

Über Dreiecks- und Vieleckssysteme als Träger der Kurve dritter Ordnung.

Von Dr. Hermann Oppenheimer, Neustadt a. H. (Rheinpfalz).

Einleitung.

Denken wir uns in bekannter Weise die Punkte einer C_3 durch Parameter elliptischer Funktionen dargestellt, derart, daß einem Wendepunkte der Parameter 0 zukommt, und seien die Parameter der Eckpunkte irgend eines der C_3 eingeschriebenen Dreiecks ABC bzw. a, b, c ; ist nun K irgend ein Punkt der C_3 mit dem Parameter k , so liefern die dritten Schnittpunkte der Geraden AK, BK, CK mit der C_3 ein weiteres Dreieck $A'_k B'_k C'_k$ mit bzw. den Parametern $-(a+k), -(b+k), -(c+k)$; projizieren wir dieses Dreieck $A'_k B'_k C'_k$ wieder von einem Punkte der C_3 , am einfachsten von dem Wendepunkte mit dem Parameter 0 aus, so erhalten wir das Dreieck $A_k B_k C_k$ mit den Parametern der Eckpunkte bzw. $a+k, b+k, c+k$ (und beliebigen Vielfachen der Periodizitätsmoduln). Lassen wir nun den Projektionspunkt K sich auf der Kurve entlang bewegen, so bekommen wir ein System von Dreiecken $A_k B_k C_k$, die sich mit den Punkten der C_3 in eine vollständige Analogie bringen lassen; ja mehr noch als das: ich werde zeigen, daß die Mannigfaltigkeit der Punkte der C_3 einen speziellen Fall eines Systems von Dreiecken der geschilderten Art darstellt.

Die Beziehungen und Sätze, zu denen ein solches System von Dreiecken $A_k B_k C_k$ Anlaß gibt, und ihre Vergleichung mit den bekannten Punktsätzen der C_3 sind der Gegenstand der nachfolgenden Arbeit; den Schluß derselben bildet eine kurze Erörterung der Vieleckssysteme, die eine gleiche Verwertung wie die eben genannten Dreieckssysteme zulassen.

1. Wir wollen ein solches Dreieck $A_k B_k C_k$ mit bzw. den Parametern $a+k, b+k, c+k$ den „Tripelpunkt k “ nennen. Verbinden wir nun zwei solche Tripelpunkte k_1 und k_2 , so geben sie in folgender eindeutiger Weise Anlaß zu einem weiteren Tripelpunkte k_3 : Es ist $-(a+k_1+b+k_2) \equiv -(b+k_1+a+k_2) \pmod{\omega, \omega'}$, wenn ω und ω' die beiden Moduln der Kurve sind;

ebenso $-(b + k_1 + c + k_2) \equiv -(b + k_2 + c + k_1)$; $-(c + k_1 + a + k_2) \equiv -(c + k_2 + a + k_1)$, d. h. $A_{k_1} B_{k_2}$ und $A_{k_2} B_{k_1}$ schneiden sich in demselben Punkte C_{k_3} der Kurve, $B_{k_1} C_{k_2}$ und $B_{k_2} C_{k_1}$ in demselben Punkte A_{k_3} , $C_{k_1} A_{k_2}$ und $C_{k_2} A_{k_1}$ in demselben Punkte B_{k_3} . Man erhält also in eindeutiger Weise aus den beiden Dreiecken $A_{k_1} B_{k_2} C_{k_3}$ und $A_{k_2} B_{k_1} C_{k_3}$, die dem Dreieckssystem $(a + k, b + k, c + k)$ angehören, das Dreieck $A_{k_3} B_{k_3} C_{k_3}$. Dabei ist z. B. das Punktpaar $A_{k_3} - B_{k_3}$ die Projektion des Punktpaares $A_{k_1} - B_{k_2}$ von C_{k_1} aus oder die Projektion des Punktpaares $A_{k_2} - B_{k_1}$ von C_{k_2} aus u. s. w.

2. Es ist nun leicht zu erkennen, daß das Dreieck $A_{k_3} B_{k_3} C_{k_3}$ ebenfalls ein Tripelpunkt, d. h. in dem System der Dreiecke $(a + k, b + k, c + k)$ enthalten ist. Die Parameter seiner Eckpunkte sind, wie wir gesehen haben, $-(b + k_1 + c + k_2)$, $-(c + k_1 + a + k_2)$, $-(a + k_1 + b + k_2)$ oder, wenn wir $a + b + c$ jedesmal addieren und subtrahieren: $a - [a + b + c + k_1 + k_2]$, $b - [a + b + c + k_1 + k_2]$, $c - [a + b + c + k_1 + k_2]$. Dieser Form der Parameter sieht man sofort an, daß das Dreieck unserem System angehört. Gleichzeitig ergibt sich folgender Satz: Verbinden wir zwei Tripelpunkte k_1 und k_2 miteinander, so ergibt sich in eindeutiger Weise der Tripelpunkt $k_3 = -(a + b + c + k_1 + k_2)$. Die Ähnlichkeit dieses Ergebnisses mit dem Ergebnis der Verbindung einfacher Punkte liegt auf der Hand; die Übereinstimmung in der Form läßt sich, wie wir später sehen werden, dadurch zu einer vollständigen machen, daß wir als Ausgangsdreieck ABC ein solches ausfindig machen, dessen Eckpunktparametersumme $a + b + c = 0$ ist. Mit Rücksicht auf diese Ähnlichkeit können wir uns auch so ausdrücken: Die drei Tripelpunkte k_1, k_2, k_3 liegen auf einer Tripelgeraden.

3. Sind die beiden Tripelpunkte k_1 und k_2 unendlich benachbart, ist also $k_1 = k_2$, so ist der dritte Tripelpunkt k_3 der Verbindungslinie von k_1 und k_2 der Tangentialpunkt von k_1 ; er hat demnach den Parameter $-(a + b + c + 2k_1)$. Betrachten wir nun wieder das Dreieck $A_{k_1} B_{k_1} C_{k_1}$ und das unendlich benachbarte $A_{k_2} B_{k_2} C_{k_2}$, so wird, wie wir in (2) gesehen haben, dieser Tangentialpunkt geliefert durch die Geraden $A_{k_1} B_{k_2}$, $B_{k_1} C_{k_2}$, $C_{k_1} A_{k_2}$ oder wegen des Zusammenfallens von k_1 und k_2 durch $A_{k_1} B_{k_1}$, $B_{k_1} C_{k_1}$ und $C_{k_1} A_{k_1}$. Man erhält also zu einem Tripelpunkte k_1 den Tangentialpunkt k'_1 , wenn man die dritten Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $A_{k_1} B_{k_1} C_{k_1}$ bestimmt. Es hat nun auch keine Schwierigkeit, umgekehrt zu einem Tripelpunkte k' die vier Tripelpunkte zu bestimmen, von denen er Tangentialpunkt ist; ist x einer derselben, dann ist also $-(a + b + c + 2x) + p\omega + p'\omega' = k'$ (wobei p und p' beliebige ganze Zahlen sind); also ist

$$x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega' - k'}{2};$$

der Ausdruck bestätigt, daß es vier Punkte x gibt, eine Tatsache, die sich ja auch schon daraus ergibt, daß es bekanntlich vier einer C_3 einbeschriebene Dreiecke gibt, die einem anderen der C_3 einbeschriebenen Dreieck umschrieben sind. In unserem Falle erhält man die vier Tripelpunkte, wenn man in dem Ausdruck für x p und p' bezw. $= 0$ und $= 1$ setzt. Die vier Parameter sind also:

$$\begin{aligned} & -\frac{a+b+c}{2} + \frac{k'}{2}, \quad -\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega}{2}, \\ & -\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad -\frac{a+b+c}{2} - \frac{k'}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}. \end{aligned}$$

Die Analogie mit der diesbezüglichen Theorie der einfachen Punkte springt wieder in die Augen.

4. Wir ersehen aus den Parametern der vier Tripelpunkte, die denselben Tangentialpunkt haben, auch, daß es drei Systeme konjugierter Tripelpunktpaare gibt. Dem Tripelpunkt $-\frac{a+b+c+k'}{2}$ muß man bezw. $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega + \omega'}{2}$ hinzufügen, um jedesmal einen konjugierten Tripelpunkt zu bekommen. Zu einem beliebigen Tripelpunkte k_n gehören also die konjugierten Punkte $k_n + \frac{\omega}{2}$, $k_n + \frac{\omega'}{2}$, $k_n + \frac{\omega + \omega'}{2}$. Nehmen wir zwei konjugierte Tripelpunktpaare desselben Systems k_n , $k_n + \frac{\omega}{2}$ und k_m , $k_m + \frac{\omega}{2}$, so ist es vielleicht von Interesse, den Parallelismus in dem Verhalten zweier solcher Tripelpunktpaare zu dem zweier gewöhnlicher konjugierter Punktpaare desselben Systems noch einmal durch Konstruktion ersichtlich zu machen. k_m und k_n liefern als dritten Punkt der Tripelgeraden, zu der sie gehören, wie wir gesehen haben, den Tripelpunkt $-(a+b+c+k_n+k_m)$; ebenso ergeben aber auch die Tripelpunkte $k_m + \frac{\omega}{2}$ und $k_n + \frac{\omega}{2}$, wenn wir sie verbinden, als dritten Tripelpunkt $-(a+b+c+k_n+k_m + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2}) \equiv -(a+b+c+k_n+k_m) \pmod{\omega, \omega'}$, d. h. denselben Punkt; anderseits liefern k_m und $k_n + \frac{\omega}{2}$ den dritten Tripelpunkt $-(a+b+c+k_m+k_n + \frac{\omega}{2})$, ebenso wie k_n und $k_m + \frac{\omega}{2}$.

Wenn wir von der symbolischen Darstellungsweise absehen, so heißt das also: Die Dreiecke $A_{k_n} B_{k_n} C_{k_n}$ und $A_{k_m} B_{k_m} C_{k_m}$ liefern

dasselbe dritte Dreieck wie die Dreiecke $A_{k_n + \frac{\omega}{2}} B_{k_n + \frac{\omega}{2}} C_{k_n + \frac{\omega}{2}}$ und $A_{k_m + \frac{\omega}{2}} B_{k_m + \frac{\omega}{2}} C_{k_m + \frac{\omega}{2}}$, ebenso liefert das Dreieckpaar $A_{k_n} B_{k_n} C_{k_n}$ und $A_{k_m + \frac{\omega}{2}} B_{k_m + \frac{\omega}{2}} C_{k_m + \frac{\omega}{2}}$ dasselbe Dreieck wie das Dreieckpaar $A_{k_m} B_{k_m} C_{k_m}$ und $A_{k_n + \frac{\omega}{2}} B_{k_n + \frac{\omega}{2}} C_{k_n + \frac{\omega}{2}}$. Dabei bedeutet das Dreieck $A_{k_n} B_{k_n} C_{k_n}$ den Tripelpunkt k_n u. s. w.

Es lassen sich nun alle anderen Eigenschaften konjugierter Punktpaare auf unsere Tripelpunktpaare übertragen. Ist z. B. k_m und $k_m + \frac{\omega}{2}$ wieder ein solches Paar konjugierter Tripelpunkte, so ist der dritte Schnittpunkt k_m'' ihrer Verbindungslinie $= -(a + b + c + 2k_m) + \frac{\omega}{2}$; anderseits ist der Tangentialpunkt von k_m und $k_m + \frac{\omega}{2}$, $k_m' = -(a + b + c + 2k_m)$; k_m und k_m'' sind also wieder zwei konjugierte Tripelpunkte.

5. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung eines Tripelwendepunktes und eines Systems solcher Punkte festsetzen.

Ein Tripelwendepunkt ist ein Tripelpunkt, der mit seinem Tangentialpunkte zusammenfällt. Daraus ergibt sich, wenn k_w ein solcher Tripelpunkt ist, die Bedingung: $k_w = -(a + b + c + 2k_w) + p\omega + p'\omega'$, wo p und p' ganze Zahlen bedeuten; also $3k_w = -(a + b + c) + p\omega + p'\omega'$: $k_w = -\frac{a + b + c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}$.

Wir sehen, unser System enthält neun Tripelwendepunkte; wir erhalten sie, wenn wir in dem Ausdrucke für k_w p und p' je $= 0, 1, 2$ setzen, ganz wie bei dem Parameterausdruck für die gewöhnlichen Wendepunkte. Welche geometrische Eigenheit kommt nun einem solchen Tripelwendepunkte zu, z. B. dem Tripelwendepunkte

$-\frac{a + b + c}{3}$, den wir aus dem Kollektivausdrucke für die Wendepunkte erhalten, wenn wir p und $p' = 0$ setzen. Dieser Wendepunkt $-\frac{a + b + c}{3}$ wird gebildet von den drei Punkten, deren Parameter bezw. $a - \frac{a + b + c}{3}$, $b - \frac{a + b + c}{3}$, $c - \frac{a + b + c}{3}$

sind; es ist aber:

$$a - \frac{a + b + c}{3} + b - \frac{a + b + c}{3} + c - \frac{a + b + c}{3} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'};$$

also: In dem System der Tripelpunkte sind diejenigen Tripelwendepunkte, deren drei Punkte in eine Gerade hineinfallen.

In der Tat fällt ja ein solcher Tripelpunkt mit seinem Tangentialpunkte zusammen.

Der Kollektivausdruck für die neun Tripelwendepunkte $k_w = \frac{-(a+b+c) + p\omega + p'\omega'}{3}$ läßt erkennen, daß man, wenn einer der Tripelpunkte, etwa $-\frac{a+b+c}{3}$, gegeben ist, in folgender Weise die anderen konstruieren kann: Projizieren wir die drei Punkte $a - \frac{a+b+c}{3}$, $b - \frac{a+b+c}{3}$, $c - \frac{a+b+c}{3}$ von einem Wendepunkte aus, z. B. dem Wendepunkte 0, so erhalten wir $\frac{a+b+c}{3} - a$, $\frac{a+b+c}{3} - b$, $\frac{a+b+c}{3} - c$. Projizieren wir sodann diese drei Punkte von sämtlichen Wendepunkten aus, deren Parameter in dem Ausdrucke $\frac{p\omega + p'\omega'}{3}$ enthalten sind, so erhalten wir die sämtlichen Tripelwendepunkte

$$a - \frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b - \frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \\ c - \frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}.$$

Es ist selbstverständlich, daß die Sätze, die die gegenseitige Lage der eigentlichen Wendepunkte zum Gegenstande haben, sich ohne weiteres auf das System der Tripelwendepunkte übertragen lassen. Zwei derselben liegen z. B. immer auf einer Tripelgeraden, die noch einen dritten enthält. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß eine beliebige Gerade G der Ebene auf der C_3 die Punkte eines Tripelwendepunktes ausschneidet und so Veranlassung gibt zu einer Konfiguration, die der Wendepunktskonfiguration vollkommen analog ist.

6. Wir wollen drei in einer Geraden liegende Tripelwendepunkte betrachten, z. B.:

$$(1) a - \frac{a+b+c}{3}, \quad b - \frac{a+b+c}{3}, \quad c - \frac{a+b+c}{3}; \\ (2) a - \frac{a+b+c}{3} - \frac{\omega}{3}, \quad b - \frac{a+b+c}{3} - \frac{\omega}{3}, \quad c - \frac{a+b+c}{3} - \frac{\omega}{3}; \\ (3) a - \frac{a+b+c}{3} - \frac{2\omega}{3}, \quad b - \frac{a+b+c}{3} - \frac{2\omega}{3}, \quad c - \frac{a+b+c}{3} - \frac{2\omega}{3}.$$

Die drei Punkte von (1) seien der Reihe nach die Punkte A_1, B_1, C_1 ; die von (2) A_2, B_2, C_2 ; die von (3) A_3, B_3, C_3 . Dann liegen A_1, B_2, C_3 auf einer Geraden, ebenso B_1, C_2, A_3 und C_1, A_2, B_3 , wie sich durch Addition der Parameter unmittelbar ergibt; ebenso aber auch A_1, C_2, B_3 ; B_1, A_2, C_3 und C_1, B_2, A_3 .

Der C_3 -Büschel ($A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3$) enthält also drei Kurven, die in drei Gerade zerfallen.

Es ist noch bemerkenswert, daß ein Tripelpunktsystem ($a+k, b+k, c+k$) ein eindeutig bestimmtes System von neun Wendepunkten

$$\left(a - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}, \quad b - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}, \quad c - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \right)$$

hat, ganz unabhängig von der Wahl des Ausgangstripelpunktes innerhalb des Systems. Setzen wir z. B. $a+k=a', b+k=b', c+k=c'$ und denken uns unsere Dreiecksmannigfaltigkeit durch die drei Parameter $a'+s, b'+s, c'+s$ gegeben, wobei s variabel ist, nehmen also a', b', c' als den Ausgangstripelpunkt, so ist das System der neun Wendetripelpunkte gegeben durch die Parameterausdrücke

$$\begin{aligned} a' - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3}, \quad b' - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3}, \\ c' - \frac{a'+b'+c'+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{aligned}$$

drücken wir nun aber a', b', c' durch a, b, c aus, so gehen diese Ausdrücke über in:

$$\begin{aligned} a+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} &= a - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ b+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} &= b - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ c+k - \frac{a+k+b+k+c+k+p\omega+p'\omega'}{3} &= c - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}, \end{aligned}$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

7. Spezielle Fälle. Nehmen wir an Stelle der drei Ausgangspunkte a, b, c drei unendlich benachbarte Punkte an, so ergibt sich ein Tripelpunktsystem, das mit dem gewöhnlichen Punktsystem identisch ist; in der Tat ergeben sich aus unserem Ausdrucke für die Tripelwendepunkte die gewöhnlichen Wendepunkte, wenn wir $a=b=c$ setzen. Das System der einfachen Punkte der C_3 ist also als spezieller Fall in unserer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von Tripelpunktsystemen enthalten — daß diese Mannigfaltigkeit zweifach unendlich ist, kann man am einfachsten an der schon erwähnten Tatsache erkennen, daß jede Gerade der Ebene einen Tripelwendepunkt eines solchen Systems liefert.

Bemerkenswert sind noch vier andere Tripelpunktsysteme, die Systeme der sogenannten Punkttripel, die ich bei verschiedenen Gelegenheiten „merkwürdige Dreiecke“ genannt habe; es sind

$$\text{dies die Systeme } \left(k, \frac{\omega}{3} + k, \frac{2\omega}{3} + k\right), \left(k, \frac{\omega'}{3} + k, \frac{2\omega'}{3} + k\right), \\ \left(k, \frac{\omega + \omega'}{3} + k, \frac{2\omega + 2\omega'}{3} + k\right), \left(k, \frac{\omega + 2\omega'}{3} + k, \frac{2\omega + \omega'}{3} + k\right),$$

wobei k der veränderliche Parameter ist. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie Tripelpunkte enthalten, die aus drei in einer Geraden liegenden einfachen Wendepunkten bestehen; wir haben für jedes der vier Systeme denjenigen Tripelwendepunkt als Ausgangspunkt gewählt, der den Wendepunkt 0 enthält. Ein Dreieck eines

solchen Systems — $k, \frac{\omega}{3} + k, \frac{2\omega}{3} + k$ — hat bekanntlich die Eigenschaft, daß der dritte Schnittpunkt einer Seite zugleich der Tangentialpunkt des dritten Eckpunktes ist: Der dritte Schnittpunkt der Geraden $\left(k, \frac{\omega}{3} + k\right)$ z. B. ist $-2k - \frac{\omega}{3}$ und der

Tangentialpunkt des dritten Eckpunktes $\frac{2\omega}{3} + k$ ist $= -2k - \frac{4\omega}{3} \equiv -2k - \frac{\omega}{3} \pmod{\omega}$, also derselbe Punkt. Man kann

also zu einem Tripelpunkt entweder auf die gewöhnliche Weise, durch Bestimmung der dritten Schnittpunkte der Seiten, den Tangentialpunkt bestimmen oder indem man zu den drei Eckpunkten ihre Tangentialpunkte zeichnet. Diese doppelte Möglichkeit der Konstruktion eines Tangentialtripelpunktes ist nur eine Konsequenz der Lage von drei in einer beliebigen Tripelgeraden liegenden Tripelpunkten. Sind $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, a_3 b_3 c_3$ drei in einer solchen Geraden liegende Tripelpunkte unseres Systems $\left(k, \frac{\omega}{3} + k, \frac{2\omega}{3} + k\right)$,

so sind immer zwei von ihnen dreifach perspektivisch, derart, daß die Eckpunkte des dritten die zugehörigen Projektionszentren sind. Es existieren nämlich außer den Verbindungslinien, die bei den Punkten jeder Tripelgeraden vorhanden sind, noch die Geraden $a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, c_1 c_2 c_3$. Man erkennt das sofort, wenn man die Dreiecke durch die Parameter ausdrückt:

$$\text{die von } a_1, a_2, a_3 \text{ seien bezw. } k_1, \frac{\omega}{3} + k_1, \frac{2\omega}{3} + k_1 \\ \text{„ „ } b_1, b_2, b_3 \text{ „ „ } k_2, \frac{\omega}{3} + k_2, \frac{2\omega}{3} + k_2; \text{ dann sind} \\ \text{„ „ } c_1, c_2, c_3 \text{ — } (k_1 + k_2), \frac{\omega}{3} - (k_1 + k_2), \frac{2\omega}{3} - (k_1 + k_2).$$

Es ist alsdann

$$k_1 + k_2 - (k_1 + k_2) \equiv 0$$

$$\frac{\omega}{3} + k_1 + \frac{\omega}{3} + k_2 + \frac{\omega}{3} - (k_1 + k_2) \equiv 0$$

$$\frac{2\omega}{3} + k_1 + \frac{2\omega}{3} + k_2 + \frac{2\omega}{3} - (k_1 + k_2) \equiv 0.$$

Anmerkung. Bei einem beliebigen Ausgangstripelpunkt abc ist ja, wenn k_1, k_2, k_3 einer Tripelgeraden angehören, $k_3 \equiv -(a + b + c + k_1 + k_2)$; in unserem Falle ist aber $a + b + c = 0 + \frac{\omega}{3} + \frac{2\omega}{3} \equiv 0 \pmod{\omega}$. —

Der Umstand nun, daß einerseits die Verbindungslinie $a_1 a_2$ zu dem dritten einfachen Punkt a_3 führt, anderseits die Linien $a_1 a_2, b_1 b_2, c_1 c_2$ durch ihre dritten Schnittpunkte den Tripelpunkt $a_3 b_3 c_3$ liefern, von dem derselbe einfache Punkt a_3 auch wieder ein Eckpunkt ist, läßt sich in folgendem Satze aussprechen:

Dieselben Punktgruppen, auf die die Sätze der C_3 sich unmittelbar beziehen, sind zugleich Teile von größeren Punktgruppen, auf die dieselben Sätze Anwendung finden, aber bei der übertragenen Bedeutung der Bezeichnungen „Punkt“ und „Gerade“ als „Tripelpunkt“ und „Tripelgerade“.

Ich will zwei kleine Beispiele dafür geben.

1. Sind a_{11}, a_{21} und b_{11}, b_{21} zwei konjugierte Punktpaare desselben Systems, so liefern die Geraden $a_{11} b_{11}$ und $a_{21} b_{11}$ ein weiteres konjugiertes Punktpaar $c_{11} c_{21}$, dasselbe, das auch die Geraden $a_{11} b_{21}$ und $a_{21} b_{21}$ liefern. Sind aber diese Punkte $a_{11}, a_{21}, b_{11}, b_{21}$ Eckpunkte von Tripelpunkten unseres Systems: 1. $a_{11} a_{12} a_{13}$; 2. $a_{21} a_{22} a_{23}$; 3. $b_{11} b_{12} b_{13}$; 4. $b_{21} b_{22} b_{23}$, so sind 1 und 2, 3 und 4 auch konjugierte Tripelpunktpaare und die Verbindungslinien 1, 3 und 1, 4 liefern, ebenso wie die Verbindungslinien 2, 3 und 2, 4 das weitere konjugierte Punktpaar $c_{11} c_{12} c_{13}$ und $c_{21} c_{22} c_{23}$, von dem die einfachen konjugierten Punkte c_{11} und c_{21} wieder Bestandteile sind.

2. Ist $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}$ ein Quadrupel von Berührungspunkten von vier von einem Punkte b_1 der C_3 ausgehenden Tangenten, so liegen bekanntlich diese vier Berührungspunkte auf einer C_2 , die die C_3 in b_1 berührt. Zugleich sind aber diese fünf Punkte $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, b_1$ Eckpunkte von fünf Tripelpunkten unseres Systems $a_{11} a_{12} a_{13}, a_{21} a_{22} a_{23}, \dots, b_1 b_2 b_3$, kurz mit $a_{11} \dots, a_{21} \dots, a_{31} \dots, a_{41} \dots, b_1 \dots$ bezeichnet, es ist nun auch $b_1 \dots$ der Tangentialpunkt der vier erstgenannten Tripelpunkte, ebenso wie b_1 der Tangentialpunkt von $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ ist. Es liegen ferner auch die vier Tripelpunkte $a_{11} \dots, a_{21} \dots, a_{31} \dots, a_{41} \dots$ auf einem Tripelkegelschnitt, der außerdem noch die C_3 in den drei Punkten des

Tangentialtripelpunktes $b_1 \dots$ berührt. — Daß der Tripelkegelschnitt eine C_6 ist, werden wir in (8) sehen. Also:

$$a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, b_1, b_1$$

liegen auf einem Kegelschnitte;

$$a_{11} \dots, a_{21} \dots, a_{31} \dots, a_{41} \dots, b_1 \dots, b_1 \dots$$

liegen auf einem Tripelkegelschnitte.

Unsere vier merkwürdigen Systeme zeichnen sich aber auch noch in anderer Beziehung aus. Nehmen wir das System $\left(k, \frac{\omega}{3} + k, \frac{2\omega}{3} + k\right)$, das einzige reelle von den vierten, und bestimmen seine Tripelwendepunkte, so ist, wie man unmittelbar erkennt, ein Tripelwendepunkt $o, \frac{\omega}{3}, \frac{2\omega}{3}$; ein zweiter ist

$$\frac{\omega'}{3}, \frac{\omega}{3} + \frac{\omega'}{3}, \frac{2\omega}{3} + \frac{\omega'}{3}; \text{ ein dritter } \frac{2\omega'}{3}, \frac{\omega}{3} + \frac{2\omega'}{3}, \frac{2\omega}{3} + \frac{2\omega'}{3}.$$

Auf diese drei scheint sich diesmal die Zahl der Tripelwendepunkte zu beschränken; dem ist aber in Wirklichkeit nicht so. Um das zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Natur eines Tripelwendepunktes eingehen. Als einen solchen erkannten wir einen Tripelpunkt, dessen drei Punkte in eine Gerade fallen. Offenbar muß aber auch ein solches Dreieck abc als ein Tripelwendepunkt angesehen werden, dessen drei Seiten ab, bc, ca die C_3 berühren; denn bei einem solchen Dreieck fallen ja die dritten Schnittpunkte der Seiten mit den Eckpunkten zusammen; ein solcher Tripelpunkt abc ist also auch sein eigener Tangentialpunkt. Dieser Fall eines Tripelwendepunktes brauchte bisher nicht erörtert zu werden, da ein beliebiges Tripelpunktsystem keinen solchen Wendepunkt besitzt. Die 24 um- und einbeschriebenen Dreiecke gehören vielmehr ausschließlich den vier ausgezeichneten Systemen an; jedes besitzt deren sechs. Zum Beispiel hat das reelle System folgende um- und einbeschriebene Dreiecke als weitere Tripelwendepunkte:

$$a) \frac{\omega}{9}, \frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{3} + \frac{\omega}{9}$$

oder umgestellt:

$$\frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{\omega}{3} + \frac{\omega}{9} \equiv \frac{\omega}{9}, \frac{-2\omega}{9}, \frac{+4\omega}{9}.$$

$$b) \frac{2\omega}{9}, \frac{\omega}{3} + \frac{2\omega}{9}, \frac{2\omega}{3} + \frac{2\omega}{9} \equiv \frac{2\omega}{9}, \frac{-4\omega}{9}, \frac{8\omega}{9},$$

$$c) \frac{\omega'}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{\omega'}{3} + \frac{4\omega}{9}, \frac{\omega'}{3} + \frac{7\omega}{9},$$

oder umgestellt:

$$\frac{\omega'}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{\omega'}{3} + \frac{7\omega}{9}, \frac{\omega}{3} + \frac{4\omega}{9} \equiv \frac{\omega'}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{-2\omega'}{3} - \frac{2\omega}{9}, \frac{+4\omega'}{3} + \frac{4\omega}{9}.$$

$$d) \frac{\omega'}{3} + \frac{2\omega}{9}, \frac{\omega'}{3} + \frac{5\omega}{9} \equiv -\frac{2\omega'}{3} - \frac{4\omega}{9}, \frac{\omega'}{3} + \frac{8\omega}{9}.$$

$$e) \frac{2\omega'}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{4\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{7\omega}{9},$$

oder umgestellt:

$$\frac{2\omega'}{3} + \frac{\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{7\omega}{9} \equiv -\frac{4\omega'}{3} - \frac{2\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{4\omega}{9}.$$

$$f) \frac{2\omega'}{3} + \frac{2\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{5\omega}{9} \equiv -\frac{4\omega'}{3} - \frac{4\omega}{9}, \frac{2\omega'}{3} + \frac{8\omega}{9}.$$

Nur die ersten zwei dieser sechs Tripelwendepunkte sind reell.

Im ganzen hat dieses System also auch wieder drei reelle Tripelwendepunkte: *a)* und *b)* und den Tripelwendepunkt 0, $\frac{\omega}{3}, \frac{2\omega}{3}$.

Die Konfiguration der neun Tripelwendepunkte ist im übrigen bei diesen vier Systemen genau dieselbe wie bei jedem anderen System.

Ich möchte schließlich noch ein weiteres spezielles System erwähnen, das System $(a + k, a + \frac{\omega}{2} + k, a + \frac{\omega'}{2} + k)$ mit *k* als veränderlichem Parameter. Ein Tripelpunkt dieses Systems hat die Eigenschaft, daß zwei seiner Punkte untereinander und dem dritten konjugiert sind. Die neun Tripelwendepunkte dieses Systems werden von den neun harmonischen Polaren der C_3 gebildet; diese veranlassen also ebenfalls eine Wendepunktskonfiguration.

8. Wir kehren zur allgemeinen Tripelpunkttheorie zurück. Wir haben den Tripelpunkt und die Tripelgerade in bestimmter Weise definiert; da erhebt sich nun die Frage: ist durch diese Definitionen ein bestimmter geometrischer Sinn auch für Bezeichnungen, wie Tripelkegelschnitt, ... Tripel- C_n festgelegt? Daß dieses der Fall ist und in welcher Weise, läßt sich leicht erkennen.

Sind $k_1, k_2, k_3, \dots, k_6$ die Parameter von sechs Punkten eines Kegelschnittes, so ist bekanntlich $k_1 + k_2 + \dots + k_6 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$; sollen nun diese Parameter Dreiecke bedeuten, so ist die analoge Beziehung damit gegeben, daß

$$1. \ a + k_1 + b + k_1 + c + k_1 + a + k_2 + \dots \\ + a + k_6 + b + k_6 + c + k_6 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'};$$

also

$$6(a + b + c) \equiv -3(k_1 + k_2 + \dots + k_6)$$

oder

$$2) \ k_1 + k_2 + \dots + k_6 \equiv -2(a + b + c) \pmod{\omega, \omega'}.$$

Die Gleichung 1) drückt aber aus, daß die sechs Tripelpunkte $k_1 \dots k_6$ auf einer C_6 liegen; das gleiche besagt also auch die aus 1) sich ergebende Gleichung 2) und allgemein drückt die Gleichung 3):

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{3n} \equiv -n(a + b + c)$$

aus, daß die $3n$ zu diesen Parametern gehörigen Tripelpunkte auf einer C_n liegen. Der Tripelkegelschnitt ist also eine C_6 , die Tripel C_n eine C_{3n} .

Diese Erkenntnis setzt uns in den Stand, weitere bemerkenswerte Analogien zur Theorie der einfachen Punkte aufzustellen.

Ist z. B.

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p + k_{p+1} + \dots + k_{3n} \equiv -n(a + b + c)$$

und ebenso

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p + k'_{p+1} + \dots + k'_{3n} \equiv -n(a + b + c),$$

dann ist offenbar

$$k_{p+1} + \dots + k_{3n} \equiv k'_{p+1} + \dots + k'_{3n};$$

jede Summe von p Parametern also, die $k'_{p+1} + \dots + k'_{3n}$ zu der Größe $A = -n(a + b + c) + p\omega + p'\omega'$ ergänzt, ergänzt auch die Summe $k'_{p+1} + \dots + k'_{3n}$ zu einer Größe, die sich von A nur um ein vielfaches der Periodizitätsmoduln unterscheiden kann; d. h. die Tripelpunktgruppen $k_{p+1}, k_{p+2}, \dots, k_{3n}$ und $k'_{p+1}, k'_{p+2}, \dots, k'_{3n}$ sind korresidual.

Ich will nun noch einige Anwendungen von der Gleichung 3): $k_1 + k_2 + \dots + k_{3n} = -n(a + b + c)$ geben.

a) Die harmonische Tripelpolare.

Wir haben im Abschnitt 3. zu dem Tangentialtripelpunkte k' das Quadrupel der Berührungspunkte der vier weiteren von diesem Punkt ausgehenden Tangenten bestimmt und dafür den Ausdruck gefunden: $x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2} - \frac{k'}{2}$. Ist nun k' ein Tripelpunkt, z. B. $= -\frac{a+b+c}{3}$, so erhalten wir:

$$x = -\frac{a+b+c}{2} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2} + \frac{a+b+c}{6} = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2};$$

$x_1 = -\frac{a+b+c}{3}$ fällt mit dem Tripelwendepunkte selbst zusammen.

$$x_2 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega}{2}$$

$$x_3 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega'}{2}$$

$$x_4 = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{\omega + \omega'}{2}$$

$x_2 + x_3 + x_4 = -(a+b+c)$; d. h. die drei Berührungstrippelpunkte liegen auf einer Geraden, der „harmonischen Tripelpolare“ zu dem Tripelwendepunkte $-\frac{a+b+c}{3}$.

b) Irgend eine Gerade wpq durch den Wendepunkt w schneidet bekanntlich auf der C_3 zwei Punkte p und q von der Eigenschaft aus, daß ein Kegelschnitt die C_3 in p und q je dreipunktig berührt; fallen die beiden Punkte in einen Punkt r der harmonischen Polare zusammen, so berührt eine C_2 die C_3 in r sechspunktig.

Wir wollen diesen Satz auf unser Tripelpunktsystem übertragen. Der Tripelwendepunkt w habe den Parameter $-\frac{a+b+c}{3}$, irgend eine durch ihn gelegte Tripelgerade schneide einen Tripelpunkt mit dem Parameter p aus; der dritte Schnittpunkt ist dann $q = -(a+b+c) - p + \frac{a+b+c}{3} = -\frac{2}{3}(a+b+c) - p$. Es gibt alsdann eine C_6 , die in den drei Punkten des Tripelpunktes p und in denen von q je dreifach berührt; denn es ist

$$3p + 3 \cdot \left[-\frac{2}{3}(a+b+c) - p \right] = -2(a+b+c).$$

Lassen wir nun p und q in einen Tripelpunkt r der harmonischen Tripelpolare zusammenfallen, so ist

$$6 \cdot \left(-\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2} \right) \equiv -2(a+b+c) \pmod{\omega, \omega'},$$

woraus ersichtlich ist, daß tatsächlich jeder dieser Tripelpunkte $-\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{2}$ mit seinen drei je sechsfach zu zählenden Punkten 18 Punkte ergibt, die die Schnittpunkte einer C_6 mit der C_3 sind.

10. Wir haben bisher der Lage des Ausgangsdreieckes a, b, c keine Beachtung geschenkt. Es läßt sich nun aber zeigen, daß bei entsprechender Auswahl dieses Dreieckes unsere Parametergleichungen sich einfacher gestalten. Wählen wir nämlich als solches einen Tripelwendepunkt, z. B.

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}, \quad b' = b - \frac{a+b+c}{3}, \quad c' = c - \frac{a+b+c}{3},$$

so ist

$$a' + b' + c' \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'};$$

in diesem Falle stimmen also die Parametergleichungen der Tripelpunkte mit den Parametergleichungen der einfachen Punkte überein, da ja in den ersteren die rechte Seite immer ein Vielfaches von $-(a+b+c)$ ist. Diese Übereinstimmung läßt eine bemerkenswerte geometrische Deutung zu. Betrachten wir den Tripelpunkt

$$a - \frac{a+b+c}{3} + k = a' + k, \quad b - \frac{a+b+c}{3} + k = b' + k,$$

$$c - \frac{a+b+c}{3} + k = c' + k, \quad \text{so ist } a' + k \text{ offenbar der dritte}$$

Schnittpunkt der Verbindungslinie der zwei Punkte $-a'$ und $-k$, $b' + k$, ebenso der dritte Schnittpunkt der Geraden $(-b', -k)$, $c' + k$, der dritte Schnittpunkt der Geraden $(-c', -k)$; d. h. der Tripelpunkt $a' + k$, $b' + k$, $c' + k$ wird erhalten als Projektion des Tripelwendepunktes $(-a', -b', -c')$ von dem Punkte $-k$ aus. Dieser Tripelwendepunkt gehört dem System an, das man erhält, wenn man sämtliche Tripelpunkte des gegebenen Systems $(a+k, b+k, c+k)$ von dem Wendepunkte 0 aus projiziert. Wir erhalten somit unser Tripelpunktsystem, wenn wir diesen Tripelwendepunkt $(-a + \frac{a+b+c}{3}, -b + \frac{a+b+c}{3}, -c + \frac{a+b+c}{3})$ von sämt-

lichen Punkten $-k$ der C_3 aus projizieren. Durch dieses Arrangement wird also zwischen unserem Tripelpunktsystem und dem System der einfachen Punkte der C_3 eine perspektivische Beziehung hergestellt: Die drei Punkte eines Tripelpunktes k ergeben sich als die Projektion der drei in einer Geraden liegenden Punkte $-a + \frac{a+b+c}{3}, -b + \frac{a+b+c}{3}, -c + \frac{a+b+c}{3}$; das zuge-

hörige Projektionszentrum $-k$ ist der dem Tripelpunkte k entsprechende Punkt. Liegen die drei einfachen Punkte $-k_1, -k_2, -k_3$ auf einer Geraden, dann bilden die zugehörigen Tripelpunkte k_1, k_2, k_3 eine Tripelgerade; ist $k_1 = k_2$ und $-k_3$ der Tangentialpunkt von $-k_1$, dann ist auch der zugehörige Tripelpunkt k_3 der Tangentialpunkt des Tripelpunktes k_1 u. s. w.

11. Ich will nun die Beschaffenheit einer Tripelgeraden näher untersuchen. Eine solche Tripelgerade wird offenbar von einem Büschel von C_3 veranlaßt, der zwei in je drei Geraden zerfallende Kurven hat, $l_1 l_2 l_3$ und $m_1 m_2 m_3$. Fig. 1 (s. folgende Seite) enthält drei in einer Tripelgeraden liegende Tripelpunkte:

$$\begin{array}{lll} \alpha) & a + k_1 & b + k_1 & c + k_1 \\ & a + k_2 & b + k_2 & c + k_2 \\ & a + k_3 & b + k_3 & c + k_3; \end{array}$$

jede der drei wagrechten Zeilen von α) gibt die drei einfachen Punkte, die zu einem Tripelpunkte sich zusammensetzen. Daß die drei Tripelpunkte auf einer Tripelgeraden liegen, ergibt sich daraus, daß folgende Geraden vorhanden sind (s. Fig. 1): $a + k_1$ $b + k_2$ $c + k_3$ und $a + k_1$ $b + k_3$ $c + k_2$; $b + k_1$ $a + k_2$ $c + k_3$ und $b + k_1$ $c + k_2$ $a + k_3$; $c + k_1$ $a + k_2$ $b + k_3$ und $c + k_1$ $a + k_3$ $b + k_2$ (s. § 1.).

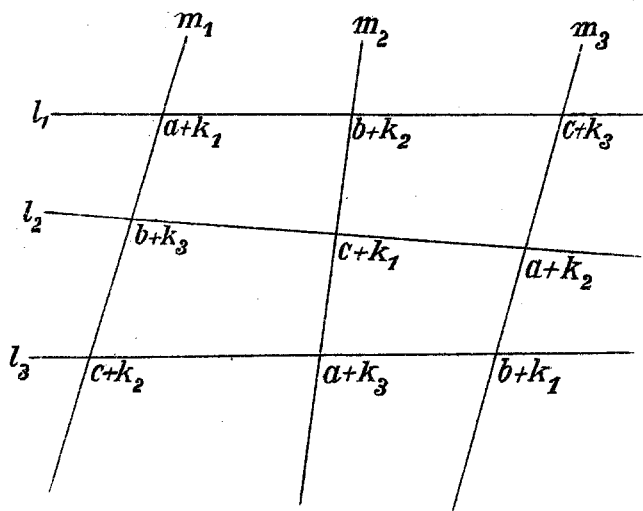


Fig. 1.

Bestimmen wir nun aber dieselben Geraden anstatt aus der Zeichnung aus dem System α), so springt beim Ablesen dieser Geraden die vollkommene Analogie mit der Auswertung einer Determinante in die Augen. Nun können bei der Berechnung einer Determinante die Vertikalreihen in gleicher Weise benützt werden wie die Horizontalreihen. Es ist daher zu vermuten, daß vielleicht auch die Vertikalreihen Tripelpunkte einer Tripelgeraden sind. In der Tat sieht man sofort, daß auch $a + k_1$ $a + k_2$ $a + k_3$, $b + k_1$ $b + k_2$ $b + k_3$, $c + k_1$ $c + k_2$ $c + k_3$ Tripelpunkte eines Tripelpunktsystems sind: Der Ausgangstripelpunkt ist k_1 k_2 k_3 , die Parameter der drei Tripelpunkte sind bezw. a , b , c . Wir wollen die zwei Geraden, die in α) enthalten sind, zwei konjugierte Gerade nennen und kommen so zu dem Satze:

Zu jeder Tripelpunktgeraden gehört eine konjugierte Gerade.

12. Fortsetzung. Die weiteren Betrachtungen, die sich hier anstellen lassen, knüpfen sich an die Wendepunkte der beiden Tripelpunktsysteme. Die Wendepunkte des ersten Systems mit dem Ausgangstripelpunkte (a, b, c) sind gegeben durch

$$\beta) -\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3};$$

die des zweiten Systems mit dem Ausgangspunkte (k_1, k_2, k_3) durch

$$\gamma) -\frac{k_1+k_2+k_3}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}.$$

Nun ist (s. Fig. 1) $a+k_1+b+k_2+c+k_3 \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$;
also

$$k_1+k_2+k_3 = -(a+b+c) + p\omega + p'\omega';$$

$$\frac{k_1+k_2+k_3}{3} = -\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3};$$

folglich kann $\gamma)$ ersetzt werden durch $\frac{a+b+c}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}$.

Die Wendepunkte des ersten Systems sind also:

$$\varepsilon) \begin{cases} a - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ b - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ c - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

die des zweiten Systems:

$$\varepsilon') \begin{cases} k_1 + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ k_2 + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ k_3 + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}. \end{cases}$$

Projizieren wir diese zwei Tripelwendepunktsysteme von dem Wendepunkte 0 aus, so erhalten wir die Wendepunktsysteme, die zu den Tripelpunktsystemen $(-a, -b, -c)$ und $(-k_1, -k_2, -k_3)$ gehören. Sie sind:

$$\varphi) \begin{cases} -a + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -b + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -c + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

$$\varphi') \left\{ \begin{array}{l} -k_1 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_2 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_3 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \end{array} \right.$$

Bilden wir nun die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien aller Punkte φ) mit allen Punkten $\varphi')$, so erhalten wir das System von Punkten

$$g) \left\{ \begin{array}{l} a+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, b+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, c+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}; \\ a+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, b+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, c+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}; \\ a+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, b+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, c+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}. \end{array} \right.$$

Das sind aber die Punkte unserer Anfangstripelgeraden und der acht weiteren Geraden, die sich ergeben, wenn wir die gegebene Tripelgerade von dem Wendepunkte 0 aus projizieren und die Projektion von den acht weiteren Wendepunkten aus wiederum projizieren.

13. Bevor ich dieses Ergebnis in einem Satze formuliere, muß ich eine Betrachtung über Tripelpunktsysteme zweiten Grades anstellen. Gerade so, wie wir irgend drei einfache Punkte a, b, c zur Herstellung des Tripelpunktsystems (a, b, c) benützt haben, können wir drei Tripelpunkte herausgreifen und daraus ein Tripelpunktsystem zweiten Grades bilden. Ein Tripelpunkt zweiten Grades setzt sich also aus drei Dreiecken zusammen:

$$\alpha) \left\{ \begin{array}{lll} a+h_1 & b+h_1 & c+h_1 \\ a+h_2 & b+h_2 & c+h_2 \\ a+h_3 & b+h_3 & c+h_3. \end{array} \right.$$

Um nun aus diesen drei beliebigen Tripelpunkten des Systems ($a+h, b+h, c+h$) das durch sie bestimmte Tripelpunktsystem zweiten Grades herzustellen, verfahren wir wie bei der Bildung eines Tripelpunktsystems ersten Grades: wir projizieren den Tripelpunkt zweiten Grades $\alpha)$ von irgend einem Tripelpunkt ersten Grades

$$a+m \quad b+m \quad c+m \quad \text{aus.}$$

Wir erhalten so

$$\beta) \begin{cases} a - (a + b + c + h_1 + m) & b - (a + b + c + h_1 + m) \\ & c - (a + b + c + h_1 + m) \\ a - (a + b + c + h_2 + m) & b - (a + b + c + h_2 + m) \\ & c - (a + b + c + h_2 + m) \\ a - (a + b + c + h_3 + m) & b - (a + b + c + h_3 + m) \\ & c - (a + b + c + h_3 + m). \end{cases}$$

Projizieren wir die so erhaltenen Punkte β) neuerdings wieder von allen einfachen Tripelpunkten des Systems $(a + h, b + h, c + h)$ aus, indem wir als Projektionszentrum irgend einen Tripelpunkt $a - k, b - k, c - k$ nehmen und in den erhaltenen Ausdrücken k variabel sein lassen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a - [-k - (h_1 + m)] & \quad b - [-k - (h_1 + m)] & \quad c - [-k - (h_1 + m)] \\ a - [-k - (h_2 + m)] & \quad b - [-k - (h_2 + m)] & \quad c - [-k - (h_2 + m)] \\ a - [-k - (h_3 + m)] & \quad b - [-k - (h_3 + m)] & \quad c - [-k - (h_3 + m)], \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Konstanten $h_i + m$ jedesmal durch einen Buchstaben l_i ersetzen — $i = 1, 2, 3$ —:

$$\gamma) \begin{cases} a + l_1 + k & b + l_1 + k & c + l_1 + k \\ a + l_2 + k & b + l_2 + k & c + l_2 + k \\ a + l_3 + k & b + l_3 + k & c + l_3 + k. \end{cases}$$

γ) stellt bei variablem k ein solches Tripelpunktsystem zweiten Grades dar; jedes k ergibt drei Dreiecke, die zusammen einen Tripelpunkt zweiten Grades bilden.

Anmerkung. In ganz analoger Weise lassen sich Tripelpunkte 3., 4., . . . n^{ten} Grades bilden.

14. Sind nun z. B. zwei derartige Tripelpunkte zweiten Grades k_1 und k_2 gegeben:

$$\begin{aligned} \delta_1) & \quad a + l_1 + k_1 & \quad b + l_1 + k_1 & \quad c + l_1 + k_1 \\ \delta_2) & \quad a + l_2 + k_1 & \quad b + l_2 + k_1 & \quad c + l_2 + k_1 \\ \delta_3) & \quad a + l_3 + k_1 & \quad b + l_3 + k_1 & \quad c + l_3 + k_1; \\ \delta'_1) & \quad a + l_1 + k_2 & \quad b + l_1 + k_2 & \quad c + l_1 + k_2 \\ \delta'_2) & \quad a + l_2 + k_2 & \quad b + l_2 + k_2 & \quad c + l_2 + k_2 \\ \delta'_3) & \quad a + l_3 + k_2 & \quad b + l_3 + k_2 & \quad c + l_3 + k_2, \end{aligned}$$

so bestimmen diese zwei Tripelpunkte eine Tripelgerade und wir erhalten den dritten dieser Geraden zugehörigen Tripelpunkt,

wenn wir in der uns geläufigen Weise Dreieck δ_1 mit Dreieck δ'_2 und mit Dreieck δ'_3 und ebenso δ_2 mit δ'_3 verbinden.

δ_1 und δ'_2 , ebenso wie δ_2 und δ'_1 , ergeben:

$$a - [a + b + c + l_1 + l_2 + k_1 + k_2],$$

$$b - [a + b + c + l_1 + l_2 + k_1 + k_2],$$

$$c - [a + b + c + l_1 + l_2 + k_1 + k_2]$$

oder wenn wir $+l_1 + l_2 + l_3 - (l_1 + l_2 + l_3)$ hinzufügen:

$$\varepsilon_3) \quad a + l_3 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2],$$

$$b + l_3 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2],$$

$$c + l_3 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2].$$

δ_1 und δ'_3 , ebenso wie δ_3 und δ'_1 , ergeben geradeso:

$$\varepsilon_2) \quad a + l_2 - M, \quad b + l_2 - M, \quad c + l_2 - M,$$

wenn wir $a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + k_1 + k_2$ der Kürze wegen mit M bezeichnen.

δ_2 und δ'_3 , ebenso wie δ_3 und δ'_2 , ergeben:

$$\varepsilon_1) \quad a + l_1 - M, \quad b + l_1 - M, \quad c + l_1 - M.$$

In eindeutiger Weise veranlassen also die Tripelpunkte zweiten Grades δ und δ' den Tripelpunkt ε , der mit ihnen auf derselben Tripelgeraden liegt. Nehmen wir schließlich $k_1 = k_2 = k$, dann geht δ' in δ über und ε ist der Tangentialpunkt von δ ; statt $k_1 + k_2$ muß es dann in den Ausdrücken $\varepsilon \ 2k$ heißen. Wir erhalten also zu dem Tripelpunkte zweiten Grades δ seinen Tangentialpunkt ε , wenn wir δ_1 mit δ_2 und δ_3 und δ_2 mit δ_3 verbinden. Soll schließlich dieser Tangentialpunkt ε mit δ zusammenfallen, δ also ein Wendepunkt sein, so muß ε_1 , das Ergebnis der Verbindung von δ_2 mit δ_3 , zusammenfallen mit δ_1 ; also muß

$$a + l_1 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + 2k] \equiv a + l_1 + k;$$

$$\text{ebenso} \quad b + l_1 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + 2k] \equiv b + l_1 + k$$

$$\text{und} \quad c + l_1 - [a + b + c + l_1 + l_2 + l_3 + 2k] \equiv c + l_1 + k \quad \text{sein.}$$

Aus jeder dieser drei Gleichungen ergibt sich:

$$k = - \frac{a + b + c + l_1 + l_2 + l_3}{3} + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}.$$

Setzen wir nun

$$l_1 - \frac{a + b + c + l_1 + l_2 + l_3}{3} = k_1,$$

$$l_2 - \frac{a + b + c + l_1 + l_2 + l_3}{3} = k_2,$$

$$l_3 - \frac{a + b + c + l_1 + l_2 + l_3}{3} = k_3,$$

so ergeben sich demnach für die Wendepunkte unseres Tripelpunktsystems zweiten Grades die Ausdrücke

$$\zeta_1) \quad a + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3};$$

$$\zeta_2) \quad a + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3};$$

$$\zeta_3) \quad a + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}.$$

Diese Punkte decken sich aber mit den Punkten $g)$ am Ende von § 12. Die neun Wendepunkte eines Tripelpunktsystems zweiten Grades bestehen also aus neun Tripelgeraden eines Systems ersten Grades, die in einem derartigen Zusammenhange untereinander stehen, daß man aus einer die acht anderen erhält, wenn man die ersten von einem der neun einfachen Wendepunkte, z. B. dem Wendepunkte 0, aus projiziert; sodann diese Projektion neuerdings wieder von den acht anderen Wendepunkten aus projiziert [vgl. den Schluß von 12)].

Dieses Ergebnis steht mit unseren früheren Wahrnehmungen im Einklange: Die drei Schnittpunkte einer Geraden mit der C_3 bilden zusammen einen Tripelwendepunkt ersten Grades; es ist also folgerichtig, daß ebenso die drei Tripelpunkte einer einfachen Tripelgeraden einen Tripelwendepunkt zweiten Grades bilden.

15. Wir können nunmehr die in 12) erörterten Beziehungen zwischen den Tripelwendepunktsystemen ersten Grades $\varphi)$ und $\varphi')$ und dem zugehörigen Tripelwendepunktsystem zweiten Grades $g)$.

$$\varphi) \quad \begin{cases} -a + \frac{a + b + c + p\omega + p'\omega'}{3} \\ -b + \frac{a + b + c + p\omega + p'\omega'}{3} \\ -c + \frac{a + b + c + p\omega + p'\omega'}{3}; \end{cases}$$

$$\varphi') \left\{ \begin{array}{l} -k_1 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_2 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -k_3 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}; \end{array} \right.$$

$$g) \left\{ \begin{array}{l} a+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad b+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad c+k_1+\frac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad b+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad c+k_2+\frac{p\omega+p'\omega'}{3} \\ a+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad b+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3}, \quad c+k_3+\frac{p\omega+p'\omega'}{3} \end{array} \right.$$

kurz so aussprechen:

Hat man zwei Tripelwendepunktsysteme 1. Grades φ) und $\varphi')$ und verbindet jedender 27 Punkte des einen Systems mit jedem der 27 Punkte des anderen, so bilden die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien ein Tripelwendepunktsystem zweiten Grades g). Wir wollen dieses Resultat noch etwas genauer betrachten.

Die zwei Systeme φ) und $\varphi')$ veranlassen, wenn wir jeden einfachen Punkt von φ mit jedem von φ' verbinden, 27^2 Verbindungslinien. Da nun jede dieser Geraden durch einen der 81 Punkte des Tripelwendepunktsystems zweiten Grades g geht, so gehen also allemal 9 dieser 27^2 Verbindungslinien durch einen und denselben Punkt von g). Daß das tatsächlich der Fall ist, kann man aus den Ausdrücken φ , φ' und g ohne weiteres ablesen. So z. B. gehen durch den Punkt $a+k_1$ von g) 9 Geraden nach den 9 Punkten von φ): $-a + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$, die sich ergeben, wenn man p und p' jeden der drei Werte 1, 2, 3 gibt. $a+k_1$ und $-a + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}$ ergeben aber für die dritten Schnittpunkte der Verbindungslinien den Ausdruck von $\varphi')$:

$$-k_1 - \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3}.$$

Die Frage, wie viele von diesen 27^2 Linien reell und imaginär sind, ist leicht zu entscheiden, da wir in unserer Konfiguration die Tripelwendepunktsysteme ersten Grades φ) und $\varphi')$ beliebig annehmen dürfen und ein beliebiger imaginärer Punkt, mit einem zweiten beliebigen imaginären Punkt verbunden, natürlich eine imaginäre Gerade liefert. Nun hat jedes der Tripelwendepunktsysteme φ) und $\varphi')$ drei reelle und sechs imaginäre Geraden; die drei reellen Geraden haben entweder je drei reelle Punkte oder

je einen; unter den 27^2 Geraden sind also höchstens 81 reell; möglich ist auch, daß nur 27 oder auch daß nur 9 reell sind.

Daß tatsächlich φ) und φ') bei der Herstellung der Konfiguration $[\varphi), \varphi'), g)]$ beliebig angenommen werden dürfen, erkennen wir, wenn wir die Ausgangstripelgerade

$$\begin{array}{lll} a + k_1 & b + k_1 & c + k_1 \\ a + k_2 & b + k_2 & c + k_2 \\ a + k_3 & b + k_3 & c + k_3 \end{array}$$

betrachten. Mit dieser Tripelgeraden ist auch das Parametersystem

$$\varphi) \left\{ \begin{array}{l} -a + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -b + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \\ -c + \frac{a+b+c+p\omega+p'\omega'}{3} \end{array} \right.$$

bestimmt. Dieses System ist aber, wie man sieht, schon mit dem Tripelpunkt $a b c$ gegeben, gehört also zu sämtlichen Tripelgeraden des Tripelpunktsystems (a, b, c) . Selbstverständlich erhalten wir aber im allgemeinen zu φ) und je zwei Tripelpunktsystemen zweiten Grades g_1) und g_2) zwei verschiedene Systeme φ' . Wir werden also zu dem System φ) so viele Systeme φ') konstruieren können, als in dem Tripelpunktsystem (a, b, c) Tripelwendepunktsysteme zweiten Grades g) sich bilden lassen. Man wird also tatsächlich zur Bildung der Konfiguration $[\varphi), \varphi'), g)]$ φ) und φ') beliebig annehmen dürfen. Wir erkennen gleichzeitig, weil φ) durch a, b, c, φ') durch k_1, k_2, k_3 bestimmt ist:

Es gibt neun Tripelgeraden des Tripelpunktsystems (a, b, c) , deren konjugierte Tripelgeraden wiederum demselben Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) angehören. Es sind dies die Geraden

$$\begin{array}{l} a + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_1 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3} \\ a + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_2 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3} \\ a + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad b + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \quad c + k_3 + \frac{p\omega + p'\omega'}{3}, \end{array}$$

deren jede sich durch einen bestimmten Wert von p und p' ergibt, und die zusammen das Tripelwendepunktsystem zweiten Grades g) bilden.

Die erste dieser Tripelgeraden ist bestimmt durch die drei Tripelpunkte

$$\begin{array}{lll} 1) & a + k_1 & b + k_1 & c + k_1 \\ & a + k_2 & b + k_2 & c + k_2 \\ & a + k_3 & b + k_3 & c + k_3, \end{array}$$

wo jede wagrechte Reihe einen Tripelpunkt der Geraden gibt und $k_3 = -(a + b + c + k_1 + k_2)$ ist. Die zu 1) gehörige konjugierte Gerade setzt sich aus den Tripelpunkten zusammen:

$$\begin{array}{lll} 1') & k_1 + a & k_2 + a & k_3 + a \\ & k_1 + b & k_2 + b & k_3 + b \\ & k_1 + c & k_2 + c & k_3 + c, \end{array}$$

die dem Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) angehören.

Eine zweite der neun erwähnten Geraden des Tripelpunktsystems (a, b, c) ist gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} 2) & a + \left(k_1 + \frac{\omega}{3}\right) & b + \left(k_1 + \frac{\omega}{3}\right) & c + \left(k_1 + \frac{\omega}{3}\right) \\ & a + \left(k_2 + \frac{\omega}{3}\right) & b + \left(k_2 + \frac{\omega}{3}\right) & c + \left(k_2 + \frac{\omega}{3}\right) \\ & a + \left(k_3 + \frac{\omega}{3}\right) & b + \left(k_3 + \frac{\omega}{3}\right) & c + \left(k_3 + \frac{\omega}{3}\right), \end{array}$$

wo die eingeklammerten Ausdrücke die Parameter der Tripelpunkte bedeuten, während a, b, c der Ausgangstripelpunkt ist. Die zu 2) konjugierte Tripelgerade hat die drei Tripelpunkte:

$$\begin{array}{lll} 2') & k_1 + \left(a + \frac{\omega}{3}\right) & k_2 + \left(a + \frac{\omega}{3}\right) & k_3 + \left(a + \frac{\omega}{3}\right) \\ & k_1 + \left(b + \frac{\omega}{3}\right) & k_2 + \left(b + \frac{\omega}{3}\right) & k_3 + \left(b + \frac{\omega}{3}\right) \\ & k_1 + \left(c + \frac{\omega}{3}\right) & k_2 + \left(c + \frac{\omega}{3}\right) & k_3 + \left(c + \frac{\omega}{3}\right), \end{array}$$

wo wieder die eingeklammerten Ausdrücke die Parameter, k_1, k_2, k_3 der Ausgangspunkt ist. Die zu 2) konjugierte Tripelgerade 2') gehört also wieder dem Tripelpunktsystem (k_1, k_2, k_3) an u. s. w.

16. Bevor ich zu einer anderen Gattung von Punktsystemen übergehe, will ich an einem Beispiel zeigen, wie sich unsere Tripelpunkttheorie als Hilfsmittel zur Ableitung von Sätzen der gewöhnlichen Punkttheorie verwerten läßt. Sind t_1, t_2, t_3, t_4 die vier von einem Punkte a' der C_3 ausgehenden weiteren vier Tangenten, mit den Berührungspunkten a_1, a_2, a_3, a_4 , so gibt es einen Kegel-

schnitt durch a_1, a_2, a_3, a_4 , der in a' berührt. Hat ebenso eine Gruppe von vier Tripeltangenten die Berührungstripelpunkte:

$$1) \quad a, b, c; \quad 2) \quad a + \frac{\omega}{2}, \quad b + \frac{\omega}{2}, \quad c + \frac{\omega}{2};$$

$$3) \quad a + \frac{\omega'}{2}, \quad b + \frac{\omega'}{2}, \quad c + \frac{\omega'}{2};$$

$$4) \quad a + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad b + \frac{\omega + \omega'}{2}, \quad c + \frac{\omega + \omega'}{2}$$

und den gemeinsamen Tangentialtripelpunkt 5) $a - (a + b + c)$, $b - (a + b + c)$, $c - a + b + c$ — der Einfachheit wegen wurde der Ausgangstripelpunkt a, b, c , der den Parameter 0 hat, verwendet —, so läßt sich eine C_6 durch die vier Tripelpunkte 1) bis 4) legen, die die C_3 in den Eckpunkten des Dreiecks 5) berührt. Das läßt sich am einfachsten durch den Nachweis zeigen, daß für die Parameter unserer sechs Tripelpunkte, der gemeinsame Tangentialtripelpunkt 5) zweifach gezählt, die Gleichung besteht

$$k_1 + k_2 + \dots + k_6 \equiv -2(a + b + c) \pmod{\omega, \omega'} \text{ (s. § 8, Gleichung 2)}.$$

Diese Summe der Parameter ist in unserem Falle:

$$0 + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2} + 2 \cdot [-(a + b + c)] = -2(a + b + c).$$

Nehmen wir nun als Ausgangsdreieck ein Dreieck abc mit zwei unendlich benachbarten Eckpunkten b und c , so findet dieses Zusammenfallen der zwei b und c entsprechenden Eckpunkte natürlich bei sämtlichen Tripelpunkten des Systems (a, b, c) statt; es gibt also (s. Fig. 2) eine C_6 , die durch die Tripelpunkte $a_1c_1c_1, a_2c_2c_2, a_3c_3c_3, a_4c_4c_4$ je einfach und durch den gemeinsamen Tangentialtripelpunkt $a'c'c'$ doppelt hindurchgeht, die also mit der C_3 die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 einfach, die Punkte c_1, c_2, c_3, c_4, a' zweifach und den Punkt c' vierfach gemeinsam hat; dabei ist a' der Tangentialpunkt der vier Punkte c_1, c_2, c_3, c_4 .

Nehmen wir nun eine zerfallene C_6 , von welcher die Tangenten (a', c_1) und (a', c_2) ferner die Geraden (c', a_3) und (c', a_4) Bestand-

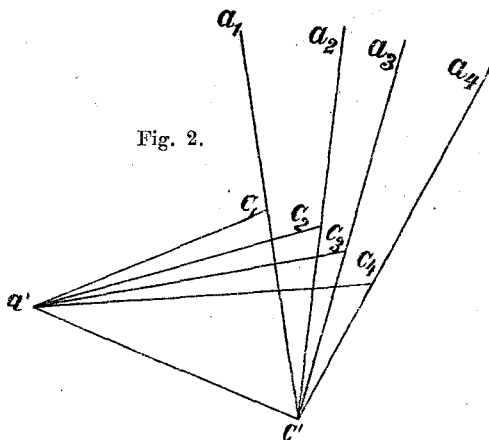


Fig. 2.

teile sind, so bleibt ein Kegelschnitt übrig, der durch a_1, a_2, c_3, c_4 und zweimal durch c' geht; also:

Hat man ein Tangentenquadrupel t_1, t_2, t_3, t_4 mit gemeinsamem Tangentialpunkt a' (s. Fig. 2) und bezw. den Berührungspunkten c_1, c_2, c_3, c_4 , und legt man durch diese vier Berührungspunkte irgend ein Quadrupel von Geraden $c'_1 a_1, c'_2 a_2, c'_3 a_3, c'_4 a_4$, beliebig, weil c' irgend ein Punkt der C_3 ist, während $a_1, a_2 \dots$ die dritten Schnittpunkte der Geraden $c'_1, c'_2 \dots$ sind, so existieren die sechs Kegelschnitte:

$$\begin{aligned} c' c'_1 c_2 a_3 a_4 \\ c' c'_1 c_3 a_2 a_4 \\ c' c'_1 c_4 a_2 a_3 \\ c' c'_2 c_3 a_1 a_4 \\ c' c'_2 c_4 a_1 a_3 \\ c' c'_3 c_4 a_1 a_2. \end{aligned}$$

Anmerkung: Lassen wir c' mit dem Tangentialpunkt a' zusammenfallen, so fallen die Punktgruppen a und c zusammen und statt der sechs Kegelschnitte erhalten wir als speziellen Fall den einen bekannten Kegelschnitt $(c_1, c_2, c_3, c_4, a', a')$.

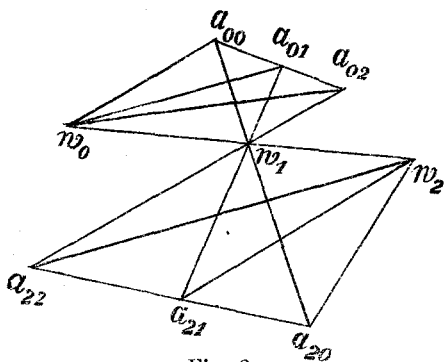


Fig. 3.

17. Fortsetzung. Erwähnenswert sind die Beziehungen, die sich für die Lage dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte und der Punkte ihrer harmonischen Polaren aus diesem Satze ergeben (s. die schematische Fig. 3).

Seien die Wendepunkte w_0, w_1, w_2 und die Punkte der zu w_0 und w_2 gehörigen harmonischen Polaren bezw.

a_{00}, a_{01}, a_{02} und a_{20}, a_{21}, a_{22} ; so daß die Punkte a_{00}, w_1, a_{20} ;

a_{01}, w_1, a_{21} ; a_{02}, w_1, a_{22} je-

desmal in einer Geraden liegen. Wählen wir alsdann als das Tangentenquadrupel die Wendetangente und die weiteren Tangenten in w_0 , die also die Berührungspunkte $w_0, a_{00}, a_{01}, a_{02}$ haben, und wählen als Punkt c' (s. Fig. 2) den Wendepunkt w_1 , so geht durch jedes der folgenden sechs Punktquadrupel ein Kegelschnitt, der die C_3 in w_1 berührt:

$$\begin{aligned} w_0 a_{00} a_{21} a_{22} & \quad w_2 a_{20} a_{01} a_{02} \\ w_0 a_{01} a_{20} a_{22} & \quad w_2 a_{21} a_{00} a_{02} \\ w_0 a_{02} a_{21} a_{20} & \quad w_2 a_{22} a_{01} a_{00}. \end{aligned}$$

Wie leicht ersichtlich ist, erhält man dieselben sechs Kegelschnitte, wenn man das von w_0 ausgehende Tangentenquadrupel durch das von w_2 ausgehende ersetzt.

Eine Inflexionsachse mit den zugehörigen drei harmonischen Polaren gibt also Anlaß zu 18 Kegelschnitten, von denen je sechs in einem der drei auf der Inflexionsachse liegenden Wendepunkte berühren und deren übrige vier Schnittpunkte Punkte der harmonischen Polaren sind. Da durch jeden Wendepunkt vier Inflexionsachsen gehen, so berühren demnach in jedem Wendepunkte 24 solche Kegelschnitte. Ihre Zahl beträgt also im ganzen 216. Davon sind aber höchstens die 18 zu der reellen Inflexionsachse gehörigen reell.

16a). Eine weitere bemerkenswerte Gruppe von vier Kegelschnitten erhalten wir, wenn wir den allgemeinen Satz, der die Grundlage von 16) bildet, in anderer Weise spezialisieren.

Dieser allgemeine Satz besagt, daß die Gruppe der vier Punkte (s. Fig. 2) $a, a + \frac{\omega}{2}, a + \frac{\omega'}{2}, a + \frac{\omega + \omega'}{2}$ je einfach zählend, das Quadrupel der Punkte $c, c + \frac{\omega}{2}, c + \frac{\omega'}{2}, c + \frac{\omega + \omega'}{2}$ je zweifach gerechnet, der Punkt a' zweifach und der Punkt c' vierfach zählend 18 assoziierte Punkte bilden. So oft nun von diesen 18 Punkten viermal drei Punkte, z. B. die Punkte $a', c, c; c', c + \frac{\omega}{2}, a + \frac{\omega}{2}; c', c + \frac{\omega'}{2}, a + \frac{\omega'}{2}; c', c + \frac{\omega + \omega'}{2}, a + \frac{\omega + \omega'}{2}$, auf je einer Geraden liegen, so oft liegen die übrigen sechs Punkte auf einer C_2 ; in unserem Beispiele heißen diese sechs Punkte $a', c', a, c + \frac{\omega}{2}, c + \frac{\omega'}{2}, c + \frac{\omega + \omega'}{2}$. Also:

Hat man ein Quadrupel von vier von einem Punkte a' der C_3 ausgehenden Tangenten, mit den Berührungspunkten c_1, c_2, c_3, c_4 , und projiziert man diese vier Punkte von irgend einem Punkte c' der Kurve auf dieselbe, so erhält man das Punktquadrupel a_1, a_2, a_3, a_4 . Es gehen dann durch a' und c' vier Kegelschnitte, die folgende weitere Gruppen von vier Punkten ausscheiden:

$$a_1 c_2 c_3 c_4$$

$$a_2 c_1 c_3 c_4$$

$$a_3 c_1 c_2 c_4$$

$$a_4 c_1 c_2 c_3.$$

17. Zu weiteren Konfigurationen führt der allgemeine Satz in 16), wenn wir in anderer Weise spezialisieren.

Ist $a'b'c'$ der Tangentialtripelpunkt zu $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, a_3 b_3 c_3, a_4 b_4 c_4$, dann gehen also durch a' die vier Geraden $b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3, b_4 c_4$, durch b' $a_1 c_1 \dots$ u. s. w. und $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; a_4, b_4, c_4; a', b', c'; a', b', c'$ sind 18 assoziierte Punkte. Nun liegen z. B. $c', a_3, b_3; c', a_4, b_4; b', a_1, c_1; b', a_2, c_2$ auf je einer Geraden; also liegen die übrigen sechs Punkte auf einem Kegelschnitt; es sind dies die Punkte $a', a' c_3, c_4, b_1, b_2$. Solcher Kegelschnitte, die in a' berühren, gibt es sechs; jeder geht noch durch eine der folgenden Gruppen von vier weiteren Punkten:

$$\begin{aligned} b_1 b_3 c_3 c_4 \\ b_1 b_3 c_2 c_4 \\ b_1 b_4 c_2 c_3 \\ b_2 b_3 c_1 c_4 \\ b_2 b_4 c_1 c_3 \\ b_3 b_4 c_1 c_2. \end{aligned}$$

In b' und c' berühren ebenfalls je sechs ähnlich zu bestimmende Kegelschnitte.

17a). Splittern wir aber von einer durch die 18 assoziierten Punkte zu legenden C_6 die Geraden $c' a_3 b_3, c' a_4 b_4, a' b_1 c_1, b' a_2 c_2$ ab, so bleibt ein Kegelschnitt übrig, der durch $a', b', c_3, c_4, a_1, b_2$ geht. Solcher Kegelschnitte durch a' und b' gibt es zwölf; die zugehörigen weiteren Schnittpunktquadrupel heißen:

$$\begin{aligned} c_1 c_2 a_3 b_4 \\ c_1 c_2 a_4 b_3 \\ c_1 c_3 a_2 b_4 \\ c_1 c_3 a_4 b_2 \\ c_1 c_4 a_2 b_3 \\ c_1 c_4 a_3 b_2 \\ c_2 c_3 a_1 b_4 \\ c_2 c_3 a_4 b_1 \\ c_2 c_4 a_1 b_3 \\ c_2 c_4 a_3 b_1 \\ c_3 c_4 a_1 b_2 \\ c_3 c_4 a_2 b_1. \end{aligned}$$

Ebenso viele ähnlich zu bestimmende Kegelschnitte gehen durch die zwei Punkte a' und c' und durch die zwei Punkte b' und c' .

Wenn wir der Kürze wegen die fünf Dreiecke $a_1 b_1 c_1 \dots a_4 b_4 c_4, a'b'c'$ mit d_1, d_2, d_3, d_4, d' bezeichnen, so können wir zusammenfassend folgendes feststellen:

Durch je sechs Eckpunkte von fünf der C_3 einbeschriebenen Dreiecken d_1, d_2, d_3, d_4, d' , von denen die vier ersten dem letzten umschrieben sind, gehen im ganzen 54 Kegelschnitte. Sie teilen sich in eine Gruppe A von dreimal sechs Kegelschnitten, die je in einem Eckpunkte von d' berühren (welcher also dann für zwei Eckpunkte zählt) und in eine Gruppe B von 36 Kegelschnitten, von welchen allemal zwölf durch ein- und dasselbe Eckpunktpaar von d' hindurchgehen.

18. Es erhebt sich nun die Frage: Ist das Dreieck die einzige Figur, die als Grundlage für derartige Theorien benützt werden kann, oder gibt es nicht Systeme von der C_3 eingeschriebenen Vielecken jeder Art, bei denen solche Analogien mit der Theorie der einfachen Punkte der C_3 möglich sind? Wir gehen zur Entscheidung dieser Frage von irgend einem System der C_3 eingeschriebener n -Ecke aus:

$$1) \quad a_1 + h, \quad a_2 + h, \quad a_3 + h, \quad \dots \quad a_p + h \dots a_n + h,$$

wobei $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ das Ausgangsvieleck, h der variable Parameter sei.

Halten wir nun für das aufzufindende neue System an der Definition fest, daß zu einem Vieleck das Tangentialvieleck durch Bestimmung der dritten Schnittpunkte der Seiten erhalten wird, so muß dasselbe System auch gegeben sein durch

$$2) \quad -2h - (a_1 + a_2), -2h - (a_2 + a_3), -2h - (a_3 + a_4), \dots;$$

dabei ist $-2h$ der variable Parameter. Die Systeme 1) und 2) werden nun identisch, wenn:

$$a_1 + a_2 = -a_1$$

$$a_2 + a_3 = -a_2 \text{ u. S. W.};$$

wir erhalten alsdann:

$$a_2 = -2a_1,$$

$$a_3 = -2a_2 = 4a_1 \text{ u. s. w.};$$

d. h. das n -Ecksystem, zu dem wir so kommen, ist von der Art, daß das Ausgangs- n -Eck ein der C_3 um- und einbeschriebenes Vieleck ist. Ein solches n -Eck hat also die Eckpunkte:

$$a_1 = a \cdot 2^0 (-1)^0 \quad a_p = a \cdot 2^{p-1} (-1)^{p-1}$$

$$a_2 = a \cdot 2^1 (-1)^1 \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_3 = a \cdot 2^2 \cdot (-1)^2 \quad a_n = a \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n-1};$$

• • • • •

• • • • •

der $(n+1)^{\text{te}}$ Eckpunkt heißt $a \cdot 2^n \cdot (-1)^n$; da dieser $(n+1)^{\text{te}}$ Eckpunkt mit dem ersten zusammenfallen muß, so haben wir

$$a \cdot 2^n \cdot (-1)^n = a + p\omega + p'\omega';$$

$$a[2^n \cdot (-1)^n - 1] = p\omega + p'\omega';$$

$$a = \frac{p\omega + p'\omega'}{2^n \cdot (-1)^n - 1}, \text{ wobei } p \text{ u. } p' \text{ irgendwelche ganze Zahlen bedeuten.}$$

19. Wir wollen der Kürze wegen die Bezeichnung a für $\frac{p\omega + p'\omega'}{2^n \cdot (-1)^n - 1}$ beibehalten. Von der Brauchbarkeit eines solchen n -Eckes nun zur Bildung eines polygonalen Punktsystems

$$(a + h, -2a + h, 4a + h \dots),$$

in welchem das Polygon den Punkt vorstellt, kann man sich leicht überzeugen. Daß der Tangentialpunkt unseres polygonalen Punktes wieder dem System angehört, haben wir schon gesehen. Nehmen wir nun etwa zwei von einander getrennt liegende Polygone, $a + h_1, -2a + h_1 \dots; a + h_2, -2a + h_2 \dots$, oder kurz: Das Polygon h_1 und das Polygon h_2 , so läßt sich mittels dieser zweier Vielecke ein Vieleck h_3 konstruieren, das unserer Mannigfaltigkeit $(a + h, -2a + h \dots)$ angehört. Die Möglichkeiten, diese Konstruktionen zu bewerkstelligen, sind, wie wir sehen werden, verschieden, aber das Resultat ist immer dasselbe Vieleck h_3 . h_1, h_2, h_3 bilden dann eine „polygonale Gerade“, die durch die zwei Punkte h_1 und h_2 bestimmt ist. Ich will nun h_3 aus h_1 und h_2 konstruieren. Ich nehme von h_1 den Punkt $(-1)^p \cdot 2^p \cdot a + h_1$, also den $(p+1)^{\text{ten}}$ Punkt, von $(-1)^0 \cdot 2^0 \cdot a + h_1$ angefangen, von h_2 den Punkt von der gleichen Ordnungszahl $(-1)^p \cdot 2^p \cdot a + h_2$, so ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie dieser zwei Punkte gegeben durch

$$-h_1 - h_2 - 2 \cdot (-1)^p \cdot 2^p \cdot a = -h_1 - h_2 + (-1)^{p+1} 2^{p+1} \cdot a;$$

aber dieser Punkt ist offenbar der $(p+2)^{\text{te}}$ Punkt des Vielecks $-(h_1 + h_2)$, also des Vielecks $a - (h_1 + h_2), -2a - (h_1 + h_2), +4a - (h_1 + h_2) \dots$.

Wenn wir für p alle Zahlen von 1 bis n nehmen, so bekommen wir in dieser Weise alle Eckpunkte von h_3 . Wir erkennen gleichzeitig die Bedingung, die für die Parameter h_1, h_2, h_3 bestehen muß, damit sie drei Punkte einer polygonalen Geraden darstellen:

$$h_1 + h_2 \equiv -h_3 \pmod{\omega, \omega'};$$

das ist dieselbe Gleichung, die auch ausdrückt, daß die einfachen Punkte h_1, h_2, h_3 in einer Geraden liegen; die Analogie erstreckt sich hier also auch auf die Form der Gleichung.

20. Daran knüpft sich naturgemäß die Frage, was hat die Gleichung

$$3) h_1 + h_2 + \dots + h_{3m} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'},$$

die beim einfachen Punktsystem ausdrückt, daß die Punkte mit den $3m$ Parametern auf einer C_m liegen, für unser polygonales System zu bedeuten? Was hat man unter einer polygonalen C_m zu verstehen? Die Frage erledigt sich durch eine einfache Rechnung.

Nehmen wir $3m$ Vielecke der Mannigfaltigkeit, mit den Parametern $h_1, h_2, h_3 \dots h_{3m}$, so ist die Summe der Parameter ihrer Eckpunkte:

$$4) \quad 3m \cdot [a - 2a + 4a - \dots + (-2)^{n-1} \cdot a] + \\ + n \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{3m}).$$

Nun ist der erste Summand

$$\begin{aligned} & 3ma [1 - 2 + 4 \dots (-2)^{n-1}] = \\ & = 3ma \frac{(-2)^n - 1}{-3} = -m \cdot a [(-2)^n - 1] = \\ & = -m \frac{p\omega + p'\omega'}{(-2)^n - 1} [(-2)^n - 1] = -m \cdot (p\omega + p'\omega') \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}. \end{aligned}$$

Die Summe 4) der $3mn$ Parameter ist also $\equiv 0$, wenn

$$3) \quad h_1 + h_2 + \dots + h_{3m} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'} \text{ ist.}$$

Also: Die Gleichung 3) drückt aus, daß die Eckpunkte der zu den $3m$ Parametern gehörigen polygonalen Punkte die Schnittpunkte einer C_{mn} mit der C_3 sind.

21. Bemerkenswert ist nun aber, daß zu zwei Vielecken h_1 und h_2 h_3 auf dreierlei Art gewonnen werden kann.

Wir betrachten wieder die drei Vielecke h_1, h_2, h_3 , von der Art, daß $h_3 \equiv -h_1 - h_2 \pmod{\omega, \omega'}$

h_1 habe die Eckpunkte:

$$a'_1 = a + h_1, a'_2 = -2a + h_1, \dots a'_{p+1} = (-2)^p \cdot a + h_1$$

h_2 habe die Eckpunkte:

$$a''_1 = a + h_2, a''_2 = -2a + h_2, \dots a''_{p+1} = (-2)^p \cdot a + h_2$$

h_3 habe die Eckpunkte:

$$a'''_1 = a + h_3, a'''_2 = -2a + h_3, \dots a'''_{p+1} = (-2)^p \cdot a + h_3;$$

$$a \text{ ist, wie wir gesehen haben, } = \frac{p\omega + p'\omega'}{(-2)^n - 1}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} & -[(-2)^p a + h_1 + (-2)^{p-1} \cdot a + h_2] \\ & = -a[(-2)^{p-1} \cdot (-2 + 1)] - (h_1 + h_2) = a(-2)^{p-1} + h_3, \end{aligned}$$

d. h. der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie von a_{p+1} und a_p'' ist a_p''' . Ein Eckpunkt a_p''' des Vielecks h_3 wird also durch folgende Verbindungslinien von Eckpunkten der Vielecke h_1 und h_2 ausgeschnitten: 1) durch $a_{p-1}' a_{p-1}''$; 2) durch $a_{p+1}' a_p''$; 3) durch $a_p' a_{p+1}''$. Die Zahl dieser Geraden ermäßigt sich auf 2, wenn h_1 und h_2 unendlich benachbart sind, weil alsdann $a_{p+1}' a_p''$ und $a_p' a_{p+1}''$ zusammenfallen. Nehmen wir also wieder ein Vieleck h und bezeichnen diesmal die Eckpunkte mit $b_1 b_2 \dots b_{p-1} b_p b_{p+1} \dots b_n$; bezeichnen wir ferner die Eckpunkte des zugehörigen Tangentialvielecks h' mit $a_1' a_2' \dots a_p' \dots a_n'$; dann führen zu dem Punkte a_p' folgende zwei Geraden: 1) die Tangente in b_{p-1} ; 2) die Gerade $b_p b_{p+1}$.

22) Was die Wendepunkte des Systems betrifft, so sind dieselben natürlich gegeben durch $h = \frac{p\omega + p'\omega'}{3}$. Man erhält sie also in ihrer Gesamtheit, wenn man das um- und einbeschriebene Vieleck, welches das Ausgangspolygon bildet, von einem Wendepunkt aus projiziert und die Projektion neuerdings von allen Wendepunkten aus projiziert. Selbstverständlich lassen sich sämtliche Wendepunktbeziehungen auf unsere polygonalen Wendepunkte übertragen: je zwei derselben liegen auf einer polygonalen Inflexionsachse, die noch einen dritten enthält; es gibt zwölf solche Inflexionsachsen, durch jeden polygonalen Wendepunkt gehen vier u. s. w.

Folgender Satz ist aber auch ohne unsere Analogiebetrachtungen von Interesse: Zu jedem der C_3 um- und einbeschriebenen Vieleck A' stehen drei der Kurve einbeschriebene Vielecke B_1, B_2, B_3 von derselben Seitenzahl in der Beziehung, daß die dritten Schnittpunkte der Seiten von B_1, B_2, B_3 die Eckpunkte von A' bilden; dieselben Eckpunkte von A' sind zugleich aber auch die Tangentialpunkte der Eckpunkte von B_1, B_2, B_3 : ist also a_p' ein solcher Eckpunkt von A' , so ist eine der vier von a_p' ausgehenden weiteren Tangenten die Tangente $a_{p-1}' a_p'$, deren Berührungspunkt a_{p-1}' wieder ein Eckpunkt von A' ist; von den drei anderen Berührungspunkten $b_{p-1}', b_{p-1}'', b_{p-1}'''$ gehört jeder einem der drei Vielecke B_1, B_2, B_3 als Eckpunkt an:

Die drei Vielecke

$$B_1 (b_1' b_2' \dots b_{p-1}' b_p' b_{p+1}' \dots)$$

$$B_2 (b_1'' b_2'' \dots b_{p-1}'' b_p'' b_{p+1}'' \dots)$$

$$B_3 (b_1''' b_2''' \dots b_{p-1}''' b_p''' b_{p+1}''' \dots)$$

stehen in der Beziehung zueinander, daß z. B. die Geraden $b_{p-1}' b_{p-1}'', b_{p+1}' b_p''$ und $b_p' b_{p+1}'''$ alle drei durch b_p''' gehen. Drücken wir das letztere wieder in der Sprache unserer Analogie aus, so können wir kurz sagen: Die polygonalen Punkte B_1, B_2, B_3 ergeben die harmonische Polare zu dem polygonalen Wendepunkt A .