

3. *Atomstruktur und Streustrahlung;* *von R. Glocker und M. Kaupp †.*

Infolge der regelmäßigen Anordnung der Elektronen im Atom müssen, wie Debye nachgewiesen hat, auch bei regelloser Orientierung der Atome beim Auftreffen elektromagnetischer Wellen Interferenzeffekte auftreten, so daß die Intensität der von den Atomen zerstreuten Strahlung in bezug auf ihre räumliche Verteilung Maxima und Minima aufweist. Eine quantitative Prüfung der Theorie durch Vergleich mit der experimentellen Erfahrung war zur Zeit des Erscheinens jener Arbeit noch nicht möglich, weil über die Anordnung der Elektronen im Atom noch zu wenig Anhaltspunkte vorhanden waren. Dank der raschen Entwicklung der Röntgenspektroskopie haben sich nunmehr ganz bestimmte Vorstellungen über die Einzelheiten der Atomstruktur herausgebildet, insbesondere in bezug auf die an der Spitze des periodischen Systems stehenden leichtatomigen Elemente, welche wiederholt Gegenstand experimenteller Streustrahlenuntersuchungen waren. Damit ist die Möglichkeit gegeben für bestimmte Atome (z. B. Kohlenstoff, Aluminium) auf Grund der gegenwärtig herrschenden Vorstellungen über ihre atomare Struktur den Streueffekt zu berechnen und das Resultat mit der experimentellen Erfahrung zu vergleichen. Die Ausführung dieser Absicht erfordert zunächst eine Erweiterung der Debyeschen Theorie auf Elektronensysteme, welche aus 2 und 3 Ringen bestehen. Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß die Abstände der Elektronen der verschiedenen Ringe voneinander nicht mehr zeitlich konstant sind, sondern durch periodische Funktionen der Zeit dargestellt werden, weil die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons auf den verschiedenen Ringbahnen verschieden groß ist.

§ 1. *Streuwirkung eines aus mehreren konzentrischen komplanaren Kreisringen bestehenden Elektronensystems.* •

Bei einem Elektronenhaufen, bei dem die gegenseitigen Abstände der Ruhelage, um welche die Elektronen Schwin-

gungsbewegungen ausführen, zeitlich unveränderlich sind, wird nach Debye¹⁾ unter dem Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung der primären Strahlung im Abstand R von dem streuenden Körper der Bruchteil V der auffallenden Strahlungsenergie zerstreut:

$$(1) \quad V = \frac{N \varepsilon^4 (1 + \cos^2 \vartheta)}{\mu^2 v^4 R^2 \cdot 2} \sum_m \sum_n \frac{\sin [2k s_{m,n} \sin \vartheta/2]}{2k s_{m,n} \sin \vartheta/2}.$$

ε Ladung eines Elektrons,

μ Masse eines Elektrons,

v Lichtgeschwindigkeit,

N Zahl der streuenden Atome,

$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ Wellenlänge

$s_{m,n}$ Abstand des m ten vom n ten Elektron.

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Lagenänderung eines Elektrons infolge seiner Schwingungsbewegung während der Zeit einer Schwingung der auffallenden Welle klein ist gegenüber der Wellenlänge und daß die Frequenz der Welle groß ist gegenüber der Eigenfrequenz einer Störung des Systems. Bei Anwendung einer primären Strahlung von der Größenordnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen darf erwartet werden, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Bei einer Erweiterung des Debyeschen Ansatzes auf ein Elektronensystem, das aus zwei konzentrischen komplanaren Kreisen besteht, (von den Ellipsenbahnen soll der Einfachheit halber zunächst abgesehen werden) setzt sich die Doppelsumme aus drei Termen zusammen:

T_1 Summierung über die Elektronenabstände $s_{m,n}$ des inneren Ringes

T_2 Summierung über die Elektronenabstände $s_{m',n'}$ des äußeren Ringes,

T_{12} Summierung über die Abstände der Elektronen $\sigma_{n,n'}$ des inneren Ringes von denen des äußeren Ringes.

Die Doppelsumme in Gl. (1) lautet¹⁾ für einen Elektronenring vom Radius a , der in äquidistanten Abständen von p -Elektronen besetzt ist:

1) P. Debye, Ann. der Physik 46. S. 809. 1915.

$$(2) \quad T_1 = \sum_m \sum_n \frac{\sin \left[4 \kappa a \sin \vartheta/2 \sin \left(\left| n - m \right| \frac{\pi}{p} \right) \right]}{4 \kappa a \sin \vartheta/2 \sin \left(\left| n - m \right| \frac{\pi}{p} \right)}$$

oder als einfache Summe angeschrieben, wobei

$$\varrho = 4 \kappa a \sin \vartheta/2$$

ist:

$$(3) \quad T_1 = p \sum_0^{p-1} \frac{\sin \left[\varrho \sin \frac{n \pi}{p} \right]}{\varrho \sin \frac{n \pi}{p}} = p^2 \Phi_p(\varrho).$$

Analog ergibt sich der zweite Term (Ringradius $a' = c a$, Besetzungszahl p')

$$(4) \quad T_2 = p' \sum_0^{p'-1} \frac{\sin \left[c \varrho \sin \frac{n \pi}{p'} \right]}{c \varrho \sin \frac{n \pi}{p'}} = p'^2 \Phi_{p'}(c \varrho).$$

Bei der Berechnung des Wechselwirkungsgliedes T_{12} möge zunächst angenommen werden, daß die beiden Ringe gegeneinander keinerlei Relativbewegungen ausführen. Der einfachste Fall der Orientierung der beiden Ringe zueinander ist der in Fig. 1 gezeichnete: Es gibt mindestens einen Radius, auf dem sowohl ein inneres, als auch ein äußeres Elektron liegt (mit 0 bzw. 0' bezeichnet). Dann ist der Abstand des m ten Elektrons des einen Ringes vom m' ten Elektron des anderen Ringes

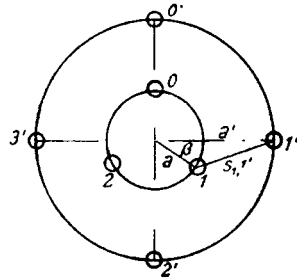


Fig. 1.

$$(5) \quad \sigma_{m, m'}^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos \beta.$$

a und a' Radius der Ringe, β Centriwinkel zwischen dem durch das m te, bzw. m' te Elektron gehenden Radiusvektor. Ist die Zahl der in äquidistanten Abständen über jeden Ring verteilten Elektronen p bzw. p' , so wird

$$(6) \quad \beta = \frac{2\pi}{p} n - \frac{2\pi}{p'} n'.$$

Im allgemeinen werden die Elektronenringe so gegeneinander verdreht sein, daß sich kein Radius findet, auf dem

sowohl ein inneres als auch ein äußeres Elektron liegt. Ist der Centriwinkel zwischen dem Radiusvektor des 0 ten und des 0' ten Elektrons φ , so lautet jetzt Gl. (6):

$$(7) \quad \beta = \frac{2\pi}{n} p - \frac{2\pi}{n'} p' - \varphi.$$

Der Abstand des n ten und n' ten Elektrons ergibt sich aus Gl. (5) und (7) zu

$$(8) \quad \sigma_{n,n'} = a \sqrt{c^2 + 1 - 2c \cos 2\pi \left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} - \frac{\varphi}{2\pi} \right)},$$

wobei $c = \frac{a'}{a}$ ist.

Das Wechselwirkungsglied T_{12} ist somit aus Gl. (1) und (8) in folgender Weise zu berechnen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} T_{12} &= 2 \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{n'=0}^{p'-1} \frac{\sin \left[2\pi a \sin \vartheta / 2 \sqrt{c^2 + 1 - 2c \cos 2\pi \left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} - \frac{\varphi}{2\pi} \right)} \right]}{2\pi a \sin \vartheta / 2 \sqrt{c^2 + 1 - 2c \cos 2\pi \left(\frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} - \frac{\varphi}{2\pi} \right)}} \\ &= 2 \Psi_{p,p'}(\varphi). \end{aligned} \right.$$

Da bei Ausführung der Summation in T_1 und T_2 die Elektronenabstände doppelt gezählt werden, ist bei T_{12} analog zu verfahren und der Faktor 2 der Doppelsumme beizufügen.

Die verschiedene Winkelgeschwindigkeit w bzw. w' der inneren und äußeren Elektronen hat zur Folge, daß die beiden Ringe relativ zueinander um einen gemeinsamen Mittelpunkt Drehbewegungen ausführen. Der Winkel φ darf jetzt nicht mehr als konstant angesehen werden; er ist eine periodische Funktion der Zeit. Zur Berechnung von $\varphi = f(t)$ fasse man ein beliebiges Elektron des Ringes mit der kleineren Besetzungszahl ins Auge, im folgendem als Elektron 0 bezeichnet. Be findet sich dieses zur Zeit $t = 0$ gerade in Opposition zum Elektron 0' — des anderen Ringes (d. h. liegen beide Elektronen auf einem und demselben Radiusvektor) und zur Zeit Δt gerade in Opposition zu dem auf das Elektron 0' nächstfolgenden Elektron 1', so wird nach Ablauf der Zeit $2\Delta t$ das ins Auge gefaßte Elektron sich in Opposition zum Elektron 2' befinden usf., d. h. jedesmal nach Ablauf der Zeit Δt stellt sich in bezug auf die Summenbildung der Elektronenabstände wieder der gleiche Wert ein, wie zur Zeit $t = 0$. Ist τ und

τ' die Umlaufzeit eines inneren bzw. äußeren Elektrons und $\gamma = \frac{w'}{w} = \frac{\tau}{\tau'}$, dann gilt

$$\frac{2\pi}{\tau} \Delta t = \frac{2\pi}{\tau'} \Delta t + \frac{2\pi}{p'},$$

$$(10) \quad \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{1}{p'(1-\gamma)}.$$

Der in der Zeit Δt von dem Elektron 0 bzw. von den auf demselben Kreisring liegenden Elektronen überstrichene Centriwinkel $\Delta \varphi$ ist dann

$$(11) \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi t}{\tau} = \frac{2\pi}{p'(1-\gamma)}.$$

Der größte Unterschied bei der Summierung über die Elektronenabstände nach Gl. (9) für die verschiedenen Fälle der Orientierung der beiden Ringe zueinander wird sich dann ergeben, wenn das ins Auge gefaßte Elektron 0 gerade in Opposition zu einem Elektron des anderen Ringes steht (Fall 1) bzw. wenn es sich gerade in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionsstellungen befindet (Fall 2). Somit ergeben sich bei der Summierung der Abstände die beiden Extremwerte, wenn

$$1. \quad \varphi = 0, \quad 2. \quad \varphi = \frac{\Delta \varphi}{2}$$

gesetzt wird. Über die Größe des Intervalles, in dem die für verschiedene Zeiten berechneten Werte des Wechselwirkungsgliedes liegen, gibt folgendes Beispiel Aufschluß:

Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten . $\gamma = \frac{1}{8}$,
 „ „ „ Radian $c = 4$,
 Zahl der Elektronen des inneren Ringes $p = 2$,
 „ „ „ „ „ äußeren „ $p' = 4$.

Tabelle 1.

ϱ	Werte von Ψ für		
	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\Delta \varphi}{4}$	$\varphi = \frac{\Delta \varphi}{2}$
0,0	8,00	8,00	8,00
0,5	6,67	6,66	6,66
1,0	3,52	3,52	3,52
2,0	- 1,10	- 1,10	- 1,11
3,0	- 0,25	- 0,28	- 0,32
4,0	0,25	0,24	0,22

Merkliche Unterschiede treten erst auf für Werte $\varrho > 2$. Bei der Berechnung des gesamten Streueffektes V nach Gl. (1) ist aber von $\varrho > 2$ an das Wechselwirkungsglied sehr viel kleiner als die beiden Terme T_1 und T_2 , so daß die bei der Berechnung von Ψ für verschiedene Zeiten sich ergebenden Unterschiede (Tab. 1) im Endresultat V vernachlässigt werden dürfen. Für $p = 2$ und $p = 4$ ist z. B. von $\varrho > 2$ ab T_{12} im Mittel nur 2 Proz. des Wertes von T_1 und T_2 zusammen. Bei den Atommodellen mit $\gamma \leq \frac{1}{8}$ und $c \geq 4$ darf daher von den durch die Relativbewegung der beiden Ringe bedingten Verschiedenheiten der Werte des Terms T_{12} abgesehen werden. Es genügt, T_{12} für eine einzige beliebige Zeit zu berechnen und zwar wird in folgendem der Einfachheit halber der Fall $t = 0$, d. h. $\varphi = 0$ zugrunde gelegt werden. Eine etwas größere Genauigkeit ließe sich durch Benützung von $\varphi = \frac{A\varphi}{4}$ erreichen.

Für die Streuwirkung eines zweiringigen Elektronensystems ergibt sich aus Gl. (1), (2), (3) und (9) somit, wenn

$$\frac{e^4 N}{\mu^2 v^4 R^2} = b \text{ ist,}$$

$$(12) \quad V = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \{p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + 2\Psi_{pp'}(c, \varrho)\},$$

während Debye für das einringige System berechnet hat

$$(13) \quad V = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{1} \{p^2 \Phi_p(\varrho)\}.$$

Für ein dreiringiges System läßt sich Gl. (12) leicht erweitern, ist a'' der Radius, p'' die Besetzungszahl usw. des dritten Ringes, so wird, wenn $c' = \frac{a''}{a}$ und $c'' = \frac{a''}{a'}$ ist:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \{ & p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + p''^2 \Phi_{p''}(c'\varrho) \\ & + 2\Psi_{pp'}(c, \varrho) + 2\Psi_{pp''}(c', \varrho) + 2\Psi_{p'p''}(c'', \varrho) \}. \end{aligned} \right.$$

Grenzfälle.

1. λ klein gegen a , also ϱ sehr groß.

Abgesehen von dem kleinen Winkelbereich in der Einfallsrichtung des Primärstrahles (ϑ nahezu 0) verschwinden alle Glieder in den Termen T_1 , T_2 und T_{12} mit Ausnahme des

ersten Gliedes in T_1 und T_2 , welches den Wert 1 annimmt; somit ist $T_1 = p$, $T_2 = p'$, $T_{12} = 0$ und

$$(15) \quad V = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} (p + p').$$

Für ein System von n Ringen mit den Besetzungszahlen $p_1, p_2, p_3 \dots$ ergibt sich analog die Beziehung

$$(16) \quad V = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \sum_1^n p_r = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \cdot Z,$$

wenn Z die gesamte Elektronenzahl des Atomes ist.

Bei kurzen Wellen ist, genau wie beim einringigen System, die zerstreute Intensität proportional der Gesamtzahl der Elektronen des streuenden Atoms. Für die leichtatomigen Stoffe ist $Z = \frac{A}{2}$ (A Atomgewicht); Gl. 16) geht dann über in das Barklasche Gesetz; die von einem Atom zerstreute Intensität ist proportional dem Atomgewicht.

2. λ sehr groß gegen a , ϱ nahezu 0.

In den Termen T_1 , T_2 , T_{12} nähern sich alle Glieder dem Grenzwert 1, also

$$T_1 = p^2, \quad T_2 = p'^2, \quad T_{12} = 2pp'$$

und

$$(17) \quad V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \{p^2 + p'^2 + 2pp'\} = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} Z^2,$$

bzw. beim dreiringigen System

$$(18) \quad V = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \{p^2 + p'^2 + p''^2 + 2pp' + 2pp'' + 2p'p''\}, \\ = b \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} Z^2.$$

Das von Debye aufgestellte Gesetz, daß bei sehr langen Wellen die gestreute Intensität proportional dem Quadrat der Gesamtzahl der Elektronen im Atom ist, behält somit seine Gültigkeit für Atome, die aus mehr als einem Elektronenring bestehen.

Räumlicher Mittelwert der Streuung.

Für die folgenden Überlegungen ist die Kenntnis der gesamten von einem Atom bei einer bestimmten Wellenlänge nach allen Richtungen hin zerstreuten Strahlung erforderlich.

Ist \bar{V} der räumliche Mittelwert der Streuung und $d\omega$ der körperliche Winkel des Elementarkegels, so ist die Gesamtstrahlung $= 4\pi \bar{V}$, also

$$(19) \quad \bar{V} = \frac{1}{4\pi} \int v R^2 d\omega,$$

oder aus Gl. (12) für das zweiringige Elektronensystem

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{V} = \frac{\epsilon^4}{4u^2 v^4} N \int_0^\pi [p^2 \Phi_p(\varrho) + p'^2 \Phi_{p'}(c\varrho) + \Psi_{pp'}(c, \varrho)] \\ (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Für das dreiringige System ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck durch Einsetzen des in Gl. (14) enthaltenen Wertes der Summe der Funktionen Φ und Ψ .

Bei Ausführung der Integration unter Benutzung der Reihenentwicklung der Funktionen Φ und Ψ (Gl. 3 und 9) liefert das erste Glied von Φ jeweils das Integral

$$(21) \quad \int_0^\pi (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{8}{3}.$$

Alle übrigen Glieder von Φ , sowie sämtliche Glieder von Ψ führen auf Integrale von der Form:

$$(22) \quad \int_0^\pi \frac{\sin[b \sin \vartheta/2]}{b \sin \vartheta/2} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 8 F(b).$$

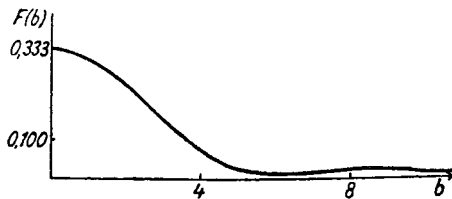


Fig. 2.

Das Integral läßt sich transformieren in

$$\frac{1}{b} \int_0^1 (1 - 2x^2 + 2x^4) \sin[bx] dx;$$

hieraus folgt durch Reihenentwicklung

$$(23) \quad F(b) = \frac{1}{3} - \frac{b^2}{36} + \frac{7b^4}{7200} - \frac{11b^6}{604800} + \dots$$

Für große Werte von b läßt sich $F(b)$ mit guter Näherung erhalten aus

$$(24) \quad F(b) = \frac{1 - \cos b}{b^2}.$$

§ 2. Kohlenstoffatom.

Auf Grund der zurzeit herrschenden Anschauungen von der Atomstruktur ist das Kohlenstoffatom als zweiringiges Elektronensystem aufzufassen. In bezug auf die Verteilung der Elektronen sind zwei Fälle nahezu gleich wahrscheinlich: die Annahme eines aus zwei Elektronen bestehenden inneren Ringes (K -Ring) wird durch das periodische System nahegelegt, während die genaue Berechnung der Frequenz der K_α -Linie einen mit drei Elektronen besetzten K -Ring erfordert. Der Zweck der folgenden Berechnungen ist, zu prüfen, ob die experimentellen Beobachtungen des Streueffektes eine Entscheidung zwischen diesen beiden möglichen Atomstrukturen zu treffen gestatten.

Berechnung der Ringradien und Winkelgeschwindigkeiten.

Das Verhältnis der Radien a und a' des K - und L -Ringes (Besetzungszahlen p und p') eines aus Z -Elektronen bestehenden Bohrschen Atomes ist

$$(25) \quad c = \frac{a'}{a} = 4 \frac{Z - s_p}{Z - p - s_{p'}},$$

wobei s_p die Abschirmungswirkung¹⁾ der Kernladung durch die auf dem gleichen Ring befindlichen p -Elektronen bedeutet.

Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten w bzw. w' eines Elektrons des K -Ringes und eines Elektrons des L -Ringes ist

$$(26) \quad \gamma = \frac{w'}{w} = 2 \left(\frac{a}{a'} \right)^2 = \frac{2}{c^2}.$$

1. Fall:

$$p = 2, \quad p' = 4, \quad Z = 6, \\ s_p = 0,25, \quad s_{p'} = 0,957, \quad \text{somit } c = 7,6, \quad \gamma = \frac{1}{29}.$$

2. Fall:

$$p = 3 = p', \quad Z = 6, \quad \text{somit } c = 9, \quad \gamma = \frac{1}{40,5}, \\ s_p = s_{p'} = 0,577.$$

1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, S. 262, Tab. für s_p . S. 84.

Der absolute Wert des Radius a des K -Ringes ergibt sich in beiden Fällen nahezu gleich groß, nämlich $a = 1 \cdot 10^{-9}$ cm; während sich im Falle eines einzigen Ringes mit 6 Elektronen $a = 1,3 \cdot 10^{-9}$ cm ergibt.

Berechnung der charakteristischen Funktionen.

Auf Grund der Überlegungen des § 1 ergeben sich für die verschiedenen Atomstrukturmodelle folgende Werte der charakteristischen Funktionen¹⁾:

$$1. \text{ Fall: } p = 2, \quad p' = 4.$$

$$(27) \quad \Phi_2(\varrho) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho} \right).$$

$$(28) \quad \Phi_4(7,6\varrho) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sin 7,6\varrho}{7,6\varrho} + 2 \frac{\sin(5,4\varrho)}{5,4\varrho} \right).$$

$$(29) \quad \psi_{2,4} = \sum_0^1 \sum_0^3 \frac{\sin \left[\varrho \sqrt{14,6 - 3,8 \cos 2\pi \left(\frac{n}{2} - \frac{n'}{4} \right)} \right]}{\varrho \sqrt{14,6 - 3,8 \cos 2\pi \left(\frac{n}{2} - \frac{n'}{4} \right)}}.$$

$$2. \text{ Fall: } p = 3, \quad p' = 3.$$

$$(30) \quad \Phi_3(\varrho) = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2 \sin(0,87\varrho)}{0,87\varrho} \right]$$

analog $\Phi_{3'}$, wenn statt ϱ das Argument 9ϱ eingesetzt wird; ferner

$$(31) \quad \psi_{3,3'}(\varrho) = \sum_0^2 \sum_0^2 \frac{\sin \left[\varrho \sqrt{20,35 - 4,5 \cos 2\pi \left(\frac{n}{3} - \frac{n'}{3} \right)} \right]}{\varrho \sqrt{20,35 - 4,5 \cos 2\pi \left(\frac{n}{3} - \frac{n'}{3} \right)}}.$$

3. Fall: (ein Ring mit 6 Elektronen):

$$(32) \quad \Phi_6(\varrho) = \frac{1}{6} \left[1 + \frac{2 \sin(0,5\varrho)}{0,5\varrho} + \frac{2 \sin(0,87\varrho)}{0,87\varrho} + \frac{\sin \varrho}{\varrho} \right].$$

Abhängigkeit der Streuung vom Streuwinkel.

Wie aus Gl. (12) zu ersehen ist, hat man zunächst die Summe \sum der charakteristischen Funktionen als Funktion

1) Von der Relativbewegung der beiden Ringsysteme darf hier mit um so größerer Berechtigung abgesehen werden, als c wesentlich größer und γ erheblich kleiner als bei dem in § 1 behandelten Beispiel ist, so daß der dort schon vernachlässigbar klein gefundene Fehler hier noch kleiner ist.

von $\varrho = \frac{8\pi a}{\lambda} \sin \vartheta$ darzustellen (Fig. 3, Kurve 1, entspricht dem 1. Fall der Atomstruktur, Kurve 2 dem 2. Fall). Hieraus erhält man dann unter Konstanthaltung der Wellenlänge die

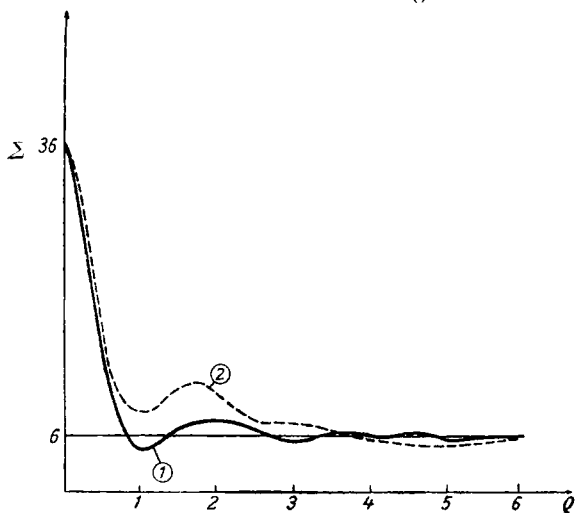


Fig. 3.

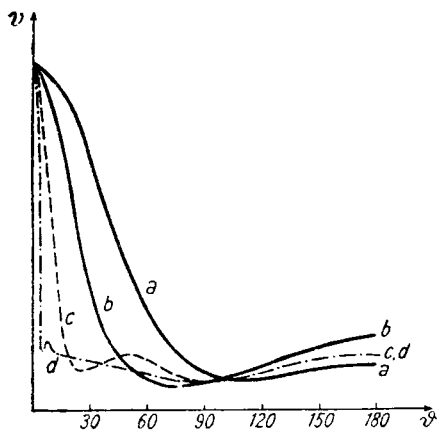


Fig. 4.

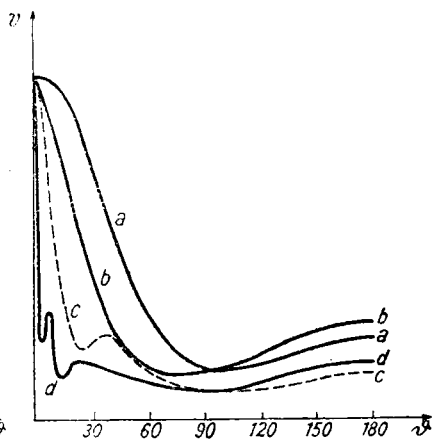


Fig. 5.

Abhängigkeit der zerstreuten Intensität vom Winkel ϑ gegenüber der Einfallsrichtung der Primärstrahlen (Fig. 4: 1. Fall, Fig. 5: 2. Fall). Die betreffenden Werte der Wellenlänge sind in Tab. 3 angegeben.

Tabelle 3.

Kurve	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
$\lambda \cdot 10^8 \text{ cm} =$	2,5	1,25	0,5	0,06

Fig. 6 enthält die einer Arbeit von Kohlrausch¹⁾ entnommenen Verteilungskurven (Wellenlängenwerte in Tab. 4) bei Annahme eines einringigen Atommodells (3. Fall).

Tabelle 4.

Kurve	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
$\lambda \cdot 10^8 \text{ cm} =$	∞	1,3	0,52	0,13

In Fig. 6 erfolgt der Abfall der Streuintensität mit wachsendem Winkel erheblich langsamer als in Fig. 4 und 5.

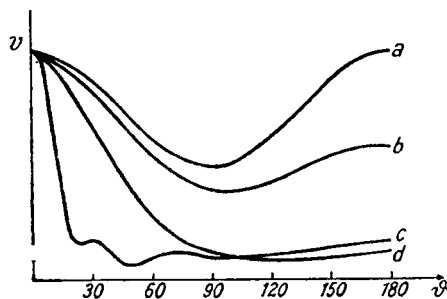


Fig. 6.

Besonders deutlich zeigt dies ein Vergleich der Kurve *b*, welche auf allen Figuren annähernd der gleichen Wellenlänge entspricht. Die Bevorzugung der Einfallsrichtung der Primärstrahlen tritt beim zweiringigen Elektronensystem stärker hervor als beim einringigen; der in der Umgebung der Primärstrahlrichtung vorhandene Bezirk, in dem nach Debye die Streuintensität proportional mit Z^2 geht, ist bei gleicher Wellenlänge beim zweiringigen System wesentlich enger als beim einringigen.

Andererseits zeigen die Kurven, daß beim zweiringigen Kohlenstoffatom selbst bei den längsten technisch vorkommenden Wellen die im Grenzfall $\lambda = \infty$ gültige Thomson-sche Verteilung proportional mit $1 + \cos^2 \vartheta$ noch nicht auftritt. Wie im folgenden nachgewiesen wird, ist die Annahme

1) F. Kohlrausch, Phys. Zeitschr. 21. S. 193. 1920.

eines einringigen Kohlenstoffatoms unbedingt abzulehnen; das Kohlenstoffatom ist sicher ein zweiringiges*) System. Bei Messungen an Kohlenstoff als streuendem Körper wird man daher bei Verwendung technischer Röntgenröhren niemals die Thomsonsche Verteilung auffinden können.

Wenn es sich nun darum handelt, zwischen den beiden möglichen Fällen eines zweiringigen Kohlenstoffatoms zu entscheiden, so bietet das Auftreten deutlicher Maxima und Minima bei kurzen Wellen und kleinen Winkeln im 2. Falle (Fig. 5) die Möglichkeit eines experimentellen Beweises zugunsten der Annahme eines aus zwei Ringen mit je drei Elektronen bestehenden Atoms. Sämtliche vorliegenden Streustrahlenmessungen sind aber mit nicht homogenen Primärstrahlungen angestellt worden, so daß sich hieraus keine sicheren Schlüsse in dieser Hinsicht ziehen lassen.

Dagegen läßt sich an der Hand dieser Kurven ein in der Literatur¹⁾ häufig betonter Widerspruch zwischen den Messungen von Barkla²⁾ einerseits und Owen³⁾ bzw. Crowther⁴⁾ andererseits leicht aufklären. Während Barkla gefunden hatte, daß die Dissymetrie der Kurve (Abweichung von der Thomsonschen Kurve $1 + \cos^2 \vartheta$) mit wachsender Härte größer wird, scheinen die Messungen von Owen gerade das Gegenteil zu ergeben.

Wie eine Durchsicht der Originalarbeiten zeigt, benützt Barkla zur Ermittlung der Winkelabhängigkeit der Streuung von Kohle eine sehr weiche Röntgenröhre und findet mit Ausnahme der Werte für 20° und 30° , die zu groß sind, gute Übereinstimmung mit dem Thomsonschen Ansatz. Dieses Ergebnis deckt sich vollständig mit dem Resultat der theoretischen Berechnung: Bildet man in Fig. 4 im Winkelbereich von 45° bis 180° das Verhältnis $V \vartheta / V_{90}$, so erhält man an-

*) *Anm. bei der Korrektur:* In einer besonderen Arbeit wird gezeigt werden, daß die Annahme einer räumlich-tetraedrischen Anordnung der vier äußeren Elektronen (nach Landé) nahezu die gleiche Streuwirkung besitzt, wie das oben betrachtete zweiringige System.

1) E. Marx, Handbuch der Radiologie 5. S. 330; R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen. S. 64.

2) Barkla, Phil. Mag. 15. S. 288. 1908; 21. S. 270. 1911.

3) Owen, Proc. Cambr. Soc. 16. S. 161. 1911.

4) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912.

nähernd dieselben Werte, wie unter Benutzung der Thomson-schen Formel, während von $\vartheta = 45^\circ$ an V_{ϑ}/V_{90} wesentlich größer wird als der Proportionalität mit $1 + \cos^2 \vartheta$ entspricht. Barkla betont besonders in seiner Arbeit, daß diese (abgesehen von den Winkeln 20° und 30°) symmetrische Verteilung nur bei Verwendung sehr weicher Strahlen erhalten werde und weist auf frühere Messungen¹⁾ hin; bei diesen wurde jedoch nur das Verhältnis von V_{170}/V_{90} für verschiedene Härte der Röntgenstrahlen bestimmt und gefunden:

$$\begin{aligned}\frac{V_{170}}{V_{90}} &= 2 \text{ für eine sehr weiche Strahlung,} \\ &= 1,9 \text{ „ „ weiche Strahlung,} \\ &= 1,5 \text{ „ „ gefilterte, harte Strahlung,}\end{aligned}$$

d. h. also um so bessere Gültigkeit der Thomsonschen Verteilung, je weicher die Strahlung ist.

Berechnet man das Verhältnis V_{170}/V_{90} mit Hilfe unserer Formeln für eine große Reihe von Wellenlängen, so findet man im 1. Fall (Atom mit zwei und vier Elektronen) für $\lambda = 1,25 \text{ \AA.}$ den Wert 2,6, der dann langsam abnimmt bis zu 1,45, im 2. Fall (Atom mit je drei Elektronen) für $\lambda = 1,25 \text{ \AA.}$ den Wert 2,0, der ziemlich rasch abnimmt und im Intervall $\lambda = 0,9$ bis $0,5 \text{ \AA.}$ nahezu konstant $= 1,5$ ist. In beiden Fällen ist also das Barklasche Ergebnis mit der Theorie gut zu vereinigen.

Im Gegensatz zu Barkla beobachtet Owen eine um so bessere Gültigkeit der Thomsonschen Verteilung, wenn die Härte der Primärstrahlung zunimmt. Der scheinbare Widerspruch wird behoben, sobald man beachtet, daß bei beiden Forschern verschiedene Winkelintervalle in Betracht kommen. Während Barkla die Härteabhängigkeit des Verhältnisses der Streuintensität bei $\vartheta = 170^\circ$ zu der bei $\vartheta = 90^\circ$ beobachtet, stützt sich das Owensche Ergebnis auf Messungen im Intervall $\vartheta = 30^\circ$ bis 45° . Außerdem ist zu bemerken, daß die Härteänderungen bei Owen an und für sich klein²⁾ waren, aber im Gebiet zwischen 30° und 45° deutlich hervortraten³⁾,

1) Barkla, Phil. Mag. 15. S. 288. 1908.

2) In der betreffenden Arbeit ist angegeben, daß durchweg weiche Röntgenröhren verwandt wurden.

3) Bei Winkel kleiner als 30° wurden keine Messungen ausgeführt.

weil hier die Verteilungskurven für die verschiedenen Wellenlängen sich beträchtlich voneinander unterscheiden (Fig. 4 und 5). Die Theorie liefert in Übereinstimmung mit Owen für das Verhältnis V_{30}/V_{90} um so bessere Annäherung an die Thomsonsche Verteilung, je kleiner die Wellenlänge ist.

Die theoretischen Kurven lassen aber erwarten, daß bei Ausdehnung der Streustrahlenmessung auf kleine Winkel schließlich wieder Winkel erreicht werden, bei denen die Messung größere Werte liefert als das Thomsonsche Gesetz, und zwar muß dieser Winkel um so kleiner sein, je größer die Härte ist. Diese Folgerungen finden eine gute Bestätigung in den Messungen von Crowther (vgl. Tab. 5, angegeben ist $V\vartheta/V_{90}$), welcher an paraffiniertem Filterpapier genaue Intensitätsverteilungskurven, insbesondere auch bei kleinen Winkeln, aufgenommen und im Bereich 30° bis 45° die Owenschen Messungen bestätigt hat.

Tabelle 5.

ϑ	Parallelfunkstrecke			Thomsonsche Formel
	1 cm	2,1 cm	4 cm	
10°	3,66	4,24	4,60	1,97
20°	2,90	2,75	2,30	1,88
30°	2,14	1,98	—	1,75
40°	1,78	1,66	1,52	1,59

Auch das zunächst auffällige Resultat, daß in Tab. 5 $V\vartheta/V_{90}$ mit der Härte im allgemeinen abnimmt, für $\vartheta = 10^\circ$ aber zunimmt, läßt sich aus der Theorie ableiten.

Wellenlängenabhängigkeit des räumlichen Mittelwertes der Streuung.

Als eines der gesichertsten Resultate der Streustrahlenmessung gilt das Barklasche Gesetz: Bei Elementen mit Atomgewichten kleiner als 32 ist der Massenstreuoeffizient unabhängig von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung und der chemischen Natur des Stoffes eine universelle Konstante. Dieser Erfahrungssatz eignet sich gut als Kriterium zur Entscheidung zwischen den verschiedenen möglichen Strukturen des Kohlenstoffatoms. Es wird der räumliche Mittelwert \bar{V} der Streuung für beide Fälle berechnet, sodann \bar{V} als

Funktion von λ dargestellt und mit dem Versuchsergebnis $\bar{V} = \text{const}$ in bezug auf λ verglichen.

Nach Ausführung der Integration gemäß Gl. (20) und (22) ist der räumliche Mittelwert der Streuung \bar{V} , wenn $\frac{e^4 N}{\mu^2 v^4} = b_0$ und $a_1 = 4\pi a = \frac{8\pi a}{\lambda}$ ist.

1. Fall:

$$p = 2, \quad p' = 4.$$

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{V} = 4b_0 [1 + F(a_1) + 2F(3,28a_1) + 4F(3,82a_1) \\ + 2F(4,29a_1) + 4F(5,38a_1) + 2F(7,6a_1)]. \end{aligned} \right.$$

2. Fall:

$$p = 3, \quad p' = 3.$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{V} = 4b_0 [1 + 3F(0,87a_1) + 3F(3,98a_1) + 6F(4,76a_1) \\ + 3F(7,8a_1)]. \end{aligned} \right.$$

3. Fall:

$$(35) \quad \bar{V} = 4b_0 [1 + 6F(0,5a_1) + 6F(0,87a_1) + 3F(a_1)].$$

Die verschiedenen Werte von \bar{V} sind für die drei Fälle in Fig. 7 als Funktion von λ graphisch dargestellt. Das Wellenlängenintervall der bei den Streustrahlenmessungen von Barkla¹⁾ angewandten Strahlungen ist durch die beiden Ordinaten A und B begrenzt, entsprechend einer Wellenlänge von $\lambda = 2,2 \cdot 10^{-8}$ cm (A) und $0,5 \cdot 10^{-8}$ cm (B) für das zweiringige Atom. Bei Kurve 3 hat man sich die Grenzen dieses Spektralgebietes in Fig. 7 ein wenig nach links verschoben zu denken, da beim einringigen Atom der Radius a das 1,3fache des Radius beim zweiringigen System ist.²⁾

Aus Fig. 7 Kurve 3, ist ohne weiteres zu entnehmen, daß der 3. Fall der in Frage kommenden Atommodelle (ein Ring mit sechs Elektronen) zu Ergebnissen führt, die mit der Erfahrung $\bar{V} = \text{const}$ nicht vereinbar sind. Die Annahme eines einringigen Kohlenstoffatoms, die — wie bekannt — aus röntgenspektroskopischen Gründen sehr wenig wahrscheinlich

1) Barkla, Phil. Mag. 17. S. 755. 1909.

2) a_1 in Gl. (35) ist das 1,3fache von a_1 in Gl. (33) und (34).

ist, muß mit Rücksicht auf die Streustrahlungsmessungen ebenfalls abgelehnt werden. Da der Grad der Wellenlängenabhängigkeit bei Kurve 1 und 2 nahezu der gleiche ist, so kann aus dem Gang des Streukoeffizienten mit der Wellenlänge nichts darüber ausgesagt werden, welcher der beiden Möglichkeiten des zweiringigen Systems die größere Wahrscheinlichkeit zukommt.

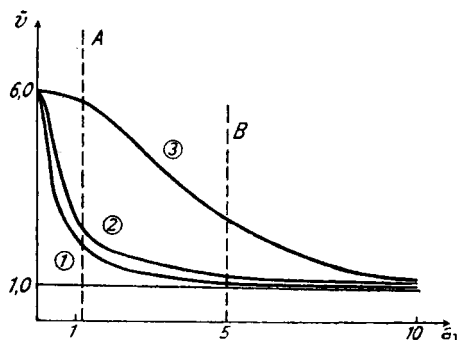


Fig. 7.

Die Tatsache, daß auch die Kurven 1 und 2 eine allerdings geringe Härteabhängigkeit für $\bar{\nu}$ liefern, war die Veranlassung, zu untersuchen, auf welche experimentellen Grundlagen der Barklasche Satz, daß $\frac{s}{\varrho} = \text{const}$ unabhängig von λ ist, sich stützt. Unter Benutzung der Eigenstrahlung von Chrom und Silber (Wellenlängen etwa 2,2 bzw. 0,56 Å.) fand Barkla¹⁾ für Kohle beide Male $\frac{s}{\varrho} = 0,2$. Eine genaue azimutale Intensitätsverteilungskurve der Streuung wurde nicht aufgenommen; gemessen wurde nur das Verhältnis aus Streuintensität unter dem Streuwinkel $\vartheta = 90^\circ$ zur Primärintensität und hieraus s/ϱ berechnet unter der Voraussetzung der Richtigkeit der Thomsonschen Formel, daß die Streuung proportional $1 + \cos^2 \vartheta$ ist. Da die Streustrahlung in Richtung der Fortpflanzung der Primärstrahlen erheblich größer ist als in der entgegengesetzten Richtung, und da die Größe dieser Disymmetrie von der Härte der Primärstrahlen abhängt (vgl.

1) Barkla, Phil. Mag. 7. S. 543. 1904; 17. S. 739. 1909.

Fig. 4 u. 5), so liefert die Barklasche Messung keinen sicheren Beweis für die Gleichheit von s/ρ bei $\lambda = 0,56 \text{ \AA.}$ und $\lambda = 2,2 \text{ \AA.}$ Eine experimentelle Nachprüfung des Barklaschen Gesetzes erscheint daher dringend erwünscht.

Absolute Größe des Massenstreuoeffizienten.

Ist \bar{V} der räumliche Mittelwert der Streuung nach Gl. (20), so ist die gesamte von einem Atom zerstreute Strahlung $= 4\pi \bar{V}$ oder $= s_{At}$ (Atomstreuoeffizient), wobei $N = 1$ zu setzen ist. Somit ist der Massenstreuoeffizient, wenn A das Atomgewicht bedeutet,

$$(36) \quad \frac{s}{\rho} = \frac{6,07 \cdot 10^{23}}{A} s_{At} = 4\pi \bar{V} \cdot 6,07 \cdot 10^{23}.$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für \bar{V} aus Gl. (33) bzw. (34) ergeben sich für s/ρ die in Tab. 6 enthaltenen Werte.

Tabelle 6.

$\lambda \cdot 10^8 \text{ cm}$	s/ρ	
	(1. Fall)	(2. Fall)
0,5	0,17	0,19
1,0	0,22	0,28
2,0	0,31	0,36
5,0	0,52	0,68

An experimentellen Ergebnissen liegt außer den oben erwähnten Messungen von Barkla eine Arbeit von Crowther¹⁾ vor, welcher s/ρ an paraffiniertem Filterpapier bestimmte auf Grund einer genauen Aufnahme der azimutalen Verteilung der Streuung. Aus dem Resultat $\frac{s}{\rho} = 0,27$ ergibt sich unter Berücksichtigung der erfahrungsgemäß den normalen Wert um das Doppelte übersteigenden Streuwirkung des Wasserstoffatoms, für Kohlenstoff etwa $\frac{s}{\rho} = 0,21$.

Ein Vergleich der Messungen mit den berechneten Werten in Tab. 6 spricht somit eher zugunsten der Atomstruktur mit den Besetzungszahlen 2 und 4 (1. Fall).

Nimmt man zu diesen Resultaten die oben mitgeteilten Vergleiche zwischen Theorie und Experiment in bezug auf die azimutale Verteilung hinzu, so kommt man zu der Fest-

1) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912.

stellung, daß die erweiterte Debyesche Theorie der Streuung beim Kohlenstoffatom unter der Voraussetzung eines zweiringigen komplanaren Elektronensystems¹⁾ imstande ist, in weitem Umfange alle typischen Züge der Meßresultate wiederzugeben und bestehende Widersprüche aufzuklären. Eine sichere Entscheidung zwischen den beiden möglichen Fällen eines zweiringigen Systems zu treffen, gestatten die vorliegenden Messungen, die durchweg unter Verwendung inhomogener Strahlen gewonnen worden sind, nicht. Mit Rücksicht auf die absolute Größe des Massenstreuoeffizienten erscheint jedoch die Annahme, daß der innere Ring des Kohlenstoffatoms mit zwei, der äußere mit vier Elektronen besetzt ist, wahrscheinlicher, als eine Belegung beider Ringe mit je drei Elektronen. Unbedingt abzulehnen ist das Atommodell, das nur einen Ring von 6 Elektronen enthält.

§ 3. Aluminiumatom.

Das günstigste Beispiel zur Berechnung der Streuung eines dreiringigen Elektronensystemes ist Aluminium, weil die Streustrahlung dieses Stoffes wiederholt untersucht worden ist. In Hinsicht auf das periodische System und die Ergebnisse der Röntgenspektroskopie können die 13 Elektronen im Aluminiumatom so verteilt sein, daß entweder zwei auf den innersten, acht auf den mittleren, drei auf den äußersten Ring entfallen oder so, daß die Besetzungszahlen 3, 9, 1 sind.

Berechnung der Ringradien und Winkelgeschwindigkeiten.

$$1. \text{ Fall: } p = 2, \quad p' = 8, \quad p'' = 3.$$

In analoger Weise wie in § 2 erhält man für den Radius a des innersten Ringes

$$(37) \quad a = \frac{a_H}{Z - s_2} = 0,04_3 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

$s_2 = 0,25$ Abschirmungswirkung der Elektronen des K -Ringes, a_H Radius des K -Ringes beim Wasserstoffatom.

Ferner

$$(38) \quad c = \frac{a'}{a} = \frac{4(Z - s_2)}{Z - p - s_8} = 6,2.$$

a' Radius des L -Ringes.

1) Vgl. hierzu Anm. *) auf S. 553.

Um näherungsweise den Radius a'' des M -Ringes zu erhalten, denke man sich K - und L -Ring auf den Kern zusammengezogen, d. h. die Kernladung Z um den Betrag $p + p'$ vermindert; dann ist

$$(39) \quad c' = \frac{a''}{a} = \frac{9(Z - s_2)}{Z - p - p' - s_3} = 47,2 \quad \text{und} \quad c'' = \frac{a''}{a'} = 7,6.$$

Nun ist zu bedenken, daß das von den Elektronen eines Ringes veranlaßte elektrische Feld in einem Punkt innerhalb des Ringes so beschaffen ist, daß die von den verschiedenen Elektronen herrührenden Feldkomponenten sich teilweise schwächen, daß aber in einem Punkt außerhalb des Ringes stets eine Verstärkung der Komponenten stattfindet. Während also bei der Berechnung des Radius des L -Ringes von der Wirkung der Elektronen des M -Ringes abgesehen werden darf, erscheint es nicht ohne weiteres erlaubt, bei der Bestimmung des Radius des M -Ringes die Wirkung der p' Elektronen des L -Ringes durch Anbringen einer Ladung $-p'$ im Kern zu ersetzen. Ist z. B. der M -Ring (Radius a'') von drei, der L -Ring (Radius a') von acht Elektronen besetzt, so erhält man durch eine geometrische Überlegung das elektrische Feld an einer Stelle des M -Ringes:

$$(40) \quad \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon^2}{(a'' - a')^2} + \frac{\varepsilon^2}{(a'' + a')^2} + 2\varepsilon^2 \sum_1^3 \frac{a'' - a' \cos \frac{n\pi}{4}}{\left(a'^2 + a''^2 - 2a'a'' \cos \frac{n\pi}{4}\right)^{3/2}}.$$

Hieraus folgt durch Reihenentwicklung

$$(41) \quad \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon^2}{a''^4} \left[8 - 3 \frac{a'}{a''} + 12,76 \left(\frac{a'}{a''} \right)^2 - \dots \right].$$

Durch Einsetzen des Näherungswertes für a'/a'' aus Gl. (39) erhält man

$$c' = 44 \text{ statt } 47,2 \text{ (genähert)}, \quad c'' = 7,1 \text{ statt } 7,6 \text{ (genähert)}.$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit der Elektronen des K -Ringes, L -Ringes, M -Ringes w , w' , w'' , so gilt

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{1}{\gamma} = \frac{w}{w'} = \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = 19,2, \\ \frac{1}{\gamma''} = \frac{w}{w''} = \frac{1}{3} \left(\frac{a'}{a'} \right)^2 = 64,3. \end{cases}$$

2. Fall: $p = 3, p' = 9, p'' = 1.$

Es wird $a = 0,04_4 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{a'}{a} = 7,5, \\ c' = \frac{a''}{a} = 49,7, \\ c'' = \frac{a'''}{a} = 6,6, \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma} = \frac{w}{w'} = 28, \\ \frac{1}{\gamma''} = \frac{w}{w''} = 82. \end{array} \right.$$

Charakteristische Funktionen.

1. Fall: Es ist

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2(\varrho) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho} \right), \\ \Phi_8(c \varrho) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sin [c \varrho]}{c \varrho} + \frac{2 \sin [0,71 c \varrho]}{0,71 c \varrho} + \frac{2 \sin [0,38 c \varrho]}{0,38 c \varrho} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{2 \sin [0,92 c \varrho]}{0,92 c \varrho} \right), \\ \Phi_3(c' \varrho) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2 \sin [0,87 c' \varrho]}{0,87 c' \varrho} \right). \end{array} \right.$$

Bei der Berechnung der Wechselwirkungsglieder läßt sich folgende Näherung einführen: Der Abstand eines Elektrons des *K*-Ringes von einem des *L*-Ringes liegt zwischen den Grenzen $a'' + a$ und $a'' - a$. Wegen $a'' \gg a$ kann näherungsweise für alle Abstände der mittlere Wert a'' eingesetzt werden. Diese Näherung, ebenso wie die analogen bei den beiden anderen Wechselwirkungsgliedern, ist um so eher gestattet, je größer das Verhältnis der betreffenden Ringradien ist und je größer die Besetzungszahlen der Ringe sind. Somit wird

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{2,8} = \frac{16 \sin (3,1 \varrho)}{3,1 \varrho}, \\ \psi_{2,3} = \frac{6 \sin (22 \varrho)}{22 \varrho}, \\ \psi_{8,3} = \frac{24 \sin (22 \varrho)}{22 \varrho}. \end{array} \right.$$

Die in § 1 angegebene Bedingung dafür, daß von der Relativbewegung der Ringe gegeneinander abgesehen werden kann, ist, wie die Werte von $c, c', c'', \gamma, \gamma''$ zeigen, beim Aluminiumatom gut erfüllt.

Abhängigkeit der Streuung vom Winkel.

In analoger Weise wie in § 2 ist in Fig. 8 für die in Tab. 7 enthaltenen Wellenlängen die azimutale Verteilung der Streuung des Aluminiumatoms dargestellt.

Tabelle 7.

Kurve Nr.	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
$\lambda \cdot 10^8 \text{ cm}$	2,2	1,1	0,55	0,22

Messungen der Abhängigkeit der Streustrahlung des Aluminiums vom Winkel wurden von Crowther¹⁾ ausgeführt.

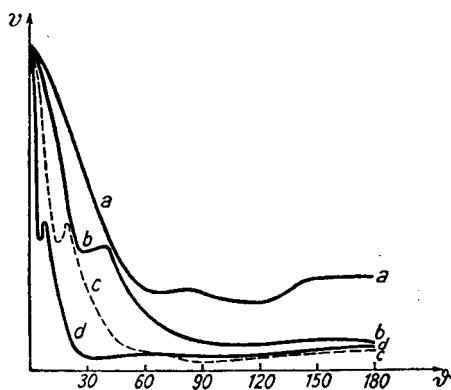


Fig. 8.

Zwischen $\vartheta = 90^\circ$ und 180° ist gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung vorhanden. Die von Crowther benutzte nicht homogene Strahlung einer Röntgenröhre hatte den Absorptionskoeffizienten $\mu_{\text{Al}} = 11$; dem entspricht eine mittlere Wellenlänge von $0,65 \text{ \AA}$. Dem experimentellen Wert von $\frac{V_{180}}{V_{90}} = 1,76$ steht gegenüber der theoretische Wert 1,7. Auch für die Inzidenzstrahlung ($\vartheta = 0$ bis 90°) sind die Messungen im Einklang mit der theoretischen Kurve, wenngleich eine genaue Vergleichung durch die Verwendung nicht homogener Primärstrahlung und durch das Fehlen der Messungen für kleine Winkel unmöglich gemacht wird.

1) Crowther, Proc. Roy. Soc. 85. S. 29. 1911.

Räumlicher Mittelwert der Streuung.

Für den räumlichen Mittelwert der Streuung ergibt sich in bekannter Weise:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{V} = \frac{4\pi^4 N}{\mu^4 v^4} & \left[\frac{13}{3} + 2 F(a_1) + 16 F(2,36 a_1) + 32 F(3,1 a_1) \right. \\ & + 16 F(4,4 a_1) + 16 F(5,75 a_1) + 8 F(6,2 a_1) \\ & \left. + 60 F(22 a_1) + 6 F(38,5 a_1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Kurve Nr. 1 in Fig. 9 zeigt \bar{V} in Abhängigkeit von $a_1 = \frac{8\pi a}{\lambda}$. Die gestrichelten Ordinaten entsprechen den Wellenlängen $\lambda = 2,2 \cdot 10^{-8}$ cm (A_1) und $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-8}$ cm (B_1). Zum Ver-

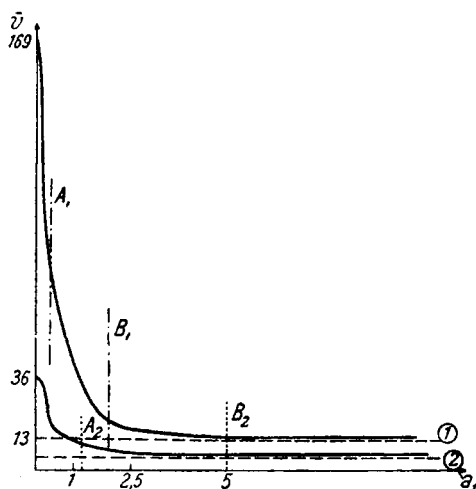


Fig. 9.

gleich ist \bar{V} für das Kohlenstoffatom (Kurve 2) im gleichen Maßstabe eingetragen; das Spektralgebiet $\lambda = 2,2 \text{ \AA.}$ bis $0,56 \text{ \AA.}$ ist begrenzt durch die Ordinaten A_2 und B_2 . Aus der Fig. 9 läßt sich zweierlei entnehmen: 1. daß der Abfall von \bar{V} um so größer wird, je größer die Elektronenzahl des Atomes ist¹⁾, und 2. daß infolge Abnahme des Radius des innersten Ringes mit wachsendem Z der Spektralbezirk, in dem die experimentellen Streustrahlenuntersuchungen vorgenommen wurden, immer mehr in das Gebiet des Steilabfalls verlagert ist. Hieraus folgt,

1) Dies folgt auch aus den Grenzesetzen (§ 1) für lange und kurze Wellen.

daß der Massenstreuoeffizient der Elemente um so mehr mit der Wellenlänge variieren muß, je mehr Elektronen das Atom enthält, und zwar so, daß s/ρ mit abnehmender Wellenlänge ebenfalls abnimmt. Eine Bestätigung für diese Schlüsse liefern die Messungen von Barkla-Dunlop.¹⁾ Im Intervall von $\lambda = 1$ bis $\lambda = 0,3 \text{ \AA}$. etwa nimmt s/ρ für Silber im Verhältnis 1:4 (für Zinn 1:5,55) ab.

Die Theorie liefert für das Aluminiumatom eine starke Abhängigkeit des räumlichen Mittelwertes der Streuung von der Wellenlänge der Primärstrahlung, und zwar für beide Fälle der Atomstruktur. (Kurve 1 in Fig. 9 erleidet eine kaum merkliche Änderung, wenn an Stelle der Besetzungszahlen $p = 2$, $p = 8$, $p = 3$ die Annahme $p = 3$, $p = 9$, $p = 1$ der Berechnung zugrunde gelegt wird.) An Messungen des Massenstreuoeffizienten des Aluminiums liegen folgende Arbeiten vor: Barkla und Sadler²⁾ geben an, daß sowohl für $\lambda = 2,2 \text{ \AA}$. (Eigenstrahlung des Chroms) als auch für $\lambda = 0,56 \text{ \AA}$. (Eigenstrahlung des Silbers) $s/\rho = 0,2$ ist. Es ist demnach $\bar{V}_{A_1} : \bar{V}_{B_1} = 1:1$, während sich aus Fig. 9 der Wert 1:4 ergibt. Daß diese Barklaschen Werte keine große Genauigkeit besitzen, darf als sicher gelten. Über den Weg, auf dem die Resultate erhalten wurden, ist in der betreffenden Arbeit³⁾ nichts angegeben. Da genaue Ausmessungen der azimutalen Intensitätsverteilungskurven erst einige Jahre später veröffentlicht wurden, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Intensität unter einem bestimmten Winkel gemessen und hieraus mittels des Thomsonschen Gesetzes (vgl. § 2) s/ρ berechnet wurde.

Eine genaue Bestimmung von Crowther⁴⁾ unter Aufnahme der azimutalen Verteilungskurve ergibt für die nicht homogene Strahlung einer weichen Röntgenröhre $\frac{s}{\rho} = 0,29$. Das Energiemaximum der benutzten Primärstrahlung liegt zwischen $\lambda = 0,5 \text{ \AA}$. und $\lambda = 1,0 \text{ \AA}$; hierfür liefert die Theorie

1) Barkla-Dunlop, Phil. Mag. 31. S. 232. 1916.

2) Barkla u. Sadler, Phil. Mag. 17. S. 735. 1909.

3) Die betr. Tabelle steht in einer Arbeit über Absorptionsmessungen und dient dort zu Korrektionszwecken.

4) Crowther, Proc. Roy. Soc. 86. S. 478. 1912. Der frühere, viel zu große Wert 1,18 (Proc. Roy. Soc. 85. S. 29. 1911) wird durch diese neuere Arbeit desselben Verfassers aufgehoben.

$\frac{s}{\rho} = 0,26$ bzw. $0,55$, so daß der experimentelle Wert innerhalb dieser Grenzen liegt.

Im wesentlichen sind somit die vorliegenden Messungen im Einklang mit der Theorie; dagegen bedarf die Frage, ob der von der Theorie geforderte Anstieg von s/ρ mit wachsender Wellenlänge wirklich vorhanden ist, dringend einer experimentellen Klärung. Bisher stützt sich der Einwand auf ein einziges Meßresultat von zweifelhafter Sicherheit.¹⁾ Eine Bestätigung dieser Unstimmigkeit wäre in doppelter Hinsicht von großer Wichtigkeit:

1. Da, wie oben erwähnt, auch bei einer anderen Wahl der Besetzungszahlen der Elektronenringe die starke Wellenlängenabhängigkeit von s/ρ bestehen bleibt, so müßten prinzipielle Änderungen an den Vorstellungen vom Atombau vorgenommen werden, etwa in dem Sinne, daß die Anordnung der Elektronen in Form eines komplanaren Ringsystems aufgegeben werden muß. Die befriedigende Übereinstimmung beim Kohlenstoffatom läßt vermuten, daß bei den aus wenigen Elektronen bestehenden Atomen, soweit es sich um Berechnung der Streuwirkung handelt, die Ringvorstellung jedenfalls näherungsweise gültig bleiben wird.

2. Gewisse Bedenken²⁾ gegen die Richtigkeit der bisherigen Dispersionstheorie lassen es zweifelhaft erscheinen, ob es gelingen kann, ausschließlich mit den Mitteln der klassischen Elektrodynamik die Streuwirkung der Atome in vollem Umfange theoretisch zu beherrschen. In dieser Richtung liegt wohl auch die Erklärung für das Versagen der Debyeschen Theorie in einem Gebiet, in dem die Voraussetzungen derselben gerade am besten erfüllt sind, nämlich bei den ganz kurzen Wellen.³⁾

Stuttgart, Juli 1920,

Röntgenlaboratorium an der Techn. Hochschule.

1) Betreffs der Bedenken gegen die experimentelle Begründung des Barklaschen Gesetzes, daß der Massenstreuoeffizient für leichte Stoffe von der Härte unabhängig, einen universellen Wert besitzt, vgl. oben § 2.

2) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, S. 533.

3) Für γ -Strahlen ist s/ρ erheblich kleiner als der kleinste theoretisch mögliche Wert 0.2.

(Eingegangen 12. Juli 1920.)