

28.

Ueber die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen.

(Von Herrn Dr. F. Deahna zu Cassel in Hessen.)

Die Bedingungen, unter welchen eine gegebene Differentialgleichung von der Form $\sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m = 0$ durch eine einzige endliche Gleichung integrirt werden kann, sind bekannt; aber die zur Auffindung dieser Bedingungen angewendeten Methoden enthalten nicht zugleich den Beweis, dass dieselben zur Integrabilität der vorgelegten Gleichung hinreichen. Ich glaube daher eine Lücke auszufüllen, wenn ich in dem Folgenden einen solchen Beweis entwickele und denselben außerdem für den Fall erweitere, wo es sich um die Integration mehrerer Gleichungen der erwähnten Art durch eben so viele endliche Gleichungen handelt,

1. **Lehrsatz.** Soll eine lineäre Differentialgleichung

$$1. \quad dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m,$$

wo $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ Functionen der Veränderlichen x, x_1, x_2, \dots, x_n bezeichnen, durch eine einzige endliche Gleichung integrabel sein, so ist es nothwendig und hinreichend, dass ihre Variation verschwinde, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ um willkürliche Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_m$ wachsen, während x um $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m \delta x_m$ wächst.

Beweis. Hat die Gleichung (1.) eine einzige Stammgleichung, $x = F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$, so wird, wenn man $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ in $x + \Delta x, x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n$ verändert, noch immer $x + \Delta x = F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n, a)$ die Stammgleichung von $d(x + \Delta x) = \sum_{m=1}^{m=n} ((X_m + \Delta X_m) d(x_m + \delta x_m))$ sein, wo $X_m + \Delta X_m$ das bezeichnet, was durch die erwähnten Veränderungen aus X_m wird, $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots, \delta x_n$ aber beliebige von der Constante a unabhängige Größen

bedeuten. Die Gleichung $d(x + \Delta x) - \sum_{m=1}^{m=n} ((X_m + \Delta X_m) d(x_m + \delta x_m)) = 0$ wird also identisch, wenn man für $x + \Delta x$ den Ausdruck

$$F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n, a)$$

setzt. Anstatt dessen kann man aber offenbar $F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ statt x , und $\Delta F = F(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n, a) - F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, a)$ statt Δx setzen. Auf diese Art verschwindet der von $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n, \Delta x$

unabhängige Theil von $d(x + \Delta x) - \sum_{m=1}^{m=n} ((X_m + \Delta X_m) d(x_m + \delta x_m))$, näm-

lich $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$, von selbst. Soll nun für den übrigen Theil dieses Ausdrucks dasselbe Statt finden, so muß zuerst die Gesammtheit aller der Glieder, welche $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots, \delta x_n, d\delta x_1, d\delta x_2, \dots, \dots, d\delta x_n$ in der ersten Dimension enthalten, gleich Null werden. Um diese zu finden, braucht man bei der Substitution von ΔF statt Δx offenbar blofs auf die in $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ lineären Glieder Rücksicht zu nehmen. Bezeichnen wir den so erhaltenen Werth von Δx durch

δx ; er ist offenbar derselbe, welchen man aus $\sum_{m=1}^{m=n} X_m \delta x_m$ erhält, wenn man darin für x den obigen Ausdruck $F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ substituirt.

Man darf also auch $\sum_{m=1}^{m=n} X_m \delta x_m$ für δx , und eben so für dx , welches in

$d\delta x$ wieder vorkommen kann, den aus $x = F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ folgenden

Werth $\sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$ setzen, sobald man nur berücksichtigt, dafs zuletzt

statt x immer $F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ zu substituiren ist.

Auf diese Art wird man für die Variation von $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$ einen Ausdruck von der Form

$P_1 \delta x_1 + P_2 \delta x_2 + P_3 \delta x_3 + \dots + P_n \delta x_n + Q_1 d\delta x_1 + Q_2 d\delta x_2 + \dots + Q_n d\delta x_n$ bekommen, wo $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ blofs von $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ abhängen, und von selbst verschwinden müssen, sobald man in ihnen durch die Gleichung $x = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, a)$ die Gröfse a statt x einführt. Sind aber die so in Functionen von $a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ verwandelten Gröfsen $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ identisch gleich Null, so bleiben sie es auch, sobald man für a einen beliebigen andern Ausdruck setzt: folglich auch, wenn man für a rückwärts den aus der Gleichung $x = F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ folgenden Werth in $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x$ substituirt: oder die Ausdrücke

Q_1, Q_2, \dots, Q_n verschwinden nothwendig in der oben unmittelbar gefundenen Form von selbst. Die Größen $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ müssen nach dem Prinzip der Homogenität noch lineäre Functionen von $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$ sein, und können demnach nicht identisch verschwinden, wofern nicht in jeder die Coefficienten von $dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n$ einzeln gleich Null werden. Wir schliessen nun eben so, wie oben bei $Q, Q_1, Q_2, Q_2, \dots, Q_n$, das diese Coefficienten nach der Substitution des Ausdrucks $F(x_1, x_2, \dots, x_n, a)$ für x , nicht verschwinden können, wenn solches nicht auch vorher der Fall war. Man sieht also, das wenn die Gleichung

$$dx - \sum_{m=1}^{m=n} (X_m dx_m) = 0$$

durch eine endliche Gleichung integrabel sein soll, die Variation derselben für willkürliche Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \dots, \delta x_n$ von $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ und für $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m \delta x_m$, von selbst verschwinden muß, sobald darin $dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$ und $\delta x = \sum_{m=1}^{m=n} X_m \delta x_m$ gesetzt werden.

Ich will nun annehmen, diese Bedingung der Integrabilität finde Statt. Verwandelt man dann die Gleichung $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m = 0$ in eine andere, indem man statt x überall eine beliebige Function $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ von x_1, x_2, \dots, x_n und von einer neuen Veränderlichen z setzt, so wird offenbar die Variation der verwandelten Gleichung ebenfalls verschwinden, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ verändert werden, wie vorher, und wenn statt δz der aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dx_1} \delta x_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} \delta x_2 + \dots + \frac{d\varphi}{dx_n} \delta x_n + \frac{d\varphi}{dz} \delta z = \delta x = \sum_{m=1}^{m=n} Z_m \delta x_m$$

folgende Werth gesetzt wird, wo Z_1, Z_2, \dots, Z_n die aus X_1, X_2, \dots, X_n durch die Substitution $x = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ entstehenden Ausdrücke bezeichnen, und wo demnach δz wieder das ist, was aus dz wird, wenn man in der neuen Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot dz = \sum_{m=1}^{m=n} \left(Z_m - \frac{d\varphi}{dx_m} \right) dx_m$$

die Differentiale dx_1, dx_2, \dots, dx_n in die Variationen $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ verwandelt. Man kann nun die Function φ so wählen, das einer der Coefficienten $Z_m + \frac{d\varphi}{dx_m}$, etwa $Z_1 + \frac{d\varphi}{dx_1}$, verschwindet. Zu diesem Ende

darf man nur die Gleichung $dx = X_1 dx_1$ integrieren, indem man nur x und x_1 als variabel betrachtet, und dann den aus der Integralgleichung folgenden Werth von x in $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ und der willkürlichen Constante c für Φ , c selbst aber für die neue Veränderliche nimmt. Substituirt man diesen Werth von x in $dx - \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m = 0$, so werden die Glieder $\frac{dx}{dx_1} dx_1 - X_1 dx_1$ offenbar identisch verschwinden, und die transformirte Gleichung hat die Form:

$$dc = C_2 dx_2 + C_3 dx_3 + C_4 dx_4 \dots + C_n dx_n,$$

wo C_2, C_3, \dots, C_n Functionen von nur n Variabeln c, x_2, x_3, \dots, x_n sein können. Dem Obigen gemäß muß nämlich die Variation dieser Gleichung verschwinden, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ beliebige Incremente $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ bekommen, und c um $\delta c = \sum_{m=2}^{m=n} (C_m \delta x_m)$ wächst. Verändert man nun δx_1 allein, so hat man $\delta c = 0$, und folglich

$$0 = \frac{dC_2}{dx_1} \delta x_1 dx_2 + \frac{dC_3}{dx_1} \delta x_1 dx_3 + \dots + \frac{dC_n}{dx_1} \delta x_1 dx_n;$$

woraus $\frac{dC_2}{dx_1} = \frac{dC_3}{dx_1} = \frac{dC_4}{dx_1} \dots = \frac{dC_n}{dx_1} = 0$ hervorgeht, so daß $C_1, C_2, \dots, C_n, x_1$ nicht enthalten können. Setzt man wieder $dc = C_2 dx_2$ und integrirt unter der Voraussetzung der alleinigen Veränderlichkeit von x_2 und c , so kann man die Gleichung $dc = \sum_{m=2}^{m=n} C_m dx_m$ von neuem in eine andere zwischen nur $n-1$ Veränderlichen transformiren, und so fort, bis zuletzt bloß eine Gleichung mit zwei Variablen übrig bleibt. Da nun diese jedenfalls integrabel ist, so muß auch die gegebene Gleichung $dx = \sum_{m=1}^{m=n} X_m dx_m$, aus der sie abgeleitet worden, integrabel sein, w. z. b. w.

2. Ich will diesen Lehrsatz nun noch verallgemeinern, und sagen, daß wenn ein System von $n+1$ lineären Differentialgleichungen

$$I. \begin{cases} dx - ((00)da + (01)da_1 + (02)da_2 \dots + (0n)da_n) = 0, \\ dx_1 - ((10)da + (11)da_1 + (12)da_2 \dots + (1n)da_n) = 0, \\ dx_2 - ((20)da + (21)da_1 + (22)da_2 \dots + (2n)da_n) = 0, \\ \dots \\ da_n - ((n0)da + (n1)da_1 + (n2)da_2 \dots + (nm)da_m) = 0, \end{cases}$$

wo $(00), (01), (02) \dots (10), (12) \dots (n0), (n1) \dots (nm)$ gegebene Functionen der Veränderlichen $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ bezeichnen, durch

$n + 1$ endliche Gleichungen integrabel sein soll, dazu nothwendig und das es hinreichend ist, das die Variationen der links des Gleichheitszeichens stehenden Ausdrücke für beliebige Variationen $\delta a, \delta a_2, \delta a_3, \dots, \delta a_n$ der Grösten $a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, und für

$$\begin{aligned} \delta x &= (00)\delta a + (01)\delta a_1 + \dots + (0m)\delta a_m, \\ \delta x_1 &= (10)\delta a + (11)\delta a_1 + \dots + (1m)\delta a_m, \\ \delta x_2 &= (20)\delta a + (21)\delta a_1 + \dots + (2m)\delta a_m, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta x_n &= (n0)\delta a + (n1)\delta a_1 + \dots + (nm)\delta a_m \end{aligned}$$

identisch verschwinden, sobald für die in den Differentialen $d\delta x, d\delta x_1, d\delta x_2, \dots, d\delta x_n$ vorkommenden Grösten $dx, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ihre aus den gegebenen Gleichungen folgenden Werthe in $da, da_1, da_2, da_3, \dots, da_m$ gesetzt werden. Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf dieselben Principien wie der des schon behandelten einzelnen Falles. Man zeigt, wie vorher, das wenn die gegebenen Gleichungen $n + 1$ Stammgleichungen

$$\text{II. } \begin{cases} x = F(a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ x_1 = F_1(a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = F_n(a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

mit $n + 1$ willkürlichen Constanten $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ haben, die Variationen der Ausdrücke (I.) verschwinden müssen, wenn man für $\delta x, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ die oben angegebenen Ausdrücke setzt, nachdem darin statt x, x_1, x_2, \dots, x_n die durch die Gleichungen (II.) gegebenen Functionen substituirt worden sind. Nimmt man nun, ohne diese Substitutionen auszuführen, für $\delta x, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ die obigen Ausdrücke selbst, so hat man unter den Differentialen $dx, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, welche in $d\delta x, d\delta x_1, d\delta x_2, \dots, d\delta x_n$ vorkommen können, die Differentiale von $F(a, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n), F_1(a, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, F_n(a, a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ zu verstehen; diese aber erhält man aus den durch die Gleichungen (I.) gegebenen Werthen von $dx, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ gleichfalls durch Substitution der Functionen (II.) statt $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Die Variationen der ersten Glieder der Gleichungen (I.) werden demnach noch verschwinden, wenn man für $dx, dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ihre Werthe aus denselben Gleichungen, und für $\delta x, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ die ähnlichen angegebenen Ausdrücke setzt, nachher aber

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{da} &= 0, & \frac{dA_2}{da} &= 0, & \dots & \frac{dA_m}{da} &= 0, \\ \frac{dA'_1}{da} &= 0, & \frac{dA'_2}{da} &= 0, & \dots & \frac{dA'_m}{da} &= 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dA_1^n}{da} &= 0, & \frac{dA_1^n}{da} &= 0, & \dots & \frac{dA_m^n}{da} &= 0. \end{aligned}$$

Die Coefficienten A sind demnach von a unabhängig. Das vorliegende System von Gleichungen läßt sich nun eben so, wie das ursprünglich gegebene, in ein anderes mit einer um eine Einheit geringeren Anzahl veränderlicher Gröſen verwandeln, und man kann auf diese Weise fortfahren, bis nur ein System von $n + 1$ Gleichungen zwischen $n + 2$ Veränderlichen übrig bleibt. Dieses endlich ist stets integrabel, und folglich auch das gegebene, aus dem es nur durch wiederholte Transformationen gefunden wurde.

Aufgabe. Die Bedingungsgleichungen zu entwickeln, unter welchen ein System von $n + 1$ lineären Differentialgleichungen zwischen beliebig vielen veränderlichen Gröſen durch eben so viele endliche Gleichungen integrabel ist.

Auflösung. Es seien

$$\begin{aligned} dx - \sum_{p=0}^{p=m} (0p) da_p &= 0, \\ dx - \sum_{p=0}^{p=m} (1p) da_p &= 0, \\ \dots & \dots \\ dx - \sum_{p=0}^{p=m} (np) dx_p &= 0 \end{aligned}$$

die gegebenen Gleichungen. Nach dem bekannten Algorithmus des Infinitesimalcalculus kann man die bloß von der Veränderung von a herrührenden Theile der Variationen der Ausdrücke links des Gleichheitszeichens erhalten, wenn man nur in Bezug auf a variirt, $a, a_1, a_2, \dots a_n$ aber constant bleiben läßt. Wendet man dies zunächst auf die erste der gegebenen Gleichungen an, und bemerkt, daß unter dieser Voraussetzung $\delta x = (00) \delta a$, $\delta x_1 = (10) \delta a$, $\delta x_2 = (20) \delta a$, $\dots \delta x_n = (n0) \delta a$ wird, so bekommt man:

$$\delta dx - \sum_{p=0}^{p=m} \left(\frac{d(0p)}{da} \delta a + \frac{d(0p)}{dx} \delta x + \frac{d(0p)}{dx_1} \delta x_1 + \dots + \frac{d(0p)}{dx_n} \delta x_n \right) + (00) d\delta a = \\ \delta a_r \sum_{p=0}^{p=m} \left[\frac{d(00)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(00)}{dx_q} (qp) - \frac{d(0p)}{dx_q} (q0) \right) \right] da_p.$$

Auf dieselbe Art könnte man nun den von δa_1 abhängenden Theil von $\delta(dx - \sum_{p=0}^{p=m} (0p) da)$ suchen; es ist indessen leicht zu sehen: das man ihn aus vorstehendem Ausdruck erhalten muß, indem man a mit a_1 , (00) mit (01) , $(q0)$ mit $(q1)$ vertauscht; welches

$$\delta a_1 \sum_{p=0}^{p=m} \left[\frac{d(01)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_1} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(01)}{dx_q} (qp) - \frac{d(0p)}{dx_q} (q1) \right) \right] da_p$$

gibt. Aehnlich erhält man allgemein den von δa_r abhängenden Theil

$$\delta a_r \sum_{p=0}^{p=m} \left[\frac{d(0r)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(0r)}{dx_q} (qp) - \frac{d(0p)}{dx_q} (qr) \right) \right] da_p.$$

Da nun $\delta(dx - \sum_{p=0}^{p=m} (0p) da_p)$ die Summe dieser verschiedenen in δa , δa_1 , δa_2 , δa_m multiplicirten Glieder ist, so kann diese Variation nur dann unabhängig von δa , δa_1 , δa_2 , δa_m verschwinden, wenn die Coefficienten dieser veränderlichen Incremente einzeln gleich Null werden. Diese Coefficienten sind aber wieder Summen von der Form

$$M da + M_1 da_1 + M_2 da_2 + \dots + M_m da_m.$$

Sollen sie daher ohne irgend eine zwischen a , a_1 , a_2 , a_m festgesetzte Relation verschwinden, so müssen die Größen M , M_1 , M_2 , M_m einzeln gleich Null werden. Der allgemeine Typus der Gleichungen, welche man auf diesem Wege aus der ersten der gegebenen findet, ist

$$0 = \frac{d(0r)}{da_p} - \frac{d(0p)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(0r)}{dx_q} (qp) - \frac{d(0p)}{dx_q} (qr) \right).$$

Die einzelnen Bedingungen ergeben sich aus demselben, indem man nach und nach den Elementen r , p alle Werthe von 0 bis m ertheilt; die Anzahl derselben beläuft sich jedoch blofs auf so viele, als es Combinationen der Elemente 0, 1, 2, 3, m zu je zweien ohne Wiederholungen giebt, d. h. auf $\frac{m(m+1)}{1.2}$, indem der angegebene Typus für $p=r$ allemal von selbst serschwindet, und je zwei Gleichungen, in welchen p und r wechselseitig gleich sind, d. h., wo in der einen $p=a$, $r=b$, während in der andern $p=b$, $r=a$ ist, wesentlich dieselbe Bedingung enthalten. Um die aus der Gleichung

$$dx_k - \sum_{p=0}^{p=m} (kp) da_p = 0$$

entspringenden Bedingungen zu finden, darf man nur in der eben angegebenen die Coefficienten (Or) , (Op) mit (kr) , (kp) vertauschen; so gelangt man zu der allgemeinsten Form aller Bedingungsgleichungen des gegebenen Systems:

$$0 = \frac{d(kr)}{da_p} - \frac{d(kp)}{da_r} + \sum_{q=0}^{q=n} \left(\frac{d(kr)}{dx_q} (qp) - \frac{d(kp)}{dx_q} (qr) \right).$$

Diese Form giebt die einzelnen $k \cdot \frac{(n+1)m}{1.2}$ Bedingungen, wenn man k alle Werthe von o bis n , q und p alle Werthe von o bis m durchlaufen läßt.