazioni fatte per le precedenti. Dopo il noto cambiamento di variabile si ottengono gl'integrali $(u_{21}), \dots (u_{2p})$ di $\Phi_{3l} = 0$, che nel punto x_0 prendono gli stessi valori di $u_{21}, \dots u_{2p}$ nel punto $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile giunge in questo punto per Δ. Qui pure potremo determinare un sistema di p integrali particolari distinti $u_{31}, \dots u_{3p}$ di $\Phi_{3l} = 0$, definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di x_0, in modo che le funzioni $(u_{21}), \dots (u_{2p})$ possano esprimersi con essi mediante la sostituzione T.

Potremo seguitare in questo modo fino all'equazione $\Phi_{hl} = 0$, ed otterremo così gli $h + 1$ sistemi d'integrali:

$$u_{01}, \dots u_{0p}; \quad u_{11}, \dots u_{1p}; \quad \dots u_{h1}, \dots u_{hp}, \tag{13}$$

che appartengono rispettivamente alle (12) e che godono delle due seguenti proprietà:

1.° Considerando $x_0 + 2\,l\,\omega$ come punto d'origine degl'integrali delle (12) e i valori che le funzioni (13) prendono in esso, quando la variabile vi giunge per Δ, come valori iniziali, e facendo il noto cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$, che riconduce l'origine in x_0, gl'integrali di ogni sistema (13) divengono integrali dell'equazione relativa a quelli del sistema successivo avanti il cambiamento, e si esprimono con essi mediante la sostituzione lineare T.

2.° Gl'integrali di ognuno di questi sistemi (13) subiscono la medesima sostituzione lineare per ogni giro chiuso della variabile che, partendo da x_0, vi ritorna senza passare per alcun polo dei coefficienti delle (12).

Per costruire le p relazioni fra gl' integrali delle $q+1$ equazioni (11) possiamo scegliere ad arbitrio gli integrali di una di esse, della $\Phi_0 = 0$ ad es.: per la quale sceglieremo il sistema $u_{01}, \ldots u_{0p}$. In tal caso, in virtù del 2.° lemma, gl'integrali della seconda equazione $\Phi_{al} = 0$ devono differire rispettivamente da quelli del sistema $u_{a1}, \ldots u_{ap}$ per un fattore costante, che potremo ridurre eguale all'unità, fissando in modo conveniente la costante diversa da zero, ma che si può scegliere ad arbitrio, che deve moltiplicare nelle relazioni quest'integrali. Denotando con A_0, A_a, $A_b, \ldots$ A_h le $q+1$ costanti così fissate, le p relazioni assumono la forma:

$$A_0 u_{01} + A_a u_{a1} + \cdots + A_h u_{h1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_0 u_{0p} + A_a u_{ap} + \cdots + A_h u_{hp} = 0.$$

Se per tutti i valori interi di i, compresi fra zero ed h, che sono diversi da $0, a, b, c, \ldots h$, poniamo $A_i = 0$, possiamo mettere le relazioni precedenti sotto l'altra forma:

$$\sum_0^h{}_i A_i u_{i1} = 0, \ldots \sum_0^h{}_i A_i u_{ip} = 0, \tag{14}$$

nella quale apparentemente figurano gl'integrali di tutti i sistemi (12).

Denotando con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{h-1}$ $h-1$ costanti arbitrarie, costruiamo le p funzioni:

$$y_1 = u_{01} + \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{21} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{h-1,1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p = u_{0p} + \lambda_1 u_{1p} + \lambda_2 u_{2p} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{h-1,p}.$$

Nessuna di esse può mai risultare identicamente nulla, perchè solo dopo introdotti gl'integrali di $\Phi_\varepsilon = 0$, essendo $\varepsilon = h\,l$, si possono avere relazioni lineari omogenee fra gl'integrali di $\Phi_0 = 0$, $\Phi_1 = 0, \ldots$ Per questa medesima ragione non possono sussistere fra le y relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti. Inoltre le y variano con continuità, quando la variabile si muove sul piano, evitando certi punti, (i poli dei coefficienti delle (12), esclusa l'ultima), sempre in numero finito in ogni porzione finita del piano, e, con ogni giro chiuso dalla variabile che non passi per questi punti, subiscono una sostituzione lineare, la medesima degl'integrali di ognuno dei sistemi (13). Da tutte queste proprietà delle y risulta che esse sono p integrali particolari distinti di un'equazione $\Phi(x, y, p) = 0$, di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$.

Riguardo a quest'equazione $\Phi = 0$ può accadere che per certi valori della λ i suoi coefficienti divengano infiniti in x_0 o in $x_0 + 2\,l\,\omega$ o in qualche punto di Δ. In ogni caso però i suoi integrali si mantengono sempre finiti e continui in questi poli, che si chiamano per questa ragione punti ad apparenza singolare. Perciò, tanto per la $\Phi = 0$ quanto per le altre equazioni, potremo considerare gl'integrali anche in questi punti speciali che sono poli dei coefficienti.

Considerando per gl'integrali y di $\Phi = 0$ $x_0 + 2\,l\,\omega$, invece di x_0, come origine e i valori che essi prendono in questi punti, quando la variabile vi giunge passando per Δ, come valori iniziali, e facendo il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$, che riconduce l'origine in x_0, la $\Phi = 0$ si trasforma in un'altra equazione $\Phi^{(1)}(x, y, p) = 0$, e i suoi integrali, che indicheremo con (y_1), (y_2),... (y_p), divengono integrali di quest'ultima equazione.

Per la $\Phi^{(1)} = 0$ possiamo considerare l'altro sistema di p integrali particolari distinti:

$$y_{11} = u_{11} + \lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{31} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{h1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{1p} = u_{1p} + \lambda_1 u_{2p} + \lambda_2 u_{3p} + \cdots + \lambda_{h-1} u_{hp},$$

i quali, per il modo col quale sono costruiti, ci danno gl'integrali (y_1),... (y_p), quando su di essi si eseguisce la sostituzione T. Ma, tenendo conto delle (14), quest'integrali $y_{11} \ldots y_{1p}$ possono anche rappresentarsi colle espressioni:

$$y_{11} = -\frac{A_0}{A_h}\lambda_{h-1} u_{01} - \left(\frac{A_1}{A_h}\lambda_{h-1} - 1\right) u_{11} - \left(\frac{A_2}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_1\right) u_{21} -$$

$$- \cdots - \left(\frac{A_{h-2}}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_{h-3}\right) u_{h-2\cdot 1} - \left(\frac{A_{h-1}}{A_h}\lambda_{h-1} - \lambda_{h-2}\right) u_{h-1\cdot 1}$$

$$y_{21} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Vediamo ora se si possono determinare le costanti λ_1, λ_2,... λ_{h-1} in modo che gl'integrali y_1,... y_p eguaglino rispettivamente gli altri y_{11},... y_{1p}, moltiplicato per un medesimo fattore finito e costante θ. Basta per questo che si ponga:

$$\left.\begin{aligned}
&1+\theta\frac{A_0}{A_h}\lambda_{h-1}=0\\
&\lambda_1+\theta\frac{A_1}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta=0\\
&\lambda_2+\theta\frac{A_2}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_1=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_{h-2}+\theta\frac{A_{h-2}}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_{h-3}=0\\
&\lambda_{h-1}+\theta\frac{A_{h-1}}{A_h}\lambda_{h-1}-\theta\lambda_{h-2}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Moltiplicando rispettivamente i due membri di queste h relazioni per le potenze θ^{h-1}, $\theta^{h-2}, \dots \theta^2$, θ, 1 e sommando, si ottiene:

$$\lambda_{h-1}+\frac{\lambda_{h-1}}{A_h}\left[A_0\theta^h+A_1\theta^{h-1}+\cdots+A_{h-2}\theta^2+A_{h-1}\theta\right]=0.$$

Il valore zero per la costante λ_{h-1} deve escludersi, perchè la prima delle (15) ci darebbe in tal caso un valore infinito per θ. Possiamo perciò dividere l'ultima relazione trovata per λ_{h-1} e moltiplicarla per la costante A_h, che è pure diversa da zero. Si ottiene così l'equazione algebrica in θ:

$$A_0\theta^h+A_1\theta^{h-1}+\cdots+A_{h-1}\theta+A_h=0, \tag{16}$$

la quale, essendo sempre $A_0 \neq 0$, è di grado h, e non ha radici nulle.

Perciò si può sempre determinare per θ un valore finito e differente da zero che verifica la (16) e che, sostituito nelle (15), ci dà per $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{h-1}$ un sistema di valori completamente determinato. Questi valori delle λ ci danno quindi le relazioni: $y_1=\theta y_{11}$, $y_2=\theta y_{12}, \dots$ $y_p=\theta y_{1p}$, dalle quali risulta che anche le funzioni $y_{11}, \dots y_{1p}$ sono p integrali particolari distinti di $\Phi=0$, ossia che l'equazione $\Phi^{(1)}=0$ coincide con la $\Phi=0$. Ora, trattandosi di equazioni a coefficienti uniformi in tutto il piano, si vede subito dalle operazioni eseguite per passare dalla $\Phi=0$ alla $\Phi^{(1)}=0$, che la $\Phi=0$ è a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, ed è quindi una di quelle equazioni di cui si voleva dimostrare l'esistenza.

8. Essendo data un'equazione $L(x, y, m) = 0$, a coefficienti periodici con $2 l \omega$ per periodo, si può determinare per essa un sistema $y_1, y_2, \ldots y_m$ di m integrali particolari distinti, definiti da sviluppi in serie di CAUCHY nelle vicinanze di un punto x_0 che non sia un polo dei suoi coefficienti. Anche gl'infiniti punti $x_0 + 2 s l \omega$ che si ottengono dando ad s tutti i valori interi positivi e negativi, godono della medesima proprietà di x_0. Epperò, se, evitando i poli di $L = 0$, facciamo percorrere alla variabile una linea qualunque Δ che vada da x_0 ad uno determinato di questi punti, $x_0 + 2 s_1 l \omega$ ad es.: le funzioni y prendono all'arrivo dei valori differenti da quelli che hanno in x_0. Prendendo $x_0 + 2 s_1 l \omega$ come origine e questi valori come valori iniziali, e facendo uno dei soliti cambiamenti di variabile, x in $x + 2 s_1 l \omega$, che riconduce l'origine in x_0, la $L = 0$ non muta, essendo a coefficienti periodici con $2 l \omega$ per periodo, e le funzioni y si trasformano in altri m integrali particolari distinti di quest'equazione, che indicheremo con $\{y_1\}$, $\{y_2\}, \ldots \{y_m\}$, e che si possono ottenere eseguendo sui primitivi $y_1, y_2, \ldots y_m$ una determinata sostituzione lineare S, che dipende dalla scelta della linea Δ.

Con alcune considerazioni analoghe a quelle che precedono il 1.° lemma si può vedere facilmente *che, quando la variabile si muove sul piano, evitando i poli dei coefficienti di $L = 0$, tutte le infinite sostituzioni che subiscono gl'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$ con tutti i possibili cammini che vanno da un punto qualunque x ad uno dei punti $x + 2 s l \omega$, costituiscono un gruppo, che chiameremo gruppo di sostituzioni di $L = 0$ relativo al sistema d'integrali $y_1, y_2, \ldots y_m$ e al periodo $2 l \omega$.*

Abbiamo aggiunto *e al periodo* $2 l \omega$ per non confondere questo gruppo con quello di cui si è parlato in principio per le equazioni in generale, e che nel caso di equazioni a coefficienti periodici è un sottogruppo di quello ora definito, essendo nei cammini della variabile inclusi come caso speciale quelli chiusi corrispondenti al valore particolare zero del numero intero s.

Essendo date più equazioni in numero finito, dello stesso ordine e a coefficienti periodici con lo stesso periodo $2 l \omega$, e facendo muovere la variabile senza che passi per alcun polo dei loro coefficienti, diremo che esse posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente al periodo $2 l \omega$, quando si può determinare per ognuna di esse un sistema d'integrali particolari distinti, in modo che gl'integrali di questi diversi sistemi subiscano la medesima sostituzione lineare per ogni cammino della variabile che va da un punto qualunque x ad uno dei punti $x + 2 s l \omega$.

Sempre con considerazioni analoghe a quelle che precedono il 1.° lemma si può vedere facilmente *che tre equazioni, dello stesso ordine e a coefficienti periodici collo stesso periodo* $2\,l\,\omega$, *posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente a questo periodo, quando ciò accade per due coppie qualunque di esse.*

Diremo che tutte le equazioni di una successione infinita, che sono dello stesso ordine e a coefficienti periodici collo stesso periodo $2\,l\,\omega$, *posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni relativamente a questo periodo, quando ciò accade per un numero finito qualunque di esse, scelte ad arbitrio.*

Mediante queste definizioni si può dimostrare un 4.° lemma con un procedimento del tutto simile a quello di cui ci siamo serviti per la dimostrazione del primo.

Questo lemma si può enunciare così:

Un'equazione riducibile $F(x,\ y,\ n) = 0$, *a coefficienti doppiamente periodici coi periodi* $2\,\omega$, $2\,\omega'$, *a cui appartengono tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile* $\Psi_0(x,\ z,\ p) = 0$, *a coefficienti semplicemente periodici con* $2\,l\,\omega$ *per periodo, essendo* l *un numero intero, ammette tutti gl'integrali d'infinite altre equazioni pure a coefficienti periodici con* $2\,l\,\omega$ *per periodo, e che relativamente a questo periodo posseggono il medesimo gruppo di sostituzioni di* $\Psi_0 = 0$.

9. Possiamo finalmente dimostrare il teorema relativo alla riducibilità delle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici, di cui si è parlato in principio e di cui si può modificare l'enunciato nel modo seguente:

Un'equazione differenziale lineare riducibile $F(x,\ y,\ n) = 0$, *a coefficienti ellittici, ammette tutti gl'integrali di un'equazione irriduttibile* $\Psi(x, z, p) = 0$, *a coefficienti doppiamente periodici ed aventi gli stessi periodi* $2\,\omega$, $2\,\omega'$ *di* $F = 0$ *e dei multipli convenienti di questi periodi.*

Col metodo indicato nel 3.° lemma possiamo costruire un' equazione $\Psi_0(x,\ y,\ p) = 0$, di cui tutti gl'integrali appartengano ad $F = 0$ e a coefficienti semplicemente periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, essendo l un numero intero. Come è già noto, l'ordine p di $\Psi_0 = 0$, che è irriduttibile, è il minimo possibile, vale a dire ogni altra equazione di cui tutti gl'integrali appartengono ad $F = 0$ è di ordine superiore o tutt'al più eguale a p.

Escludendo l'ipotesi che la $\Psi_0 = 0$ sia a coefficienti periodici con un multiplo di $2\,\omega'$ per periodo, nel qual caso sarebbe a coefficienti doppiamente periodici secondo l'enunciato del teorema e non occorrerebbe più proseguire la dimostrazione, si applichino alla $\Psi_0 = 0$, relativamente al periodo $2\omega'$, procedimenti simili a quelli del 3.° lemma, utilizzando i risultati del 4.° e 2.° lemma, come per il 3.° si sono utilizzati quello del 1.° e del 2.°

Otterremo così dapprima la serie di equazioni:

$$\ldots \Psi_{-s} = 0, \ldots \quad \Psi_{-1} = 0, \quad \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \ldots \quad \Psi_s = 0, \ldots$$

e quindi il numero ε'_1 analogo ad ε_1, che ci permetterà di scegliere il punto x_0, come nel 3.° lemma, e di determinare i numeri ε', q', l' analoghi a ε, q, l e le $q' + 1$ equazioni, che potremo rappresentare con:

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_{a'l'} = 0, \quad \Psi_{b'l'} = 0, \ldots \quad \Psi_{h'l'} = 0,$$

ove a', b',... h' sono numeri interi soggetti alle diseguaglianze:

$$0 < a' < b' < \cdots < h'.$$

Per il numero h' si deve avere inoltre $h' l' = \varepsilon'$.

Considerando poi le $h' + 1$ equazioni:

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_{l'} = 0, \quad \Psi_{2l'} = 0, \ldots \quad \Psi_{h'l'} = 0, \tag{17}$$

analoghe alle (12), potremo determinare per esse i sistemi d'integrali:

$$v_{01}, \ldots \; v_{0p}; \quad v_{11}, \ldots \; v_{1p}; \ldots \quad v_{h1}, \ldots \; v_{hp},$$

analoghi ai sistemi (13), e mettere le p relazioni fra gl'integrali delle $q' + 1$ equazioni sotto la forma:

$$\begin{array}{l} A'_0 v_{01} + A'_{a'} v_{a'1} + A'_{b'} v_{b'1} + \cdots + A'_{h'} v_{h'1} = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; , \end{array}$$

essendo A'_0, $A'_{a'}$, $A'_{b'}$,... $A'_{h'}$ $q' + 1$ costanti sempre diverse da zero, o anche sotto l'altra:

$$\sum_0^{h'}{}_i \, A'_i v_{i1} = 0, \ldots \quad \sum_0^{h'}{}_i \, A'_i v_{ip} = 0,$$

quando sia $A'_i = 0$ per tutti i valori di i diversi da 0, a', b',... h'.

Denotando con λ'_1, λ'_2,... $\lambda'_{h'-1}$ $h' - 1$ costanti arbitrarie, si potranno costruire le funzioni:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = v_{01} + \lambda'_1 v_{11} + \lambda'_2 v_{21} + \cdots + \lambda'_{h'-1} v_{h'-1 \cdot 1} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ z_p = v_{0p} + \lambda'_1 v_{1p} + \lambda'_2 v_{2p} + \cdots + \lambda'_{h'-1} v_{h'-1 \cdot p} \end{array}\right\}, \tag{18}$$

che sono analoghe alle $y_1, \ldots y_p$ del 3.° lemma, e che costituiscono come queste ultime un sistema di p integrali particolari distinti di un'equazione $\Psi(x, z, p) = 0$.

Ora, considerando una linea Δ che non passi per alcun polo dei coefficienti delle (18) e della $\Psi = 0$ e che vada da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$, si prenda per origine degl'integrali v e z il punto $x_0 + 2\,l\,\omega$ e per valori iniziali di questi integrali i valori che essi prendono in $x_0 + 2\,l\,\omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, e si faccia il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2\,l\,\omega$. In tal caso le equazioni (17) non cambiano, perchè sono a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo, e i loro integrali, in virtù del 4.° lemma, prendono dei valori che si possono ottenere effettuando una medesima sostituzione lineare su quelli primitivi di ciascuna equazione. Quindi, a causa delle (18), anche i nuovi integrali di $\Psi = 0$ si esprimono con gli antichi mediante questa stessa sostituzione. Di qui risulta che neppure la $\Psi = 0$ muta coi cambiamenti ora indicati, ed è per conseguenza essa pure a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo.

Arrivati a questo punto non abbiamo da far altro che ripetere sulle funzioni $z_1, \ldots z_p$, relativamente al periodo $2\,\omega'$, lo stesso ragionamento già fatto nel 3.° lemma per le funzioni y, relativamente all'unico periodo $2\,\omega$, e giungeremo così ad un sistema di valori di $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_{h'-1}$ che renderanno la $\Psi = 0$ a coefficienti doppiamente periodici; coi periodi $2\,l\,\omega$, $2\,l'\,\omega'$.

10. Ritorniamo all'equazione $F(x, y, n) = 0$ a coefficienti periodici col periodo $2\,\omega$ del 3.° lemma e alla serie di equazioni (10) che possono dividersi in l categorie, comprendendo in una medesima categoria tutte quelle della forma $\Phi_{i+ml} = 0$, nella quale i è uno dei numeri $0, 1, 2, \ldots l - 1$ ed m un numero variabile che prende tutti i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$. Le equazioni (10) così distribuite in l categorie godono delle seguenti proprietà, delle quali alcune sono note e le altre possono dimostrarsi facilmente:

1.° *Tutte le equazioni di una stessa categoria posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni.*

2.° *Fra gl'integrali di h equazioni consecutive di una stessa categoria non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Esistono invece p di tali relazioni e p soltanto fra gl'integrali di $h+1$ equazioni consecutive di una medesima categoria. In queste p relazioni figurano gl'integrali di $q+1$ equazioni, essendo $q \leqq h$, delle quali però fanno sempre parte le due estreme.* Scegliendo gl'integrali delle $h+1$ equazioni in modo che godono di proprietà simili a quelle dei sistemi (13), possiamo mettere le p relazioni sotto una forma analoga alla (14).

3.° *Esiste un'equazione $G_i(x, y, h p) = 0$, d'ordine $h p$ e a coefficienti periodici con $2 l \omega$ per periodo, che possiede tutti gl'integrali delle equazioni della i^{ma} categoria, e della quale costituiscono un sistema di $h p$ integrali particolari distinti h sistemi di p integrali di h equazioni consecutive della l^{ma} categoria.*

4.° *Le l equazioni $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots$ $G_l = 0$, che corrispondono rispettivamente alle l categorie, confrontate a due a due, non hanno alcun integrale a comune, e tutti i loro integrali appartengono ad un'equazione $G(x, y, h l p) = 0$, a coefficienti periodici con 2ω per periodo.*

Se è $h l p = n$, la $G = 0$ coincide colla $F = 0$, ed in questo caso ogni integrale di $F = 0$ può sempre eguagliarsi ad un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti d'integrali di equazioni (10). Viceversa, se ogni integrale di $F = 0$ si può eguagliare ad un'espressione lineare omogenea a coefficienti costanti d'integrali di equazioni (10), sussiste la relazione $h l p = n$ e la $G = 0$ coincide colla $F = 0$.

Considerando sempre il caso di $h l p = n$, denotiamo con $E_0(x, y, p) = 0$ un'equazione irriduttibile di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$, e consideriamola assieme alle equazioni:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \ldots \quad \Phi_{\varepsilon-1} = 0,$$

essendo $\varepsilon = h l$. Fra tutte queste $h l + 1$ equazioni scegliamone un certo numero $r + 1$, del quale faccia sempre parte la $E_0 = 0$, in modo che fra gli integrali di r qualunque di esse non esista alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e che esistano invece di tali relazioni fra gl'integrali di tutte le $r + 1$ equazioni. Ragionando allora come nel 1.° lemma, si dimostra che le relazioni sono in numero di p, che tutte le $r + 1$ equazioni posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni e che quindi le r equazioni diverse dalla $E_0 = 0$ appartengono alla medesima categoria. Diremo che anche l'equazione $E_0 = 0$ appartiene a questa categoria.

Supponendo cha si tratti della prima categoria e scegliendo per integrali delle $\Phi = 0$ quelli dei sistemi (13), potremo determinare per la $E_0 = 0$ un sistema d'integrali che indicheremo con $t_{01}, \ldots t_p$, in modo che le p relazioni assumano la forma:

$$\left.\begin{array}{l} t_{01} = b_{00} u_{01} + b_{01} u_{11} + \cdots + b_{0h-1} u_{h-1 \cdot 1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{0p} = b_{00} u_{0p} + b_{01} u_{1p} + \cdots + b_{0h-1} u_{h-1 \cdot p} \end{array}\right\}, \tag{19}$$

ove le b sono costanti, alcune delle quali possono anche essere eguali allo zero. Abbiamo già veduto nel 3.° lemma che viceversa p espressioni $t_{01}, \ldots t_{0p}$ come le precedenti costituiscono un sistema di p integrali particolari distinti di un'equazione $E_0 = 0$, di ordine p che possiede lo stesso gruppo di sostituzioni delle (12) e che appartiene quindi alla prima categoria.

Consideriamo assieme alla $E_0 = 0$ altre $h - 1$ equazioni irriduttibili di ordine p appartenenti alla prima categoria, che indicheremo con $E_1 = 0, \ldots E_{h-1} = 0$, e denotiamo con $t_{11}, \ldots t_{1p}; \ldots t_{h-1 \cdot 1}, \ldots t_{h-1 \cdot p}$ i loro integrali espressi mediante quelli dei sistemi (13) dalle relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} t_{11} = b_{10}\, u_{01} + b_{11}\, u_{11} + \cdots + b_{1 \cdot h-1}\, u_{h-1 \cdot 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{1p} = b_{10}\, u_{0p} + b_{11}\, u_{1p} + \cdots + b_{1 \cdot h-1}\, u_{h-1 \cdot p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{h-1 \cdot 1} = b_{h-1 \cdot 0}\, u_{01} + b_{h-1 \cdot 1}\, u_{11} + \cdots + b_{h-1 \cdot h-1}\, u_{h-1 \cdot 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{h-1 \cdot p} = b_{h-1 \cdot 0}\, u_{0p} + b_{h-1 \cdot 1}\, u_{1p} + \cdots + b_{h-1 \cdot h-1}\, u_{h-1 \cdot p} \end{array}\right\} \quad (20)$$

e supponiamo che il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0h-1} \\ b_{10} & b_{11} & \ldots & b_{1h-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h-1 \cdot 0} & b_{h-1 \cdot 1} & \ldots & b_{h-1 \cdot h-1} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. In tal caso non esiste alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti fra gl'integrali:

$$t_{01}, \ldots t_{0p}; \quad t_{11}, \ldots t_{1p}; \quad \ldots t_{h-1 \cdot 1}, \ldots t_{h-1 \cdot p} \quad (21)$$

delle h equazioni:

$$E_0 = 0, \quad E_1 = 0, \ldots \quad E_{h-1} = 0, \quad (22)$$

perchè altrimenti dovrebbe esistere una relazione simile fra gl'integrali:

$$u_{01}, \ldots u_{0p}; \quad u_{11}, \ldots u_{1p}; \quad \ldots u_{h-1 \cdot 1}, \ldots u_{h-1 \cdot p} \quad (23)$$

delle h equazioni:

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_l = 0, \ldots \quad \Phi_{(h-1)l} = 0, \quad (24)$$

i cui valori si possono ricavare risolvendo rispetto ad essi le (19) e (20).

Essendo data un'altra equazione irriduttibile e di ordine p $E_h = 0$ della prima categoria e p suoi integrali $t_{h1}, \ldots t_{hp}$ espressi con quelli dei sistemi (23) mediante le relazioni:

$$t_{h1} = b_{h0}\, u_{01} + b_{h1}\, u_{11} + \cdots + b_{hh-1}\, u_{h-1\cdot 1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{hp} = b_{h0}\, u_{0p} + b_{h1}\, u_{1p} + \cdots + b_{hh-1}\, u_{h-1\, p},$$

si possono sostituire alle funzioni u i loro valori ricavati dalle (19) e (20), e si ottengono così p relazioni, alle quali si può dare la forma:

$$\sum_{0}^{h}{}_i\, B_i\, t_{i1} = 0, \ldots \quad {}_i\sum_{0}^{h} B_i\, t_{ip} = 0,$$

ove le B sono $h+1$ costanti determinate.

Si vede dunque che fra gl'integrali di $h+1$ equazioni di una stessa categoria esistono sempre relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, nel mentre che per una stessa categoria si possono sempre trovare h equazioni tali che fra i loro integrali non esistano di queste relazioni. Diremo che h equazioni che godono di una simile proprietà costituiscono un sistema di h equazioni indipendenti della categoria a cui appartengono. Così costituiscono h equazioni indipendenti della prima categoria le (22), le (24) e h equazioni consecutive qualunque $\Phi = 0$ della prima categoria.

Riguardo alle relazioni (19) e (20), che ci dànno le funzioni (21) espresse con le (23), diremo che si ottengono gli h sistemi d'integrali (21), eseguendo sugli h sistemi d'integrali (23) la sostituzione:

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} b_{00} & b_{01} & \ldots & b_{0h-1} \\ b_{10} & b_{11} & \ldots & b_{1h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{h-1\cdot 0} & b_{h-1\cdot 1} & \ldots & b_{h-1\cdot h-1} \end{Bmatrix},$$

ossia che si passa dalle h equazioni (24) alle h equazioni (22) mediante la sostituzione Σ.

Consideriamo la linea Δ del 3.° lemma che va da x_0 a $x_0 + 2\, l\, \omega$, e trasportiamo l'origine degl'integrali delle equazioni (22) e (24) in $x_0 + 2\, l\, \omega$, prendendo per valori iniziali di essi i valori che assumono gl'integrali (21) e (23) in $x_0 + 2\, l\, \omega$, quando la variabile vi giunge passando per Δ, e facciamo il solito cambiamento di variabile, x in $x + 2\, l\, \omega$. Così gl'integrali (23) si trasformano in altre funzioni $(u_{01}), \ldots (u_{0p}); \ldots$ che si possono ottenere eseguendo prima la sostituziane T sugl'integrali di ogni sistema, eppoi la sostituzione:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{-A_0}{A_h} & \frac{-A_1}{A_h} & \frac{-A_2}{A_h} & \ldots & \frac{-A_{h-1}}{A_h} \end{pmatrix},$$

sugli h sistemi. Lo stesso può dirsi per gl'integrali (21) che si trasformano in altre funzioni $(t_{01}), \ldots (t_{0p}); \ldots$ che si possono ottenere eseguendo prima la stessa sostituzione T sugl'integrali di ogni sistema eppoi la sostituzione $\Theta_1 = \Sigma\, \Theta\, \Sigma^{-1}$ sugli h sistemi.

Per un'altra linea qualunque Δ che goda delle medesime proprietà di Δ e che vada da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$ si hanno risultati analoghi a quelli ora ottenuti per Δ. Siano per questa nuova linea T', Θ', Θ'_1 le sostituzioni corrispondenti a T, Θ, Θ_1. Quando la variabile percorre la linea Δ a partire da x_0 eppoi la linea Δ' in senso inverso a partire da $x_0 + 2\,l\,\omega$, si viene a formare un cammino chiuso che non altera le equazioni (22) e (24), ossia che, lasciando fissi i sistemi (21) e (23), fa subire agl'integrali di ognuno di essi la sostituzione $T\,T'^{-1}$. Perciò dovremo avere: $\Theta\,\Theta'^{-1} = 1$, $\Theta_1\,\Theta'^{-1}_1 = 1$, da cui risulta $\Theta = \Theta'$, $\Theta_1 = \Theta'_1$. Si vede dunque che le sostituzioni Θ e Θ_1 che subiscono gl'integrali (23) e (24) sono indipendenti dalla linea Δ che va da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$.

Possiamo disporre delle costanti della sostituzione Σ in modo che la sostituzione Θ_1 assuma una delle forme canoniche, ad es.: la più semplice:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \mu_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \mu_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{h-1} & \mu_{h-1} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

nella quale le costanti μ sono le h radici dell'equazione algebrica di grado

h in ρ:

$$\begin{vmatrix} -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\rho & 1 \\ \frac{-A_0}{A_h} & \frac{-A_1}{A_h} & \frac{-A_2}{A_h} & \dots & \frac{-A_{h-1}}{A_h} & \frac{-A_{h-1}}{A_h} - \rho \end{vmatrix} = 0, \qquad (26)$$

disposte lungo la diagonale in modo che quelle eguali fra loro sono consecutive, e le α sono costanti diverse da zero, essendo soltanto nulla ognuna di quelle che si trova nella stessa linea con una μ che sia lungo la diagonale la prima di un gruppo di radici eguali.

Che, quando la sostituzione Θ_1 è ridotta ad avere la forma precedente, il che è sempre possibile, tutte le α, all'infuori di quelle ora indicate, debbano essere diverse da zero, risulta dal fatto che nessuna delle radici μ può annullare simultaneamente tutti i determinanti minori di ordine $h-1$ del determinante di ordine h che forma il 1.° membro dell'equazione (26).

Quando la sostituzione Θ_1 ha la forma canonica (25) o un'altra forma canonica qualunque, chiameremo le (21) equazioni corrispondenti alla forma canonica. Fra esse si trovano anche quelle a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo che si possono determinare coi procedimenti del 3.° lemma. Anzi per ricollegare i due risultati notiamo che le radici θ della (14) sono le reciproche delle radici μ della (26). Notiamo inoltre che dalle osservazioni fatte sulle costanti α risulta che ad ogni gruppo di radici θ o μ eguali corrisponde una sola equazione $E=0$ a coefficienti periodici con $2\,l\,\omega$ per periodo.

Con un cambiamento di variabile si può passare da queste equazioni corrispondenti alla forma canonica a quelle delle altre categorie.

11. Passiamo ora al caso che la $F(x, y, n)=0$ abbia anche il periodo $2\omega'$, sia cioè a coefficienti ellittici con 2ω e $2\omega'$ per periodi, e costruiamo coll'equazione $\Phi^0=0$ la serie:

$$\Phi'_{-s}=0,\dots\quad \Phi'_{-1}=0,\quad \Phi_0=0,\quad \Phi'_1=0,\dots\quad \Phi'_s=0,\dots, \qquad (27)$$

che, relativamente al periodo $2\omega'$, è analoga alla (10) del 3.° lemma relativa al periodo 2ω. Denotiamo con h' e l' i numeri analoghi ad h e l, e supponiamo che, oltre ad essere $n=h\,l\,p$, sia pure $n=h'\,l'\,p$.

Le (27) possono dividersi in l' categorie, che godono delle medesime proprietà delle l categorie in cui sono state distribuite le (10), tanto per quelle generali quanto per quelle speciali relative al caso $n = h\,l\,p$. Perciò ogni equazione irriduttibile di ordine p, di cui tutti gl'integrali appartengono anche alla $F = 0$, oltre a considerarsi come appartenente ad una delle l categorie relative al periodo $2\,\omega$, dovrà anche considerarsi come appartenente ad una delle l' categorie relative al periodo $2\,\omega'$. Inoltre tutte le equazioni irriduttibili di ordine p, di cui tutti gl'integrali appartengono anche ad $F = 0$, che fanno parte di una stessa categoria rispetto ad uno dei periodi di $2\,\omega$, $2\,\omega'$, devono far parte di una stessa categoria anche rispetto all'altro, perchè posseggono lo stesso gruppo di sostituzioni. Ne viene di conseguenza che deve essere $l = l'$. Da quest'eguaglianza e dall'altra: $h\,l\,p = h'\,l'\,p$ risulta pure $h = h'$. Quest'ultima relazione potrebbe anche ottenersi osservando che h equazioni indipendenti di una stessa categoria rispetto al periodo $2\,\omega$ devono pure essere indipendenti per la categoria a cui appartengono rispetto al periodo $2\,\omega'$, e che quindi deve essere $h \leq h'$. Viceversa, dovendo essere pure $h' \leq h$, se ne conclude che sarà $h' = h$.

Supponiamo scelto il punto x_0 in modo che i lati del parallelogrammo Γ aventi per vertici i punti x_0, $x_0 + 2\,l\,\omega$, $x_0 + 2\,l\,\omega + 2\,l\,\omega'$, $x_0 + 2\,l\,\omega'$ non passino per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, e consideriamo le equazioni (22) coi loro integrali (21), appartenente rispetto al periodo $2\,\omega$ alla prima categoria e ad una stessa categoria rispetto al periodo $2\,\omega'$. Gl'integrali (21), essendo anche integrali di $F = 0$, sono sempre finiti e continui sui lati di Γ.

Per quello che abbiamo detto i sistemi d'integrali (21), quando la variabile va lungo il lato $(x_0,\ x_0 + 2\,l\,\omega)$ da x_0 a $x_0 + 2\,l\,\omega$, non mutano di categoria rispetto a $2\,\omega$ e quindi neppure rispetto a $2\,\omega'$, ma subiscono la sostituzione lineare Θ_1. Lo stesso può dirsi per il lato $(x_0,\ x_0 + 2\,l\,\omega')$, per il quale indicheremo con Θ_2 la sostituzione lineare che subiscono i sistemi d'integrali (21).

Quando la variabile percorre tutto il contorno di Γ partendo da x_0 e in modo da incontrare i vertici $x_0 + 2\,l\,\omega$, $x_0 + 2\,l\,\omega + 2\,l\,\omega'$, $x_0 + 2\,l\,\omega'$ nell'ordine nel quale sono scritti, gl'integrali di ogni sistema (21) subiscono una medesima sostituzione lineare; ma i sistemi non mutano, perchè dopo un cammino chiuso della variabile le equazioni (22) si riproducono. Perciò avremo per le sostituzioni Θ_1 e Θ_2 la relazione:

$$\Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_1^{-1}\,\Theta_2^{-1} = 1,$$

dalla quale risulta che Θ_1 e Θ_2 sono permutabili.

Quindi, se Θ_1 ha la forma canonica (25) o un'altra forma canonica qualunque, anche Θ_2, come si può vedere facilmente, avrà una forma canonica, e questa forma di Θ_2 godrà della proprietà che la sua diagonale, che è costituita dalle h radici $\mu'_0, \mu'_1, \ldots \mu'_{h-1}$ di un'equazione algebrica simile alla (26), confrontata colla diagonale di Θ_1, è tale che ad ogni gruppo di radici μ eguali corrisponde un gruppo di radici μ' pure eguali. Di qui risulta che se le (22) sono h equazioni corrispondenti alla forma canonica per il periodo 2ω, lo sono anche per il periodo $2\omega'$. In tal caso quelle di esse che sono a coefficienti periodici con $2l\omega$ per periodo, sono anche a coefficienti periodici con $2l\omega'$ per periodo, sono cioè a coefficienti ellittici coi periodi $2l\omega$, $2l\omega'$.

Con cambiamenti di variabile si può passare dalle (22) alle equazioni corrispondenti alla forma canonica delle altre categorie relative al periodo 2ω ed al tempo stesso anche a quelle delle altre categorie relative a $2\omega'$, poichè queste categorie relative ai due periodi 2ω, $2\omega'$ si corrispondono.

12. Considerando sempre un'equazione $F(x, y, n) = 0$ di quelle studiate nel paragrafo precedente, supponiamo che sia:

$$n = 4, \quad p = 2, \quad l = 1, \quad h = 2.$$

Abbiamo in questo caso una sola categoria per i periodi 2ω, $2\omega'$ e due equazioni indipendenti irriduttibili di 2.° ordine appartenenti a questa categoria, che indicheremo, per usare le stesse notazioni di prima, con:

$$E_0(x, y, z) = 0, \quad E_1(x, y, z) = 0,$$

quando siano quelle corrispondenti alla forma canonica. Siano:

$$t_{01}, \; t_{02}; \quad t_{11}, \; t_{12}$$

due sistemi d'integrali di queste equazioni, scelte in modo che godano delle proprietà dei sistemi (21), e:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} \mu' & 0 \\ \alpha' & \mu' \end{pmatrix}$$

le due sostituzioni canoniche permutabili, relative ai periodi 2ω, $2\omega'$.

Essendo $l = 1$, la $E_0 = 0$ è a coefficienti ellittici coi periodi 2ω, $2\omega'$.

Quando la variabile fa un giro chiuso senza passare per alcun polo dei coefficienti di $F = 0$, gl'integrali t dei due sistemi subiscono una stessa sostituzione lineare, e quindi le tre espressioni:

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{01} \\ t_{12} & t_{02} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{11} \\ t'_{02} & t_{12} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

nelle quali le t' stanno a rappresentare le derivate prime delle t, si riproducono moltiplicate per il determinante di questa sostituzione. Epperò i rapporti delle prime due alla terza sono due funzioni meromorfe, che indicheremo con $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Considerando un parallelogramma Γ avente per vertici i punti x_0, $x_0 + 2\omega$, $x_0 + 2\omega + 2\omega'$, $x_0 + 2\omega'$, scelto in modo che i suoi lati non passino per poli di $F = 0$, e facendo percorrere alla variabile il lato $(x_0, x_0 + 2\omega)$ da x_0 a $x_0 + 2\omega$, gl'integrali dei due sistemi si trasformano nelle funzioni:

$$(t_{01}),\ (t_{02});\quad (t_{11}),\ (t_{12}),$$

che si possono ottenere eseguendo, prima una sostituzione T_1 sugl'integrali di ogni sistema, eppoi la sostituzione Θ_1 sui due sistemi.

Per le espressioni (28) abbiamo:

$$\begin{vmatrix} (t_{11}) & (t_{01}) \\ (t_{12}) & (t_{02}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t_{11} & t_{01} \\ t_{12} & t_{02} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (t'_{01}) & (t_{11}) \\ (t'_{02}) & (t_{12}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{11} \\ t'_{02} & t_{12} \end{vmatrix} + \alpha\mu (T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (t'_{01}) & (t_{01}) \\ (t'_{02}) & (t_{02}) \end{vmatrix} = \mu^2 (T_1) \begin{vmatrix} t'_{01} & t_{01} \\ t'_{02} & t_{02} \end{vmatrix},$$

essendo (T_1) il determinante della sostituzione T_1. Si hanno quindi per le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ le relazioni:

$$f_1(x_0 + 2\omega) = f_1(x_0)$$

$$f_2(x_0 + 2\omega) = f_2(x_0) + \frac{\alpha}{\mu}.$$

Similmente si ottiene per il periodo $2\omega'$:

$$f_1(x_0 + 2\omega') = f_1(x_0), \quad f_2(x_0 + 2\omega') = f_2(x_0) + \frac{\alpha'}{\mu'}.$$

Da queste relazioni e dalle due precedenti risulta che la $f_1(x)$ e la derivata prima della $f_2(x)$ sono due funzioni doppiamente periodiche coi periodi 2ω, $2\omega'$.

Abbiamo inoltre:

$$t_{11} = f_1(x)\, t'_{01} + f_2(x)\, t_{01}$$
$$t_{12} = f_1(x)\, t'_{02} + f_2(x)\, t_{02}\,.$$

Mediante queste due relazioni, quando sia nota l'equazione a coefficienti ellittici $E_0 = 0$, e siano note pure le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, si può costruire l'altra equazione $E_1 = 0$, che non è a coefficienti ellittici e l'equazione data del 4.° ordine $F = 0$, che è a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi di $E_0 = 0$.

Se le sostituzioni Θ_1 e Θ_2 hanno l'altra forma:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2 = \begin{pmatrix} \mu'_0 & 0 \\ 0 & \mu'_1 \end{pmatrix},$$

le due equazioni $E_0 = 0$, $E_1 = 0$ sono tutte due a coefficienti ellittici, e le funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono due funzioni di 2.ª specie coi periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$ e coi moltiplicatori $\frac{\mu_1}{\mu_0}$, $\frac{\mu'_1}{\mu'_0}$.

13. Essendo data un'equazione irriduttibile $H(x, y, z) = 0$, a coefficienti doppiamente periodici coi periodi $4\,\omega$, $2\,\omega'$, si faccia in essa un cambiamento di variabile, ponendo $x = x' + 2\,\omega$ e chiamando nuovamente con x la variabile indipendente. Si ottiene così un' altra equazione irriduttibile $H_1(x, y, z) = 0$, a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi $4\,\omega$, $2\,\omega'$.

Supponiamo che queste due equazioni non posseggano lo stesso gruppo di sostituzioni, e costruiamo l'equazione $F(x, y, 4) = 0$ che possiede tutti i loro integrali, la quale risulta a coefficienti doppiamente periodici coi periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$. Si tratta di dimostrare che, all'infuori di $H = 0$ e di $H_1 = 0$, non esiste alcun'equazione di ordine inferiore a 4, di cui tutti gl'integrali appartengono ad $F = 0$.

Supponiamo che sia $K = 0$ una simile equazione, che potrà essere del 3.° o del 2.° ordine. Considerando dapprima il caso del 3.° ordine, determiniamo per ciascuna delle tre equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$, $K = 0$ un sistema d'integrali particolari distinti definiti da sviluppi in serie di Cauchy nelle vicinanze di un punto x_0 che non sia un polo dei loro coefficienti, e denotiamo con u_1, u_2; v_1, v_2; t_1, t_2, t_3 rispettivamente quest'integrali. I primi quattro costituiscono un sistema d'integrali particolari distinti di $F = 0$. Perciò ogni altro integrale di $F = 0$ dovrà potersi esprimere con essi. Avremo quindi le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \alpha\, u_1 + \beta\, u_2 + \gamma\, v_1 + \delta\, v_2 \\ t_2 &= \alpha'\, u_1 + \beta'\, u_2 + \gamma'\, v_1 + \delta'\, v_2 \\ t_3 &= \alpha''\, u_1 + \beta''\, u_2 + \gamma''\, v_1 + \delta''\, v_2 \end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

nelle quali le α, β,... sono costanti. Ponendo:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \quad A' = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}, \quad A'' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix},$$

si ottiene l'unica relazione:

$$A\, t_1 + A'\, t_2 + A''\, t_3 = (A\,\gamma + A'\,\gamma' + A''\,\gamma'')\, v_1 + \\ + (A\,\delta + A'\,\delta' + A''\,\delta'')\, v_2,$$

la quale esprime che un integrale di $K = 0$ è eguale a un integrale di $H_1 = 0$. Ma, essendo quest'ultima equazione irriduttibile, ne risulta che ogni suo integrale deve appartenere alla $K = 0$. Similmente si dimostra che ogni integrale di $H = 0$ appartiene alla $K = 0$, che viene così ad essere soddisfatta da tutti gl'integrali di $F = 0$, il che è impossibile.

Vediamo allora se è possibile il caso che $K = 0$ sia del 2.° ordine, al quale si può passare ponendo $t_3 = 0$ e sopprimendo l'ultima delle (29). Supponendo che uno dei due determinanti $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ sia nullo, si può sempre dalle prime due delle (29) ottenere un'unica relazione che esprima l'eguaglianza fra un'integrale di $K = 0$ e un'integrale di una delle equazioni $H = 0$, $H_1 = 0$, il che non può mai accadere, essendo queste tre equazioni distinte e irriduttibili. Perciò i due determinanti precedenti sono sempre diversi da zero, e si può quindi sostituire ai due sistemi d'integrali distinti u_1, u_2; v_1, v_2 gli altri due y_1, y_2; z_1, z_2 dati dalle relazioni:

$$y_1 = \alpha\, u_1 + \beta\, u_2, \quad y_2 = \alpha'\, u_1 + \beta'\, u_2$$
$$z_1 = \gamma\, v_1 + \delta\, v_2, \quad z_2 = \gamma'\, v_1 + \delta'\, v_2.$$

In tal caso le (29) divengono:

$$t_1 = y_1 + z_1, \quad t_2 = y_2 + z_2. \tag{30}$$

Quando la variabile fa un giro chiuso Γ senza passare per alcun polo dei coefficienti delle tre equazioni: $H = 0$, $H_1 = 0$, $K = 0$, gl'integrali di ciascuna di esse subiscono una sostituzione lineare. Denotando rispettivamente con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ queste tre sostituzioni e tenendo conto delle (30), si ottengono le due relazioni:

$$(a-a'')\,y_1+(b-b'')\,y_2+(a'-a'')\,z_1+(b'-b'')\,z_2=0$$

$$(c-c'')\,y_1+(d-d'')\,y_2+(c'-c'')\,z_1+(d'-d'')\,z_2=0\,,$$

le quali devono essere due identità, perchè y_1, y_2; z_1, z_2 costituiscono un sistema di 4 integrali particolari distinti di $F=0$. Quindi le tre sostituzioni precedenti sono eguali. Ma ciò non può accadere per tutti i possibili giri chiusi Γ della variabile, perchè allora le tre equazioni $H=0$, $H_1=0$, $K=0$ possederebbero lo stesso gruppo di sostituzioni, il che è stato escluso per le prime due. Per conseguenza neppure il caso di $K=0$ del 2.° ordine è possibile; epperò le due equazioni $H=0$, $H_1=0$ sono le sole di ordine inferiore a 4 di cui tutti gl'integrali appartengono anche ad $F=0$.

Perciò per quest'equazione riducibile $F=0$ non esiste un'equazione d'ordine inferiore a 4, a coefficienti doppiamente periodici cogli stessi periodi 2ω, $2\omega'$, di cui tutti gl'integrali appartengano ad $F=0$.

Abbiamo considerato quest'esempio di un'equazione del 4.° ordine per giustificare il nuovo enunciato del teorema e per togliere il dubbio che una equazione riducibile $F(x, y, n)=0$, a coefficienti ellittici, debba sempre possedere tutti gl'integrali di un'altra equazione di ordine inferiore ad n, a coefficienti doppiamente periodici e cogli stessi periodi di $F=0$.