38.

Einfacher Beweis der von Cauchy und Euler gefundenen Sätze von Figurennetzen und Polyëdern.

(Von Herrn Dr. *J. A. Grunert* zu Torgau.)

In einem Netze geradliniger Figuren, welche in einer Ebene liegen oder nicht, sei die Anzahl sämmtlicher Seiten $= A$, die Anzahl der Eckpuncte $= S$, und die Anzahl der Figuren $= F$. Es kommt darauf an, zwischen diesen Gröfsen eine Gleichung zu finden. Zu dem Ende denke man sich, dafs zu dem Netze eine neue Figur von n Seiten hinzukomme, welche mit dem Netze n' Seiten gemein, n'' Seiten dagegen nicht gemein habe, wo aber immer $n = n' + n''$. Bezeichnet man nun in Bezug auf das neue Netz durch A', S', F' dasselbe, was A, S, F in Bezug auf das gegebene bedeuten, so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen: $A' = A + n''$, $F' = F + 1$. Zugleich aber ist auch klar, dafs die hinzukommende Figur, welche n' Seiten mit dem gegebenen Netze gemein hat, $n' + 1$ Eckpuncte mit demselben gemein, also $n'' - 1$ Eckpuncte nicht mit demselben gemein hat, da $n = n' + n'' = (n' + 1) + (n'' - 1)$. Also ist $S' = S + n'' - 1$. Bestimmt man nun aus den erhaltenen Gleichungen n'' auf doppelte Art, und setzt $1 = F' - F$, so erhält man:

$$A' - A = S' - S + F' - F, \text{ oder}$$
$$S' + F' - A' = S + F - A,$$

woraus also erhellet, dafs $S + F - A$ für jedes Netz eine constante Gröfse ist. Für ein aus einer einzigen Figur bestehendes Netz ist nun immer $S = A$, $F = 1$. Also $S + F - A = 1$, und folglich allgemein $S + F - A = 1$, oder $S + F = A + 1$, welches der bekannte, von Cauchy gefundene Satz ist.

Der Eulersche Satz folgt hieraus unmittelbar. Nimmt man nemlich auf eine Seitenfläche eines Polyëders mit F Seitenflächen, A Kanten, S Ecken, nicht Rücksicht, so hat man ein Netz mit $F - 1$ Figuren, A Seiten, S Eckpuncten, und folglich $S + F - 1 = A + 1$; also $S + F = A + 2$, die Eulersche Gleichung.