Ueber das Malfatti'sche Problem.

Von Fr. G. Affolter in Solothurn.

Steiner hat in Band 1 des Crelle'schen Journals eine sehr elegante Construction dieser Aufgabe gegeben. Weder von Steiner selbst noch von einem Andern ist mir ein Beweis für den Fall des Kreisdreiecks bekannt. In dem Nachfolgenden soll zunächst ein solcher Beweis mitgetheilt werden. Alsdann füge ich noch die Lösungen zu zwei weiteren, dem Malfatti'schen Problem verwandten Kreisaufgaben hinzu.

I.

Beweis der Steiner'schen Construction.

Diese Construction beruht auf zwei ebenso einfachen, als interessanten und der mannigfaltigsten Erweiterung fähigen Sätzen über den Kreis und die Gerade. Wir geben diese Sätze unter dem Namen des ersten und zweiten Hauptsatz.

Erster Hauptsatz:

Trägt man von dem Scheitel S eines Winkels je auf dessen Schenkeln a und b die Punkte A und B ab, so dass $SA = SB$ und man legt durch irgend einen Punkt N in der Ebene des Winkels zwei beliebige Transversalen t_1 und t_2, welche die Schenkel des Winkels beziehendlich in den Punkten $a_1, b_1; a_2, b_2$ schneiden, und man beschreibt um diese Punkte beziehungsweise Kreise mit den Radien a_1A, b_1B; a_2A, b_2B, so schneiden sich je die zwei ersten und je die zwei letzten Kreise in Punktepaaren n_1', n_1''; n_2', n_2'', so dass alle diese Punkte von dem Punkte N gleiche Entfernung haben. Construirt man also zu jeder durch N gehenden transversalen t_x die Punkte n_x' und n_x'' so liegen diese Punkte auf einem Kreise N mit dem Mittelpunkte N.

Sind alle Transversalen mit einander parallel, so geht der Kreis N in eine Gerade $G(N)$ über; die normal ist zur transversalen Richtung. Diese Gerade $G(N)$ geht durch den Punkt o, in dem sich die Normalen zu den Schenkeln des Winkels schneiden, die durch die Punkte A und B gehen.

In Betreff der Kreise N hat man nachfolgende Sätze.

1. Alle Kreise N, deren Mittelpunkte auf einer Geraden G liegen, gehen durch zwei feste Punkte n' und n'', welche die Punkte n sind, die der Geraden G als Transversalen t entsprechen und umgekehrt.

---

*) Anm. d. Red. Vgl. indess Binder: Das Malfatti'sche Problem. Tübingen 1868; überhaupt Fortschritte der Mathematik, Bd. 2, S. 358 ff.

2. Alle Kreise, welche durch zwei Punkte n' und n'' gehen, sind Kreise von der Natur der Kreise N.

3. Alle Kreise N, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, gehen noch durch einen zweiten, dem ersten zugeordneten Punkt.

4. Durch zwei beliebig gewählte Punkte geht immer ein und nur ein Kreis N.

Durch weitere geeignete Betrachtungen ergeben sich eine Menge einfacher, schöner Resultate, welche in der Theorie des Kreises unbedingt massgebend sind. Wir machen hier nur die folgende Anwendung.

Sind irgend drei beliebige Kreise gegeben und man schneidet das durch ihre Mittelpunkte gebildete Dreieck durch irgend eine Transversale und beschreibt aus den Schnittpunkten als Mittelpunkten die Kreise, welche je zu der Kreisschaar gehören, die bez. durch die zwei Kreise bestimmt wird, deren Mittelpunkte auf derselben Seite liegen wie der Schnittpunkt, so schneiden sich diese drei Kreise in demselben Punktepaar. Lassen wir nun jene drei Kreise sich berühren, so folgt jetzt ohne weiteres, wenn wir diese drei transversalen Kreise Potenzkreise und ihre Schnittpunkte n' und n'' Potenzpunkte nennen:

5. Die Potenzpunkte zu allen Potenzkreisen, deren Centrallinien oder Transversalen durch denselben Punkt gehen, liegen auf einem Kreise N, dessen Mittelpunkt mit diesem Punkte zusammenfällt. Und die Potenzpunkte aller Potenzkreise mit parallelen Transversalen liegen auf einer, durch den Punkt gleicher Potenzen jener drei sich berührenden Kreise gehenden Geraden $G(N)$.

Liegen in der Ebene jener sich berührenden Kreise k_1, k_2, k_3 irgend drei Kreise m_1, m_2, m_3 vor, so bilden diese zu je zweien genommen drei Kreisschaaren. Beachten wir die Sätze 2 und 4, so erhalten wir:

6. In jeder der drei durch die drei Kreise m_x bestimmten Kreisschaaren giebt es einen Kreis von der Natur der Kreise N. Die Mittelpunkte dieser drei möglichen Kreise N_1, N_2, N_3 liegen auf einer Geraden $G(N)$.

Zweiter Hauptsatz.

Haben die zwei Kreispaare k_1, k_2 und k_1', k_2' dieselbe Potenzlinie P und berühren sich k_1 und k_1', wie k_2 und k_2' je in den Punkten b_1 und b_2, so sind die Tangenten des äussern oder innern gemeinsamen Tangentenpaares des einen Kreispaares beziehendlich parallel mit den Tangenten des äusseren oder inneren gemeinsamen Tangentenpaares des andern Kreispaares, je nachdem k_1' und k_2' die Kreise k_1 und k_2 gleich und ungleichartig berühren. Die Radien $k_1 b_1$ und $k_2 b_2$ schneiden sich in einem Punkte k_3, welcher der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die Kreise k_1 und k_2 in b_1 und b_2 berührt.

Dieser Satz lässt sich durch das Princip der reciproken Radien verallgemeinern. Transformiren wir zweimal, indem wir das erste Mal das Transformationscentrum auf der Potenzlinie P, das zweite Mal jedoch anderswo beliebig annehmen, so folgt:

7. Haben wir irgend zwei Kreisschaaren mit dem gemeinsamen Kreise K. Wird jeder der Kreise k_1 und k_2 der einen Schaar von je einem Kreise der zweiten Schaar berührt, z. B. k_1 von k_1' und k_2 von k_2', und beschreiben wir einen Kreis m_3, welcher k_1 und k_2 in gleicher Weise berührt wie k_1' und k_2', so giebt es allemal einen und nur einen bestimmten Kreis μ_3, welcher die Kreise k_1', k_2' und m_3 berührt und zwar m_3 in dem einen oder dem andern der Punkte p_3, in welchem der Kreis m_3 von dem Kreise K, der beiden Schaaren gemeinsam ist, geschnitten wird.

Lassen wir die Kreise k_1 und k_2 sich berühren und nehmen wir den oben definirten Kreis k_3 hinzu, so folgt:

8. Haben wir irgend drei Kreise k_1, k_2, k_3, die sich zu je zwei in den Punkten b_{12}, b_{23}, b_{31} (von aussen) berühren. Schneiden wir das durch die Mittelpunkte der Kreise k gebildete Dreieck durch eine beliebige Transversale t_y in den Punkten k_2', k_3', k_1' und beschreiben um diese Punkte die Potenzkreise zu jenen drei Kreisen k_1, k_2, k_3, so schneiden sich diese in den zwei Potenzpunkten n_y', n_y''. Beschreiben wir ferner die Kreise m_1, m_2, m_3, welche die Kreise k_1, k_2, k_3 zu je zweien berühren (von aussen), so schneidet der Kreis m_1 den Kreis k_1' in dem Punktepaar p_1. Ebenso erhalten wir die Punktepaare p_2 und p_3 durch die andern Kreise. Es giebt nun allemal einen und nur einen Kreis μ_1, welcher die Kreise k_2', k_3' und m_1 berührt und zwar den letzteren in dem einen oder andern der Punkte des Punktepaares p_1. Ebenso erhalten wir Kreise μ_2 und μ_3.

Betrachten wir von diesem Satze den speciellen Fall, wo wir nur den Kreis m_3 nehmen und ihn in eine Gerade, in die gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2 übergehen lassen. Es ist alsdann ohne weiteres Nachfolgendes klar.

Zu jeder Transversalen t_x gehören zwei Kreise μ_3^x, und auch wenn wir nur von dem Mittelpunkte μ_3^x sprechen, so gehören zu jeder Transversalen zwei Punkte μ_3^x und umgekehrt zu jedem Punkte μ_3 eine Transversale t_x. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen t_x und μ_3^x sind also festgestellt und wir haben, wie sich aus der Figur ohne weiteres ergiebt, folgenden Satz:

9. Dreht sich die Transversale t_x um einen beliebigen Punkt N, so durchlaufen die zugehörigen Punkte μ_3^x eine Parabel π_3, deren Axe durch N geht und zu der Tangente m_3 normal steht. Die Kreise μ_3^x berühren ausser der Tangente m_3 noch einen bestimmten Kreis S_3 und endlich liegen die zu den Transversalen gehörenden Potenzpunkte n auf dem Kreise N, dessen Mittelpunkt in N liegt. Die Parabel π_3, die Kreise S_3 und N schneiden sich in denselben zwei Punkten n_3', n_3'' der Tangente m_3.

Lässt man den Punkt N eine beliebige Gerade G durchlaufen, so gehen die Parabeln π_3 aller Punkte der Geraden G durch den Mittelpunkt μ_3 des Kreises, der dieser Geraden G als Transversalen entspricht. Die Kreise S_3 berühren diesen Kreis. Die Kreise N gehen durch die zwei Potenzpunkte, welche diesen Geraden G entsprechen.

Verlegen wir den Punkt N auf die Gerade G^∞, so gehen die Kreise N und S_3, so wie die Parabel π_3 in Gerade über, die wir mit $G(N)$, $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ bezeichnen, und wir haben:

10. Die Kreise μ_3 aller Transversalen t, welche einer bestimmten Richtung parallel sind, haben ihre Mittelpunkte auf der Geraden $G(\pi_3)$, sie berühren die Gerade $G(S_3)$, und die Potenzpunkte der zugehörigen Potenzkreise liegen auf einer Geraden $G(N)$. Welches auch die Richtung sein mag, der die Transversalen parallel sind, die Gerade $G(\pi_3)$ geht immer durch den bestimmten Punkt μ_3^∞; die Gerade $G(S_3)$ berührt immer den bestimmten Kreis μ_3^∞ und endlich $G(N)$ geht immer durch den Punkt o gleicher Potenzen der drei Kreise k. Der Kreis μ_3^∞ mit seinem Mittelpunkt μ_3^∞ ist der Kreis μ_3, welcher der Geraden G^∞ entspricht. Die drei Geraden $G(N)$, $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ schneiden sich in demselben Punkte n_3 der Tangente m_3.

Die Gerade $G(N)$ bestimmt also die andern Geraden $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ vollständig. Nehmen wir jetzt die Tangente m_2 hinzu, welche die Kreise k_1 und k_3 berührt, so haben wir hier zu jeder Graden $G(N)$ entsprechend die Geraden $G(S_2)$ und $G(\pi_2)$, die in Bezug auf die Tangente m_2 die gleiche Bedeutung haben wie $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ in Bezug auf die Tangente m_3.

Lassen wir beziehendlich die Geraden $G(S_2)$ und $G(S_3)$ wie $G(\pi_2)$ und $G(\pi_3)$ einander entsprechen, welche zu derselben Geraden $G(N)$ gehören, so folgt sowohl direkt aus den projectivischen Eigenschaften der Figur, als auch wenn man die bewiesene Construction für das geradlinige Dreieck voraussetzt, dass $G(S_2)$ und $G(S_3)$ in einem Durchmesser der Kreise k_1 zusammenfallen, sobald $G(N)$ durch den Schnittpunkt S_1 der Tangente m_2 und m_3 geht. Es geht auch dieser Durchmesser D durch den Punkt S_1. Transformiren wir die Figur nach dem Princip der reciproken Radien, und zwar so, dass der Kreis k_1 die Kreise, welche nur den Tangenten m_2 und m_3 entsprechen, gleichartig berührt, so geht der Durchmesser D in den äussern orthogonalen Potenzkreis über und wir haben den Lehrsatz:

11. Legt man durch die Schnittpunkte der Kreise m_2 und m_3 den Kreis N von der Natur der Kreise N, so berühren alle Kreise μ_2 und μ_3, welche zu den Transversalen gehören, die durch den Mittelpunkt des Kreises N gehen, den äusseren orthogonalen Potenzkreis der Kreise m_2 und m_3, sobald diese zwei von dem Kreise k_1 gleichzeitig berührt werden.

Nehmen wir den Kreis m_1, der die Kreise k_2 und k_3 (von aussen) berührt, hinzu, so erhalten wir ebenso zu m_1 und m_2 den Kreis N_3;

zu m_2 und m_3 den Kreis N_1 und zu m_3 und m_1 den Kreis N_2. Die Mittelpunkte N_1, N_2, N_3 liegen auf derselben Graden $G(N)$. (Satz 6.) Die Kreise μ_1, μ_2, μ_3 dieser Geraden $G(N)$ berühren also nach dem vorhergehenden Satze zu je zwei die drei äusseren orthogonalen Potenzkreise der drei Kreise m_1, m_2, m_3. *Führen wir die Construction zu dieser Thatsache aus, so haben wir die Steiner'sche Figur, die sich durch seine Construction ergiebt.*

II.

Behandlung einiger verwandter Aufgaben.

Aus dieser Darstellung sieht man ohne weiteres, wie man vorzugehen hat, um die entsprechende Aufgabe auf der Kugel und für Kugeln im Raume zur Lösung zu bringen. Für jetzt gebe ich noch die Lösungen zu zwei Specialfällen in der Ebene, jedoch, da die Beweise leicht zu führen sind, ohne Beweis.

Erste Aufgabe. Es sind drei Kreise m_1, m_2, m_3 beliebig in der Ebene gegeben. Man soll drei Kreise k_2, k_3, k_1 so finden, dass sich diese alle drei je zu zweien rechtwinklig schneiden und dass ferner k_2, k_3, k_1 je die Kreispaare m_3, m_1; m_1, m_2; m_2, m_3 rechtwinkelig schneiden.

Lösung. Man construirt die Potenzlinien p_{12}, p_{23}, p_{31} zu je zwei der drei Kreise. Sie schneiden sich in dem Punkt o. Man construirt die Pole P_{12}, P_{13} der Potenzlinien p_{12} und p_{13} in Bezug auf den Kreis m_1 und zieht die Gerade $P_{12}P_{13}$, welche die Centrale $m_2 m_3$ in dem Punkte a_1 schneidet. Ebenso construirt man die Punkte a_2 und a_3. Es liegen dann diese Punkte auf einer Geraden A. Die Gerade $P_{12}P_{13}$ oder die Polare der Potenzpunkte o in Bezug auf den Kreis m_1 schneide p_{12} in dem Punkt b_1. Die Polare B_1 dieses Punktes in Bezug auf den Kreis m_1 schneidet p_{13} in dem Punkte b_2'. Wir verbinden a_1 mit b_2' durch die Gerade, welche p_{12} in dem Punkte b_1' schneidet, ziehen ferner oP_{12} und errichten zu dieser Geraden die Normale, welche durch den Mittelpunkt m_1 geht. Diese schneide p_{12} in dem Punkte o'. Die zwei Punktepaare b_1, b_1' und o, o' bestimmen, je als zugeordnete Punkte eines jeden Paares betrachtet, eine Involution 2. Grades. Dessen Doppelpunkte seien k_3 und k_3', so sind dies die Mittelpunkte der gesuchten Kreise k_3. Verbinden wir a_1 mit k_3 und k_3' durch Gerade, so schneiden sie p_{13} in den Punkten k_2 und k_2'. Ziehen wir die Geraden a_3k_2, a_3k_2' und a_2k_3, a_2k_3' so schneiden sich diese paarweise in den Mittelpunkten k_1 und k_1' der dritten Kreise. Die Kreise k_1, k_2, k_3 geben die erste und die Kreise k_1', k_2', k_3' die zweite Lösung.

Für das geradlinige Dreieck folgt:

12. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks als Durchmesser Kreise, so schneidet jeder Kreis die zugehörige Höhe des Dreiecks in *zwei Punkten. Von diesen drei Punktepaaren liegen dreimal je zwei auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der nicht zugehörigen Ecke des Dreiecks liegt. Diese drei Kreise schneiden sich rechtwinkelig.*

Zweite Aufgabe. Es sind drei Kreise m_1, m_2, m_3 gegeben; man soll drei Kreise k_2, k_3, k_1 so finden, dass sich diese gegenseitig zu je zweien berühren, und dass insbesondre k_2 die Kreise m_1 und m_3; k_3 die Kreise m_1 und m_2 und endlich k_1 die Kreise m_2 und m_3 rechtwinkelig schneidet.

Auflösung. Man beschreibt die acht Kreise R, welche die drei Kreise m_1, m_2, m_3 berühren. Es berühre z. B. der Kreis R_1 in den Punkten b_1, b_2, b_3. Man zieht in diesen Punkten die Tangenten an die Kreise, so sind die Ecken des dadurch gebildeten Dreiecks die Mittelpunkte für drei Kreise k_1, k_2, k_3.

Bemerkung. Für irgend drei Kreise, welche durch denselben Punkt gehen, ergeben sich bei jeder Aufgabe, welche verlangt, jene drei Kreise durch andre Kreise unter bestimmten Winkeln nach gewissen Gesetzen zu schneiden, halb so viele Auflösungen als wenn die drei Kreise *nicht* durch denselben Punkt gehen, sondern allgemeine Lage haben. Findet nämlich Letzteres statt, so sind je zwei Lösungen einander so beigeordnet, dass die eine die polarreciproke Figur der andern ist, in Bezug auf den Orthogonalkreis der drei Kreise als Transformationskreis. Ist der Orthogonalkreis imaginär, so ändert dies an der Sache nichts, indem an seine Stelle alsdann ein anderer Kreis k tritt, der von jenen drei je über einem Durchmesser geschnitten wird. Bezeichnen α und β die Centralabstände zweier entsprechender Punkte und r den Radius des Orthogonalkreises (falls dieser imaginär, so soll r der Radius des Kreises k sein) so hat man im ersten Falle die Relation $\alpha \cdot \beta = r^2$ und im zweiten Falle $\alpha \cdot \beta = -r^2$.

Das heisst: im ersten Fall liegen die Punkte vom Mittelpunkt des Transformationskreises in gleicher Richtung, im zweiten Fall in entgegengesetzter.

Gehen die drei Kreise durch denselben Punkt, so wird der Orthogonalkreis gleich Null, und ebenso reduciren sich die Kreise je der einen von zwei einander entsprechenden Lösungen auf Null, d. h. fallen in jenen gemeinsamen Punkt.

Eigenschaften, die zwischen den Lösungen existiren, die zu drei Kreisen durch einen Punkt gehend gehören, lassen sich nun jedesmal sehr leicht auf die Lösungen zu drei Kreisen in allgemeiner Lage übertragen, nur dürfen von diesen letztern keine zwei einander entsprechende sein.

Aehnliches gilt von vier Kugeln im Raume.

Pisa, den 27. Januar 1873.