

G. L. LAGRANGE

nella vita e nelle opere.

(Di GINO LORIA, a Genova.)

« Va d'un air simple à la vérité qu'il aime ;
la vérité lui sourit et quitte volontiers
sa retraite pour se laisser produire au
grand jour par un homme aussi mo-
deste ».

POINSON.

Simpatie od avversioni personali, devozione di discepoli o gelosie di scuole, riconoscenza per benefici ricevuti o rancore per ripulse subite, tutto congiura per ottenebrare le opinioni sopra grandi o piccoli uomini dei contemporanei o dei posterì immediati. Ma il giudizio pronunziato sopra i personaggi veramente rappresentativi, dopo un secolo dal giorno in cui scesero nella pace del sepolcro, dopo che si spensero quietamente persino gli ultimi echi delle passioni che si agitarono attorno ad essi, dopo che l'umanità nel suo incessante moto progressivo seppe distinguere e separare le scorie dal nobile metallo, si può considerare per definitivo. Tale deve, dunque, ritenersi quello che oggi viene pronunziato sopra il sommo Scienziato di cui ora l'universalità dei matematici, addolorati e plaudenti, commemorano il primo centenario della deplorata dipartita.

Al coro di voci, concordemente laudative, che in impressionante armonia si sprigiona da questi volumi dei venerabili *Annali di Matematica*, parve opportuno dovesse aggiungersene una, per quanto modestissima, che compendiasse in rapidissima sintesi i mirabili frutti da lui raccolti negli svariati campi ai quali consacrò le solerti e geniali sue cure. Ma poichè l'esame dell'opera mal si scompagna dalla contemplazione dell'artefice, così si ritenne necessario di segnare anche le date dei pochi momenti in cui la traiettoria generalmente tanto regolare dell'esistenza del nostro grande compatriota

presentò improvvisi mutamenti di direzione; il che parve tanto più consigliabile dal momento che le tre epoche, nelle quali la sua vita naturalmente si ripartisce, hanno un perfetto riscontro nella sua attività scientifica: periodo di intensa e fervida preparazione a Torino, periodo di massima produzione originale a Berlino, periodo di grande attività ufficiale e didattica a Parigi.

I. - A TORINO.

1. La famiglia Lagrange è oriunda dalla Turenna; ma verso la metà del secolo XVII si trapiantò in Italia, ove non tardò a porre salde radici. Il bisnonno del grande matematico, dopo avere raggiunto il grado di capitano nell'esercito francese, abbandonò il servizio di Luigi XIV per venire alla corte di Savoia, ove ben presto seppe acquistare la piena fiducia del Duca Carlo Emanuele II, il quale gli affidò missioni delicate e volle dare una solenne attestazione della stima che per lui professava dandogli in moglie una parente di Michelangelo Conti, colui che, sotto il nome d'Innocenzo XIII, doveva occupare la cattedra di S. Pietro dal 1721 al 1724. Il favore di cui godeva il bisavolo continuò al nonno del sommo geometra (la cui moglie fu la contessa Bormiolo di Vercelli); sta a provarlo il fatto che per lui venne creata la carica di Tesoriere della R. Intendenza delle Fabbriche e Fortificazioni, la quale rimase nella famiglia Lagrange sino al momento (1800) in cui fu abolita. Tale ufficio fu occupato anche dal padre del nostro scienziato, il quale ebbe per moglie Teresa Gros, unica figlia di un medico di Cambiano. Da questo matrimonio nacquero ben undici figli, di cui sopravvissero soltanto due: l'ultimo ed il primo, Giuseppe Luigi, il quale vide la luce a Torino nel Quartiere di S. Agnese vicino alla Chiesa della Madonna degli Angioli ⁽¹⁾ addì 25 gennajo 1736 ⁽²⁾.

Alcune mal riuscite speculazioni finanziarie avendo distrutta la fortuna della famiglia Lagrange, il padre pensò di avviare il suo primogenito alla lucrosa professione di avvocato, progetto al quale questi si dichiarò favorevole in massima; se non che, avendo intrapreso lo studio della fisica e della geometria sotto la guida del P. Beccaria e del Revelli, ebbe ben presto la chiara visione della propria naturale vocazione e relegò in soffitta codici e pandette. Innamorato da principio della geometria, l'abbandonò ben presto per

consacrarsi all'analisi, nella quale ravvisava maggior forza e più vasto campo d'applicabilità ⁽³⁾; e, senz'alcun ajuto, si pose in grado di intendere (a soli diciassette anni!) le opere di Newton, di Leibniz, dei Bernoulli e di Eulero, che con piena ragione erano allora considerate come le basi di qualsiasi istruzione matematica superiore. Siffatta lettura suscitò in lui tal folla di pensieri originali e straordinariamente fecondi che, contemplando nel suo insieme la sua produzione scientifica, vien fatto di ripetere con Alfredo de Vigny: « Qu'est-ce qu'une grande vie? Une pensée de jeunesse réalisée par l'âge mûr ».

2. La cronologia dei lavori di Lagrange è in massima parte mal sicura; chè, come è noto, gli atti accademici in cui essi vennero inseriti non rispecchiano fedelmente lo svolgersi degli avvenimenti; onde, mancando quei lavori, di regola, di una data indicante il giorno in cui ne venne completata la stesura, quando, come succede in generale, non si conosca la seduta accademica in cui ne fu data lettura, per determinarne il posto, fa mestieri ricorrere ad indizi indiretti od anche a semplici congetture. Gli uni e le altre trovano spesso solida base nel carteggio scientifico che il Nostro tenne con gli scienziati del suo tempo, carteggio che, pur troppo, non ci venne integralmente conservato ⁽⁴⁾, ma del quale però fortunatamente possediamo elementi estesi ed oltre ogni dire preziosi.

Gli è appunto con tale mezzo, e precisamente servendosi delle lettere che egli scrisse al Fagnano e ad Eulero, che si arriva a progettare qualche raggio di luce sopra gli inizi della sua vita scientifica. Si apprende così che in principio dell'estate dell'anno 1754 il diciottenne geometra era intento ad investigare le relazioni fra potenze e differenziali che dovevano dar materia alla sua prima pubblicazione scientifica ⁽⁵⁾, condurlo alla sua prima scoperta e procurargli, poco dopo, una delusione amarissima, quando, cioè, egli si accorse di essere stato prevenuto in tale scoperta da Leibniz ⁽⁶⁾. Ammesso per vero che questa dolorosa constatazione di fatto abbia prodotta in lui un'impressione talmente angosciosa da farlo cadere in deliquio ed indurlo a chiedersi melanconicamente se non fosse meglio abbandonare per sempre un campo di ricerche, ove gli sembrava non rimanesse che spigolare, in campi mietuti da sommi predecessori ⁽⁷⁾, questo stato di scoraggiamento dovette essere di corta durata. Il giovane Anteo, dal suo contatto con la terra, trasse potenti stimoli e nuove forze ad operare; sta a dimostrarlo il fatto che sino dal 30 ottobre 1754 era in grado di partecipare al Fagnano qualche nuovo risultato conseguito nella Teoria delle curve tautocrone ⁽⁸⁾, tèma che, come vedremo, egli continuò a coltivare, raccogliendone frutti di tale valore

da destare l'ammirazione di alcuni e l'invidia di altri. Poco dopo egli si incamminò per la via che doveva condurlo al Calcolo delle variazioni (quello fra i suoi trovati che egli sopra ogni altro prediligeva) ⁽⁹⁾; stanno a provarlo due lettere entrambe dirette ad Eulero, una delle quali (datata 12 agosto 1755) contiene l'applicazione della nuova procedura analitica ad una questione proposta dal grande geometra di Basilea ⁽¹⁰⁾, mentre l'altra (del 20 novembre 1755) contiene una soluzione del problema della Brachistocrona informata ai medesimi principi ⁽¹¹⁾.

3. Ora se quella lettera a stampa diretta al Conte di Fagnano appare oggi ben piccola cosa in paragone alle opere che assicuraron poi a Lagrange una fama imperitura, al biografo essa si presenta come un avvenimento di notevole importanza per l'influenza che essa esercitò sullo svolgimento della carriera del nostro matematico: chè indubbiamente essa non fu estranea al conseguimento dell'unico pubblico ufficio che egli ricoprì in patria. Conferitogli con R. Decreto del 26 settembre 1755 ⁽¹²⁾, con lo stipendio annuo di scudi 250, venne annunciato da Lagrange a Fagnano il 24 dicembre dello stesso anno con le seguenti parole: « Del resto non debbo tacerle l'impiego di fresco da S. M. conferitomi di Maestro nelle R. Scuole Matematiche d'Artiglieria, il che certamente, per essere io giovane di non ancora 20 anni, è stato da tutti reputata per una cosa particolare e meravigliosa » ⁽¹³⁾. L'istituto ove fu chiamato il nostro geometra è quello che, dopo parecchie radicali trasformazioni, divenne l'attuale R. Accademia Militare di Torino; che ivi, assai più facilmente che nella Università, Egli potesse esplicare le straordinarie sue doti di analista, emerge tenendo presenti le condizioni in cui questa allora versava ⁽¹⁴⁾; che l'aspettazione del governo sardo non sia andata delusa è provato dal riassunto di un corso sopra i *Principi di Analisi sublime* tenuto dal giovane professore, di cui una copia esiste a Torino nella Biblioteca del Duca di Genova; su di esso ci sentiamo esonerati dall'estenderci essendone di pubblica ragione almeno il piano generale ⁽¹⁵⁾.

Tuttavia sembra che il posto ottenuto da Lagrange non lo appagasse che mediocrementemente, giacchè, pochi mesi dopo di averlo occupato, egli invocava l'aiuto di Eulero per conseguirne uno migliore in Germania ⁽¹⁶⁾; ed il grande analista svizzero, nell'attesa di poter giovare al suo giovane amico, lo faceva nominare (2 settembre 1756) socio corrispondente dell'Accademia di Berlino ⁽¹⁷⁾, secondo taluni ⁽¹⁸⁾ in ricompensa di una memoria sopra il tanto controverso *principio della minima azione*, da lui presentata a quel sodalizio in appoggio alle vedute manifestate dal presidente Maupertuis, mentre ferveva vivissima la famosa sua disputa con S. König ⁽¹⁹⁾.

Altro avvenimento di capitale importanza nella vita del Nostro fu la fondazione in Torino nel 1757 di una Società scientifica privata, dovuta all'iniziativa del Conte Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio, assiduo cultore degli studi chimici, validamente coadiuvato da Lagrange e dal medico Giovanni Cigna, Società che doveva più tardi trasformarsi nell'attuale R. Accademia delle Scienze di Torino, la quale, riunendo in un fascio tutti coloro che in Piemonte dedicavansi alle scienze positive, esercitò un'influenza oltre ogni dire benefica e che tuttora continua ⁽²⁰⁾.

A far conoscere favorevolmente nel mondo matematico il novello corpo scientifico valsero in particolar modo le memorie che Lagrange inserì nei cinque volumi designati ordinariamente col nome di *Miscellanea Taurinensia*; memorie delle quali ci corre l'obbligo di indicare, sia pur succintamente, gli argomenti, le conclusioni, il valore ⁽²¹⁾, perchè complessivamente rappresentano, con sufficiente approssimazione, la produzione del primo periodo di vita scientifica del personaggio che ci occupa.

4. Un gruppo di lavori giovanili di Lagrange concerne la teoria dei massimi e minimi. Il Maclaurin nel suo celebre *Treatise on fluxions* (§§ 238 e 857) aveva esposte le condizioni di massimo o di minimo per le funzioni ad una variabile; all'estensione di tali criterî a funzioni con parecchie variabili il Nostro dedicò il suo primo contributo ai *Miscellanea Taurinensia* ⁽²²⁾, il quale (come egli stesso dichiara) è un preludio allo scritto ⁽²³⁾ mediante cui egli, per soddisfare ad un voto formulato da Eulero ⁽²⁴⁾, gettò le basi del Calcolo delle variazioni. In tale nuovo lavoro egli, per dimostrare la fecondità dei nuovi principî, oltre a confermare risultati anteriormente ottenuti sopra il problema delle brachistocrone, oltre al dimostrare per via analitica il teorema di Cramer sul massimo dell'area dei poligoni piani rettilinei aventi lati assegnati, stabilì per primo l'equazione differenziale delle superficie d'area minima:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0, \text{ ove } p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Volgendosi poi alla dinamica diede un'ampia estensione ad un principio dovuto ad Eulero e ne fece applicazione a quei problemi concernenti il moto dei solidi e dei fluidi che allora destavano il più vivo e generale interesse.

I nuovi procedimenti analitici escogitati da Lagrange riscossero subito la più entusiastica approvazione da parte di Eulero, che ne fece ulteriori applicazioni e propose di costituire con essi una nuova branca dell'analisi su-

blime, da designarsi appunto col nome di « Calcolo delle variazioni » ⁽²⁵⁾; per converso vennero aspramente, ma altrettanto infelicamente, combattuti dal Fontaine ⁽²⁶⁾ e furono, con palese mala fede, attribuiti a torto ad Eulero dai PP. Le Seur e Jaquier nei loro ben noti *Éléments du Calcul intégral* (Parma, 1768). Ciò costrinse Lagrange a scrivere un secondo lavoro ⁽²⁷⁾ per rivendicare a sè stesso la paternità del nuovo algoritmo, per invitare i competenti a paragonare questo ai procedimenti usati dal Fontaine e per rispondere ad alcune obiezioni mossegli dal Borda ⁽²⁸⁾; aggiungendo poi nuovi sviluppi dottrinali, egli assicurò importanza permanente ad un lavoro che, altrimenti, sarebbe stato annoverato, piuttosto che fra le memorie scientifiche, fra i documenti umani.

5. Il calcolo delle variazioni rappresenta il più celebre e forse il più importante contributo, ma non l'unico, dato dal giovane Lagrange al calcolo integrale. Infatti nel Volume I dei *Miscellanea* si trova anzitutto una memoria ⁽²⁹⁾ destinata ad estendere alle equazioni lineari a differenze finite i metodi in uso per le analoghe equazioni differenziali; cosa importante in sè e per le applicazioni a bellissime questioni della teoria delle probabilità. Notiamo che tale argomento egli abbandonò subito perchè Laplace lo scelse come soggetto di importanti ricerche (v. i Volumi VI e VII dei *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie de Paris*), ma vi ritornò poi verso il 1775 con una memoria ⁽³⁰⁾ che Poisson non esitò a proclamare « un des plus beaux ouvrages de Lagrange » ⁽³¹⁾ e nella quale la teoria delle serie ricorrenti e quella delle equazioni a differenze finite vengono ulteriormente perfezionate sì da renderle atte alla risoluzione di nuovi importanti problemi della teoria delle probabilità ⁽³²⁾. In un punto, però, tali ricerche esigevano un complemento, come ebbe a rilevare G. F. Malfatti ⁽³³⁾, ed era di contemplare il caso che avesse radici eguali l'equazione $A_0 + A_1 \alpha + \dots + A_n \alpha^n = 0$, dalla quale Lagrange fa dipendere lo studio della serie ricorrente determinata dalla relazione $A_0 y_x + A_1 y_{x+1} + \dots + A_n y_{x+n} = 0$; ora anche ciò venne fatto dal Nostro, anzi in parecchi modi, tutti soddisfacentissimi ⁽³⁴⁾.

6. Nello stesso Volume I dei *Miscellanea* si legge ancora una memoria ⁽³⁵⁾ contenente metodi nuovi per integrare alcune classi di equazioni differenziali suggerite dall'investigazione del movimento dei fluidi e sagaci osservazioni intorno alla famosa controversia sulla generalità della soluzione del Problema delle corde vibranti espressa dalla nota formola

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \beta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{b} + \dots$$

Maggiore notorietà (e con pieno diritto) conseguì una terza memoria dedicata all'equazione differenziale ellittica ⁽³⁶⁾, nella quale Lagrange, partendo dall'analoga equazione relativa a funzioni circolari, arriva per una via piana e luminosissima al notissimo risultato ottenuto da Eulero « *potius divinando* ». Le considerazioni svolte dal nostro matematico non tardarono a divenir classiche e furono riprodotte nelle migliori trattazioni delle funzioni ellittiche, onde non è il caso di arrestarsi su di esse; meno note sono quelle in cui il grande geometra applica lo stesso metodo ad altre classi di equazioni differenziali e che meriterebbero ulteriore studio, per trarne tutte le conseguenze di cui sono tuttora gravide.

7. Di questioni analitiche collegate a ricerche fisico-matematiche trattano tre memorie di acustica teorica ⁽³⁷⁾; esse contengono contributi importanti alla teoria delle corde vibranti, giacchè ivi « in mezzo ad una dovizia infinita di nuovi artifizi analitici sono gettate le basi di quei metodi che, ampliati poi e fecondati dal genio di Fourier, divennero uno dei più efficaci stromenti della moderna fisica matematica » ⁽³⁸⁾.

Apprezzatissimo dai competenti in materia fu pure un lavoro sopra il moto di un punto attratto da due centri fissi ⁽³⁹⁾, ove Lagrange volle e seppe emanciparsi dall'ipotesi restrittiva, fatta dai predecessori, che il moto accadesse sempre in un piano passante per la retta congiungente i punti dati. Benchè egli abbia dovuto constatare poi con dolore che Eulero aveva avuta prima la medesima idea, pure egli seppe trattare la questione con tanta generalità ed eleganza che un secolo dopo, un altro scienziato di primo ordine, giudicò non indegno di lui l'espone la soluzione a vantaggio dei propri conterranei ⁽⁴⁰⁾.

Sorvolando sopra una memoria ⁽⁴¹⁾ intesa a dare qualche fondamento dottrinale al procedimento empirico della « rastremazione delle colonne », perchè alcuni errori materiali di calcolo infirmano i risultati stabiliti, nel chiudere questa rapida rassegna dei contributi dati dal Nostro alla prima serie delle Memorie accademiche torinesi ⁽⁴²⁾, faremo cenno delle sue ricerche sull'uso della media aritmetica fra i risultati di parecchie osservazioni ⁽⁴³⁾; se anche recenti indagini storiche accuratissime hanno posto in luce che sopra tale strada egli ebbe quale precursore T. Simpson ⁽⁴⁴⁾, pure il suo scritto è sempre giudicato come semplice, chiaro, decisivo in una questione oscura, spinosa, delicata ⁽⁴⁵⁾, onde occupa una posizione cospicua nella preistoria della teoria dei minimi quadrati.

8. L'invio a d'Alembert del primo volume degli Atti della Società scien-

tifica torinese servì a Lagrange a stabilire una nuova relazione che, trasformandosi rapidamente in salda amicizia, fu feconda di risultati della più vasta portata. Esaminati gli scritti contenuti in quel volume, il celebre enciclopedista francese, in data 27 settembre 1759, scriveva a Lagrange: « vous êtes destiné, si je ne me trompe, à jouer un grand rôle dans les Sciences et j'applaudis d'avance à vos succès » ⁽⁴⁶⁾ e quattro anni dopo (1.º ottobre 1763) confermava tale suo giudizio col parere di Eulero, scrivendo: « J'ai eu occasion de voir dans un voyage à Berlin M. Euler, qui fait de vous tout le cas que vous méritez, et qui vous regarde avec raison comme destiné à reculer loin les limites de la haute Géométrie » ⁽⁴⁷⁾. Queste lusinghiere espressioni fecero sorgere in Lagrange il desiderio di conoscere di persona il suo illustre corrispondente, nonchè gli altri matematici di Parigi; l'occasione di soddisfarlo gli fu offerta dal trasferimento da Torino a Londra del marchese Domenico Caraccioli, ambasciatore del Re di Napoli. In sua compagnia egli lasciò nel novembre 1763 la capitale del Regno di Sardegna, per recarsi a Parigi, ed ivi rimase sino al mese di maggio del seguente anno. Benchè tale soggiorno sia stato funestato da una non lieve malattia ⁽⁴⁸⁾, esso lasciò nel Nostro i più lieti ricordi, per le festose accoglienze e le manifestazioni di stima di cui gli furono larghi — oltre che d'Alembert — Clairaut, Condorcet, Fontaine, Nollet, Marie ed altri scienziati.

Appunto in quest'epoca Gli venne conferita dall'Accademia delle Scienze di Parigi la prima delle numerose distinzioni che ne doveva ottenere nel corso della Sua vita; alludiamo al premio concesso allo scritto sulla librazione della luna ⁽⁴⁹⁾, presentato per rispondere alla seguente questione: « Si l'on peut expliquer par quelque raison physique pourquoi la Lune nous présente toujours à peu près la même face; et comment on peut déterminer par les observations et par la théorie si l'axe de cette Planète est sujet à quelque mouvement propre, semblable à celui qu'on connaît dans l'axe de la Terre et qui produit la précession des equinoxes et la nutation ». Il lavoro, con cui egli tentò rispondere e che fu ritenuto meritevole di premio, non risolve, a dir vero, completamente la questione, ma rappresenta un primo passo in una direzione, muovendosi nella quale il grande matematico doveva, sedici anni più tardi, giungere alla completa spiegazione del curioso fenomeno; esso poi possiede grande importanza storica, come quello che contiene la prima applicazione del Principio delle velocità virtuali.

Il successo conseguito da Lagrange in un arringo, a cui la più celebre Accademia d'Europa aveva invitati tutti i dotti del mondo, produsse una

grande, generale e ben giustificata impressione. Non soltanto Luigi Dutens nel preparare la sua ben nota edizione delle *Opere di Leibniz* volle accaparrarsi la collaborazione di Lagrange per quanto concerneva gli scritti matematici di quel grande ⁽⁵⁰⁾, ma Carlo Emanuele I cominciò ad accorgersi che la sua corona conteneva una gemma preziosissima che egli dianzi non sospettava esistesse; onde egli ed i suoi ministri non risparmiarono lodi, incoraggiamenti, promesse al giovane geometra, senza però riuscire a concretare nulla che valesse a migliorarne le condizioni economiche e sociali ⁽⁵¹⁾.

9. Una totale metamorfosi nell'esistenza del nostro eroe doveva accadere poco appresso per effetto di un avvenimento congenere succeduto ad Eulero. Questi era sino dal 1741 Direttore della Classe di matematica di quell'Accademia ⁽⁵²⁾ che, fondata a Berlino l'11 luglio 1700 dall'Elettore di Brandeburgo, per ispirazione e sotto la direzione di Leibniz, dopo quarant'anni di torpido languore, era stata richiamata a vita novella nel 1740, dopo l'avvento al trono del sovrano illuminato, che va nella storia sotto il nome di Federico il Grande. Questi, dopo avere riconosciuto che l'Accademia prusiana non poteva disimpegnare l'alto ufficio affidatole di promotrice del progresso nel campo scientifico e letterario, ove si giovasse esclusivamente delle forze intellettuali offerte dal nuovo Regno, decise di farle assumere un carattere internazionale, chiamando nel suo seno tutti i pensatori che fossero disposti a portarvi il contributo del proprio sapere e della propria esperienza. L'invito da lui rivolto fu tosto accettato dall'Algarotti e dal Maupertuis. Questi finchè visse fu presidente dell'Accademia; dopo la sua morte (27 luglio 1759) tale carica rimase apparentemente vacante, ma di fatto chi dirigeva i lavori accademici e suggeriva la scelta del personale era il d'Alembert, la recondita ninfa Egeria del Grande sovrano. Ed è appunto per avere con amarezza riconosciuto che occupava nell'Accademia di Berlino una posizione subalterna, rispetto a quella di cui godeva un matematico a lui indiscutibilmente inferiore ⁽⁵³⁾, che Eulero cedette alle reiterate sollecitazioni che gli venivano di continuo dalla corte di Russia e decise di ritornare a Pietroburgo ad infondere nuova vita a quell'Accademia, divenuta anemica e clorotica dopo che egli l'aveva abbandonata.

Non appena d'Alembert ebbe sentore di siffatta decisione chiese a Lagrange se fosse disposto a succedere al grande analista svizzero ⁽⁵⁴⁾; ed avutane risposta affermativa ⁽⁵⁵⁾, si affrettò a presentare la relativa proposta a Federico II.

Nel frattempo l'Accademia di Parigi conferiva a Lagrange il premio per

l'anno 1766, in seguito alla presentazione di una memoria sopra i movimenti dei satelliti di Giove ⁽⁵⁶⁾. Tale fatto produceva una nuova profonda impressione ed un'agitazione vivissima nella corte di Sardegna; nuove promesse generiche vennero fatte da parte dei ministri del tempo ⁽⁵⁷⁾; ma poichè esse non traducevansi in alcun progetto concreto ⁽⁵⁸⁾, Lagrange decise di accogliere l'invito di essere trasferito a Berlino, non appena d'Alembert glielo fece in nome del Re di Prussia ⁽⁵⁹⁾ (la posizione che gli veniva offerta era quella di Membro ordinario di quell'Accademia e di Direttore della Classe di matematica, con lo stipendio annuo di scudi 1500) ⁽⁶⁰⁾. In conformità di tale suo intendimento il nostro matematico presentò al proprio Re una domanda di congedo. Ogni sorta di mezzi fu posta in azione per fargliela ritirare ⁽⁶¹⁾, ma indarno; e quando il Re italiano ricevette dal Sovrano tedesco una pressante sollecitazione a non ostacolare più oltre l'esaudimento di quella domanda, Lagrange poté finalmente (5 luglio 1766) annunziare al suo protettore ed amico che ormai nulla si opponeva alla propria partenza da Torino ⁽⁶²⁾. Ed infatti il 21 agosto seguente egli abbandonò la sua città natale, ove non doveva più ritornare; dopo un soggiorno di due settimane a Parigi, lo troviamo (20 settembre) a Londra, ospite del marchese Caraccioli; di là s'imbarcò per Amburgo diretto a Berlino, ove arrivò il 27 ottobre 1766 ⁽⁶³⁾.

II. - A BERLINO.

10. Giunto alla sua destinazione Lagrange entrò subito in carica, tanto che addì 6 novembre 1766 pronunciò alcune parole inaugurali, che vennero religiosamente conservate ⁽⁶⁴⁾. Cordialmente accolto dal suo nuovo sovrano, che ne ammirava l'instancabile fecondità ⁽⁶⁵⁾, e felicitato da Eulero, che soltanto dolevasi di non averlo seco a Pietroburgo ⁽⁶⁶⁾, egli non incontrò qualche difficoltà che nei suoi rapporti con Castillon, il quale vantava diritti di precedenza sul posto al quale era stato chiamato Lagrange ⁽⁶⁷⁾. Ma ciò non valse a turbarne la serenità nè ad impedirgli di palesarsi, per assiduità e fertilità, degno successore di Eulero; giacchè nel ventennio che passò a Berlino poté, oltre che adempiere a tutte le gravi incombenze annesse agli uffici che occupava, leggere una memoria ogni mese, il che è tanto più degno di ammirazione quando si tenga conto della loro importanza e del fatto che lo stile di perfetta eleganza in cui sono scritte è il risultato di un lavoro di

lima, nel quale egli era instancabile ⁽⁶⁸⁾. Poco dopo il suo arrivo a Berlino, cioè nel 1767, si unì in matrimonio con una sua cugina, Vittoria Conti, da lui all'uopo chiamata a Berlino ⁽⁶⁹⁾; tale unione, da cui non nacque alcun figlio, durò sedici anni, essendo la moglie morta nel 1783 ⁽⁷⁰⁾, dopo lunga e penosa malattia, durante la quale il sommo geometra si palesò medico intelligente ed infermiere infaticabile ed affettuosissimo.

11. Forse a cagione dell'intenso ed indefesso lavoro Lagrange fu sempre di salute delicata, tanto che più volte gli fu tolto di partecipare ad importanti concorsi, da cui sentivasi attratto ⁽⁷¹⁾. Tuttavia in parecchie occasioni gli fu dato di scendere in lizza ed ottenere la vittoria. Così nel 1772 divideva con Eulero il premio (doppio) posto a concorso dall'Accademia di Parigi sopra la Teoria del movimento della Luna ⁽⁷²⁾, mentre nel 1774 un altro ne otteneva sopra l'equazione secolare dello stesso pianeta ⁽⁷³⁾: nell'intervallo di tempo interposto fra questi due trionfi l'Accademia delle Scienze di Parigi lo eleggeva (20 maggio 1773) « associé étranger » con 16 voti sopra 17 votanti ⁽⁷⁴⁾.

Più tardi fu eletto uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze ⁽⁷⁵⁾ e membro dell'Accademia Lucchese ⁽⁷⁶⁾, fatti questi sufficienti a provare come l'Italia non abbia mai dimenticato il suo grande Figlio lontano; fatti a cui si possono, per analogia, avvicinare il progetto di aggregare Lagrange all'Accademia di Napoli ⁽⁷⁷⁾ e quello per trasferirlo in Toscana ⁽⁷⁸⁾. Egli, dal canto suo, non lasciò sfuggire occasione alcuna per affermare la propria nazionalità e giovare ai propri connazionali. Così, avuta notizia che Gian Domenico Cassini stava conquistando una posizione onorevole fra gli astronomi del proprio tempo, scriveva a d'Alembert in data 15 ottobre 1772: « Je suis bien charmé de voir que M. Cassini soutienne déjà si dignement le beau nom qu'il porte; je prend d'autant plus de part à ses succès, que je le regarde en quelque façon comme mon compatriote, sa famille étant originaire des États du roi de Sardaigne, et je vous prie de lui faire, à ce titre, mes plus tendres compliments » ⁽⁷⁹⁾. Così, quando il celebre violinista piemontese Viotti si recò da Berlino a Parigi, non mancò di raccomandare a d'Alembert questo « compatriote et très-habile musicien » ⁽⁸⁰⁾; e salutò con viva soddisfazione l'arrivo a Berlino dell'abate Denina suo « compatriote et ami » ⁽⁸¹⁾. Ed il carteggio, improntato a tanta cortesia, che egli tenne dal 1756 al 1782 con due matematici a lui di molto inferiori ⁽⁸²⁾, non si può spiegare che con i legami d'affetto che lo avvincevan sempre alla diletta patria lontana.

La vita uniforme e tranquilla che menò Lagrange a Berlino non è con-

trassegnata da altri avvenimenti clamorosi che non siano le sue numerose scoperte; e noi ora ci volgiamo a riassumere, con la massima concisione conciliabile con la chiarezza, i più cospicui risultati da lui ottenuti, attenendoci all'ordine per materie, meglio che all'ordine cronologico, il quale è sempre poco significante e, nel caso attuale (v. p. xi), per di più, mal sicuro.

12. Teoria dei numeri. In data 15 agosto 1768 il nostro matematico scriveva a d'Alembert: « Je me suis occupé, ces jours passés, pour diversifier un peu mes études, de quelques problèmes d'Arithmétique, et je vous assure que j'y ai trouvé beaucoup plus de difficultés que je ne croyais. En voici un, par exemple, dont je ne suis venu à bout qu'avec beaucoup de peine: *Un nombre quelconque entier, positif et non carré étant donné, trouver un entier et carré x^2 tel que $nx^2 + 1$, soit un carré.* Ce problème est d'une grande importance dans la théorie des quantités quarrées qui font le principal objet de l'analyse de Diophante »⁽⁸³⁾. Le ricerche a cui si fa qui allusione si trovano esposte in un'estesa memoria datata da Berlino 20 settembre 1768 ed inserita nel T. IV dei *Miscellanea Taurinensia* ⁽⁸⁴⁾, scopo precipuo della quale è lo studio dell'equazione (impropriamente chiamata « equazione di Pell ») $ax^2 + 1 = y^2$. Lagrange dimostra che essa ammette infinite soluzioni ed insegna un procedimento per dedurre da una soluzione infinite altre; in particolare si occupa della soluzione minima $x = T$, $y = U$ e fa la fondamentale osservazione che la frazione $\frac{T}{U}$ si trova fra le ridotte della frazione continua in cui si sviluppa \sqrt{a} , osservazione che servì a lui di punto di partenza per molte ricerche aventi per nocciolo le frazioni continue. Più tardi Lagrange notò che il metodo di risoluzione da lui suggerito per l'equazione di Pell è suscettibile di notevoli migliorie ⁽⁸⁵⁾ e ritornò, con maggiore ampiezza, sopra lo stesso argomento in altra voluminosa memoria ⁽⁸⁶⁾, letta all'Accademia di Berlino il 24 novembre 1768, nella quale egli affrontò il problema generale dell'analisi indeterminata di 2.^o grado, mettendo in luce il legame di essa con l'equazione di Pell e l'intervento delle frazioni continue nella ricerca delle sue soluzioni: fra i risultati speciali ivi conseguiti va rilevata la dimostrazione (che il Wallis aveva cercata indarno) della risolubilità dell'equazione $ax^2 + 1 = y^2$, nel caso in cui l'intero a non sia un quadrato. Questo lavoro è tuttodì ritenuto uno dei più importanti di Lagrange, sicchè ancor oggi si deve ratificare il giudizio da lui stesso pronunciato scrivendo a d'Alembert il 23 dicembre 1768 che riteneva di « n'avoir laissé presque rien à désirer sur le sujet des équations du second degré à deux inconnues » ⁽⁸⁷⁾. Ciò non ostante, indotto a ri-

pensare nuovamente sopra lo stesso tema in occasione di un preteso teorema ottenuto per induzione da Eulero, non solo ⁽⁸⁸⁾ ampliò il campo di applicabilità delle frazioni continue all'Analisi indeterminata di secondo grado, ma stabilì anche una proposizione concernente un limite per il numero delle radici di una congruenza numerica, la quale viene sempre considerata come fondamentale nella teoria delle congruenze di un grado superiore al secondo.

L'impronta di ammirabile generalità che possiedono questi scritti si ritrova in altre posteriori ricerche aritmetiche del Nostro ⁽⁸⁹⁾; nelle quali egli parte dall'osservazione che, mentre l'equazione $A = Bt + Cu$ è sempre risolubile in numeri interi, purchè B e C siano primi relativi, altrettanto non può ripetersi riguardo all'analoga equazione $A = Bt^2 + Ctu + Du^2$; da tale diversità di comportamento egli dedusse una spiegazione plausibile di certi teoremi sopra la rappresentabilità di un numero col mezzo di una forma quadratica scoperti da Fermat ed Eulero e fu indotto ad aggiungerne innumerevoli altri congeneri. Tali considerazioni costituiscono il primo capitolo della Teoria dell'equivalenza delle forme quadratiche, giacchè esse guidano a criterî di equivalenza ed a metodi di riduzione, onde Lagrange merita a buon diritto il grado di fondatore dell'odierna Teoria (aritmetica) delle forme binarie quadratiche; i metodi da lui inventati, esposti sotto forma più completa e metodica nelle celebri *Additions* alla versione francese (Lyon, 1774) dell'*Algebra* di Eulero ⁽⁹⁰⁾ e più tardi dal Legendre nella sua *Théorie des nombres*, si diffusero rapidamente in tutto il mondo e così raggiunsero una notorietà ed esercitarono un'influenza a cui l'Aritmetica superiore è debitrice di molti decisivi progressi.

A Lagrange la Teoria dei numeri deve ancora le prime dimostrazioni di due importantissime proposizioni. Una è quella, che Fermat enunciò e che Eulero tentò indarno di stabilire, secondo cui « qualunque numero intero non quadrato può decomporsi in due, tre e quattro quadrati » ⁽⁹¹⁾. L'altra ⁽⁹²⁾ è di data più recente essendo stata resa di pubblica ragione nel 1770; è il teorema di Wilson, secondo il quale « se n è un numero primo, $(n-1)! + 1$ è divisibile per n ». Chiunque conosce la parte importante che rappresentano queste due proposizioni nella Teoria dei numeri e tiene presente quanto (pur troppo!) sia facile in tale disciplina il lasciarsi trascinare ad affermare l'incondizionata validità di proposizioni che sussistono invece soltanto in alcuni casi, riconoscerà senza stento che l'avere suggerite dimostrazioni conclusive per quei due teoremi costituisce per Lagrange una benemerenda aritmetica non inferiore a quelle che già gli attribuimmo.

Questo riassunto delle investigazioni aritmetiche del grande matematico torinese sarebbe incompleto ove non racchiudesse anche un cenno degli studi⁽⁹³⁾ da lui intrapresi sopra alcune equazioni indeterminate di un grado superiore al secondo (per esempio sull'equazione $x^4 + y^4 = z^2$), i quali toccano una regione matematica che ancor oggi si deve ritenere essere in massima parte una « terra incognita »; onde anche sul valore dei risultati raggiunti e sopra la potenza dei metodi usati da Lagrange il giudizio non può essere sino ad ora definitivo, epperò deve essere improntato a grande circospezione.

13. Algebra. Non meno importanti dei lavori aritmetici di Lagrange sono quelli di cui ci apprestiamo a render conto, non senza rilevare anticipatamente che le risultanze di essi raggiunsero rapidamente e tuttora fruiscono d'una immensa e ben meritata notorietà.

Nel più antico di tali lavori⁽⁹⁴⁾ il Nostro ha offerto il primo esempio di sforzi intesi ad emanciparsi da considerazioni geometriche nello stabilire proposizioni puramente algebriche; il teorema (di Rolle) da lui dimostrato, appunto senza ricorrere (come si era sempre fatto prima) al sussidio di curve, è quello che dice: « se due numeri, sostituiti nel primo membro d'un'equazione, dànno risultati di segni opposti, essi comprendono una radice dell'equazione proposta ». Mentre questo contributo alla Teoria delle equazioni possiede unicamente un valore metodologico, l'applicazione alla separazione delle radici d'un'equazione algebrica dell'« equazione ai quadrati delle differenze » (già incidentalmente incontrata poco prima da E. Waring) e l'uso delle frazioni continue (ordinarie) all'approssimazione delle radici stesse rappresentano due progressi veramente decisivi che il Nostro fece compiere alla risoluzione numerica delle equazioni⁽⁹⁵⁾; tanto più che ciò lo indusse a tracciare con mano sicura le prime linee della Teoria delle frazioni continue, prezioso strumento analitico di cui egli per primo pose in evidenza tutta la forza e la grande malleabilità. Continuando poi⁽⁹⁶⁾ in tal genere di investigazioni, egli tentò di applicare l'equazione ai quadrati delle differenze alla ricerca delle condizioni di realtà delle radici delle equazioni di 3.^o e 4.^o grado⁽⁹⁷⁾ e stabilì la periodicità delle frazioni continue in cui si sviluppano le radici di tutte le equazioni quadratiche.

Da ciò egli fu portato a stabilire criterî per riconoscere se un'equazione algebrica a coefficienti razionali abbia o non fattori lineari o quadratici a coefficienti razionali ed anche ad estendere il concetto di frazione continua sì da abbracciare anche gli enti aritmetici del tipo $p \pm \frac{1}{q \pm \frac{1}{r \pm \dots}}$, dei quali egli mo-

strò l'utilità facendone qualche applicazione. A Lagrange si deve altresì ⁽⁹⁸⁾ il notissimo metodo per eliminare un'incognita fra due equazioni algebriche basato sull'uso delle funzioni simmetriche delle radici; è un metodo repulsivo per l'enorme complicazione dei calcoli a cui conduce (è un inconveniente che Lagrange ha ben visto ed al quale ha tentato di rimediare), ma che, sopra i precedenti procedimenti congeneri suggeriti da Eulero, Cramer e Bézout, offre il vantaggio di porgere il risultante esente da fattori estranei.

Mentre tutte queste ricerche trovano applicazione esclusivamente ad equazioni algebriche, ad equazioni di specie qualunque mirano gli sforzi fatti da Lagrange per risolvere, mediante serie, tutte le equazioni numeriche ⁽⁹⁹⁾. L'idea madre di tali indagini non è del tutto nuova, perchè si ritrova in un lavoro anteriore del Lambert (*Acta Helvetica*, Vol. III, 1758), di cui il Lagrange non ebbe conoscenza (chè, altrimenti, non avrebbe mancato di ricordarlo, con la scrupolosa cura che egli ha sempre usata nell'assegnare a tutti il suo). Non va taciuto che gli sviluppi da lui stabiliti sono esclusivamente formali, mancando qualsiasi considerazione relativa alla convergenza delle serie ottenute; malgrado ciò egli ha saputo conseguire, movendosi in una regione cosparsa di pericoli ed insidie, un risultato di suprema eleganza e di indiscutibile valore: alludiamo alla serie, che reca appunto il nome di Lagrange, la quale serve a svolgere in serie una funzione qualsivoglia di un'equazione scritta sotto la forma $\alpha - x + \varphi(x) = 0$.

Non è il caso di esporre gli sviluppi poco conclusivi che ricamarono attorno alla serie di Lagrange i « combinatorici » tedeschi, nè i dubbi che vennero sollevati intorno al significato ed al valore di essa, nè finalmente gli studi, intrapresi da F. Chiò e portati a buon termine da E. Rouché, per conferirvi la precisione che si esige in qualunque proposizione matematica. Ciò che va invece rilevato è che Lagrange si è affrettato ⁽¹⁰⁰⁾ ad illustrare l'algoritmo da lui inventato facendone applicazione ad un'importante equazione incontrata da Keplero nel corso di ricerche sul moto dei pianeti (cioè alla celebre equazione $t = x - u \sin x$); in tal modo egli dimostrò come la serie da lui scoperta, purchè usata con le debite cautele, costituisca un prezioso e possente strumento analitico.

Influenza ancor più decisiva sull'evoluzione della matematica esercitò Lagrange con le famosissime *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ⁽¹⁰¹⁾. È noto che egli ha ivi fatto uno studio comparativo profondo dei vari metodi sino allora proposti per risolvere le equazioni dei primi quattro gradi, nell'intento di scoprire le ragioni del loro successo e dell'insuccesso

che li colpisce quando si tenti di applicarli ad equazioni di un grado più elevato; tali ragioni, com'è risaputo, risiedono nella possibilità di ridurre la risoluzione di un'equazione di 3.^o o 4.^o (ma non di una di 5.^o) alla risoluzione di altra di grado inferiore (è l'equazione che Lagrange chiama *ridotta* e che oggi si chiama *risolvente*). A tali conseguenze il sommo geometra arriva con uno studio delle funzioni algebriche razionali intere che si possono comporre col mezzo delle radici di una data equazione; così facendo egli schiuse ai posteri un campo sconfinato ed ubertosissimo ove Abel e Galois raccolsero una straordinaria messe di bellissimi risultati. Lagrange ha preparati tutti i materiali che furono poco dopo elaborati dal Ruffini, il vero fondatore della Teoria delle sostituzioni; fra l'altro egli ha reso possibile di concepire e dimostrare il teorema dell'irrisolubilità algebrica delle equazioni di un grado superiore al quarto. E tutto egli fece con tale semplicità di mezzi e lucidità di argomentazioni che le sue *Réflexions* a ragione vengono annoverate tra le produzioni classiche, costituenti la gloria dello spirito umano.

14. Applicazioni dell'algebra alla geometria ed alla meccanica. Il quadro della produzione algebrica di Lagrange riuscirebbe incompleto ove non abbracciasse anche un gruppo di lavori, nei quali il calcolo letterale viene applicato a svariate notevolissime questioni, uscendone così di gran lunga raffinato: giova quindi farne qui cenno.

Fra tali scritti merita il posto d'onore quello ⁽¹⁰²⁾ in cui, sopra un esempio semplicissimo (quello offerto dal tetraedro e dalle figure collegate ad esso), egli insegna quale indirizzo fosse da darsi all'applicazione dell'analisi alla geometria: mentre prima di lui tutta la trattazione era indissolubilmente connessa all'incessante considerazione della figura, partiva dal presupposto di una scelta particolare degli assi di riferimento ed esigeva penose considerazioni di triangoli simili e di triangoli rettangoli (è in sostanza il metodo usato da Apollonio Pergeo rivestito di forma algebrica), Lagrange ha fatto vedere come maggiore uniformità e sicurezza nel procedere si raggiungesse stabilendo formole generali da applicarsi in ogni caso, senza alcun bisogno di previamente fissare la posizione degli assi coordinati rispetto alla figura da studiare. È facile vedere che da tale geniale concetto trae origine tutta l'odierna Geometria analitica. Per raggiungere lo scopo che si era prefisso il Nostro ha premesso un buon numero di lemmi algebrici, i quali colpiscono anche oggi il lettore per la loro eleganza, ma la cui importanza si percepisce pienamente quando si osservi che esprimono, per determinanti del terz'ordine, alcune proposizioni fondamentali nella teoria di queste notevoli espressioni algebriche ⁽¹⁰³⁾.

Un concetto analogo informa un'altra breve nota ⁽¹⁰⁴⁾ contenente un metodo semplice ed elegante per risolvere il problema di « inscrivere in una circonferenza un triangolo i cui lati, prolungati se necessario, passino per tre punti dati », sul quale il Castillon aveva intrattenuta l'Accademia di Berlino ⁽¹⁰⁵⁾ e che Lagrange ridusse alla risoluzione di un'equazione di 2.^o grado.

Lo scopo che, in fondo, il nostro matematico volle raggiungere con questo modesto scritto è quello di mostrare che, anche in una questione di assoluta pertinenza della geometria, l'analisi era in grado di competere con la sua eterna rivale. È il medesimo intento che egli si è proposto anche ne' suoi lavori sull'Attrazione degli ellissoidi ⁽¹⁰⁶⁾; è questo un tèma di cui il Maclaurin aveva data una trattazione ⁽¹⁰⁷⁾ prettamente sintetica, che, come ebbe a dichiarare Lagrange, « peut se comparer à tout ce qu'Archimède nous a laissé de plus beau et de plus ingénieux »; tuttavia egli volle e seppe dimostrare che lo stesso problema « peut être résolu par ce moyen (l'Analyse) d'une manière, si non plus simple, du moins plus directe et plus générale que par la voie de la Synthèse; ce qui servira à détruire un des principaux arguments que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser et pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens ». Superfluo constatare che il fine propostosi è pienamente raggiunto, chè tutte le proposizioni di Maclaurin vengono dedotte da Lagrange, con sorprendente spontaneità, da formole generali di perfetta simmetria; ma non è fuor di luogo rilevare come nel lavoro in questione si incontri un risultato analitico di importanza generale, cioè la formola che serve al cambiamento delle variabili negli integrali tripli. Più tardi ⁽¹⁰⁸⁾ egli ritornò sullo stesso soggetto, attenendosi alle medesime idee direttive, sospinto da nuove ricerche compiute da Laplace e Legendre.

Nello stesso stile dei precedenti è scritta una memoria ⁽¹⁰⁹⁾ ove il Nostro insegna parecchi metodi per stabilire il noto « teorema di Lambert » relativo alle sezioni coniche: non a torto il Bertrand ebbe ad osservare argutamente che tali metodi sono elegantissimi e naturalissimi, *purchè* sia già nota la proposizione da dimostrare!

Pure ispirata da sentimenti che oggi direbbersi di « imperialismo analitico » è una memoria ov'è esposta una nuova soluzione del problema (già risoluto da Eulero e d'Alembert) del moto di rotazione di un solido qualsia ⁽¹¹⁰⁾. Il nuovo procedimento riposa sopra alcune interessantissime trasformazioni algebriche, nelle quali si ravvisano, sia pure sotto forma embrionale, alcuni teoremi essenziali della Teoria dei determinanti ⁽¹¹¹⁾; nel corso delle consi-

derazioni esposte da Lagrange lo storico dell'algebra rileva poi la prima dimostrazione della realtà delle radici dell'equazione (secolare)

$$\begin{vmatrix} x-a & C & B \\ C & x-b & A \\ B & A & x-c \end{vmatrix} = 0.$$

Ben a ragione, dunque, il Nostro osserva nell'esordio della memoria in questione « que c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions et parvenir aux mêmes résultats par des voies différentes ».

Sempre il medesimo concetto, di conferire generalità e snellezza alle applicazioni del calcolo, ha ispirato a Lagrange un altro lavoro di squisita fattura ⁽¹¹²⁾, ove è trattata da un punto di vista elevato la determinazione delle evolute delle curve piane e delle trocoidi (« roulettes »); inoltre è per la prima volta insegnata quella trattazione generale dei contatti fra curve piane che, dopo esser stata introdotta in opere didattiche del Nostro, non tardò a divenire classica; finalmente alcune geniali considerazioni di pertinenza della geometria differenziale dello spazio schiudono una regione novella, in cui Monge doveva poco dopo raccogliere tanti e così meritati allori.

15. Analisi infinitesimale. Il prezioso intervento delle frazioni continue in questioni di Teoria dei numeri e di Algebra, che rilevammo in parecchi lavori di Lagrange, fece sorgere in questo grande geometra l'idea che esse potessero prestare utili servigi anche in questioni di Analisi e prendere posto fra i più comuni processi infiniti (serie e prodotti). Che tale previsione sia conforme alla verità emerge da un lavoro ⁽¹¹³⁾ nel quale egli ha, in generale, fatto vedere come si potesse esprimere in frazione continua algebrica l'integrale di qualunque equazione differenziale ordinaria di 1.^o ordine; in particolare, ha insegnati elegantissimi sviluppi del detto tipo per parecchie funzioni particolari notevoli, quali $(1+x)^n$, $\log(1+x)$, e^x , $\tan x$, $\int \frac{dx}{(1+x^n)}$, ecc.

I matematici posteriori non hanno giudicato opportuno di introdurre nei trattati di Analisi tali risultati, onde questi raggiunsero notorietà assai limitata e non ebbero seguito: con quanta ragione altri giudichi.

Altrettanto *non* può ripetersi riguardo ad una memoria ⁽¹¹⁴⁾ che costituisce tuttora un eccellente preliminare alla Teoria degli integrali ellittici, dal momento che insegna in primo luogo la riduzione a forma normale di qualunque integrale del tipo $\int f(x, \sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4})_{ax}$ (f essendo

simbolo di funzione razionale) ed in secondo luogo un procedimento per svolgere in serie un tale integrale. Inoltre ivi fa il proprio ingresso la « media aritmetico-geometrica », ivi s'incontrano notevoli sviluppi in serie per l'arco d'una conica a centro, ivi da ultimo viene mostrata l'utilità del seguente nuovo teorema di Calcolo integrale: « Se V e X sono funzioni della variabile x , mentre A, A', A'', \dots , sono costanti e si pone $V = \int \frac{X \cdot dx}{1 - ax}$ sarà :

$$\int (A + A'x + A''x^2 + \dots) dx = A(V)_{a=0} + A' \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right)_a + \frac{A''}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} \right)_{a=0} + \dots \quad (I)$$

In altro scritto ⁽¹¹⁵⁾ Lagrange ritornò, con spirito più maturo, sopra l'analogia fra le potenze e le derivate (o gli integrali), da lui avvertita esordendo nella sua carriera scientifica, cioè sul concetto centrale della lettera a stampa da lui diretta al Conte di Fagnano (v. p. xi). Ma è curioso il fatto che egli, mentre cita i lavori congeneri anteriori di Leibniz e di Giovanni Bernoulli, non fa menzione alcuna di quel suo saggio giovanile, quasi volesse sconfessarlo. Tale scritto è importante specialmente perchè contiene un lucidissimo cenno dell'idea di fondare tutta l'Analisi infinitesimale sopra la serie di Taylor, da usarsi per definire le funzioni e le loro derivate successive, ed anche perchè vi si trova per la prima volta l'estensione di quella serie a funzioni con quante-sivogliano variabili.

Benchè l'odierno lettore si sentirà mediocrementemente soddisfatto di sviluppi che, nell'assenza di qualunque considerazione intorno alla loro validità, debbono ritenersi puramente « formali », pure prima di condannarli, dichiarandoli privi di valore, gioverà tener presente che ivi Laplace trovò il fondamento e lo stimolo per le sue famose ricerche sopra le « funzioni generatrici », che tanto contribuirono alla sua fama e tanto giovarono al progresso della nostra scienza. Si aggiunga che l'analogia fra le potenze e derivate venne più tardi sfruttata da Lagrange ⁽¹¹⁶⁾ per assicurare un solido fondamento ad un metodo d'interpolazione immaginato nel 1670 dall'astronomo G. Mouton, il quale si arricchì in conseguenza di tali doti che oggi ancora è usato con profitto ⁽¹¹⁷⁾.

Influenza di gran lunga maggiore sull'evoluzione dell'Analisi esercitarono le profonde ricerche del Nostro sopra le equazioni a derivate parziali ⁽¹¹⁸⁾, chè dai risultati che esse diedero presero le mosse Monge e Jacobi e, malgrado i perfezionamenti di sostanza e di forma che ricevettero nel corso del secolo passato, conservano tuttora un posto cospicuo in qualunque esposizione della materia. Rimandando a tali trattazioni metodiche il lettore desi-

deroso di conoscere la dimostrazione di tale asserto, aggiungeremo che anche la teoria degli integrali singolari delle equazioni differenziali ordinarie di 1.^o ordine è debitrice a Lagrange del proprio assetto sino ad oggi riguardato come definitivo ⁽¹¹⁹⁾; inoltre egli ha scoperta l'interpretazione geometrica come involuppo dell'integrale singolare, ha introdotta la considerazione della derivata dell'integrale generale rispetto la costante d'integrazione ed ha mosso il primo passo verso l'estensione di siffatte indagini ad equazioni di ordine superiore al 1.^o o contenenti parecchie variabili.

Facendo semplice menzione di uno scritto destinato a risolvere una questione relativa alle Annualità ⁽¹²⁰⁾ — perchè questa era stata trattata prima, circa nello stesso modo, da A. de Moivre ⁽¹²¹⁾ all'insaputa di Lagrange — chiuderemo questa sezione della nostra rassegna segnalando due scritti ove questioni di Astronomia e Geografia matematica vengono risolte col sussidio della pura Analisi.

Per costruire le tavole planetarie servendosi delle osservazioni, Lagrange ⁽¹²²⁾ considera una serie il cui termine m -esimo è un polinomio della forma $A \sin(\alpha + m\alpha) + B \sin(b + m\beta) + \dots$ e dimostra che è una serie ricorrente la cui « scala di relazione » non dipende che dagli angoli α, β, \dots ; da ciò è indotto a risolvere parecchi problemi di grande importanza per chi voglia applicare le serie ricorrenti allo studio di successioni di numeri, i quali siano legati fra loro da una legge ignota, ed a usare come ausiliari frazioni continue i cui termini sono funzioni di una variabile.

Indirizzo non meno elevato hanno le ricerche di Lagrange sopra la costruzione delle carte geografiche ⁽¹²³⁾. È noto che la qualità, che possiede la proiezione stereografica di una sfera, di far corrispondere circoli a circoli era nota sin dai tempi di Claudio Tolomeo, mentre la scoperta della prerogativa che essa possiede di conservare gli angoli è di data ben più recente ⁽¹²⁴⁾; Lambert ed Eulero dimostrarono poi che la proprietà di essere isogonale è condivisa da tutte le rappresentazioni usate dai geografi. Ora Lagrange si è proposto il bel problema di determinare tutte le rappresentazioni conformi della superficie terrestre, tanto nel caso in cui la s'immagini sferica, quanto ove la si supponga un'ellissoide di rotazione. La soluzione che egli ne diede nulla lascia a desiderare per semplicità, generalità ed eleganza; è notevole per l'intervento in essa di funzioni di una variabile complessa e per avere schiusa a Gauss la via che lo condusse alla rappresentazione conforme di una superficie qualunque. Nè va taciuto ivi il primo presentarsi della funzione $\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$,

che tanta parte rappresentò in posteriori lavori specialmente di H. A. Schwarz ⁽¹²⁵⁾ e l'enunciato di un grazioso problema di geometria elementare, che porse il destro a G. Bellavitis di fare una brillante applicazione del Calcolo delle equipollenze da lui inventato ⁽¹²⁶⁾.

16. Meccanica e fisica matematica. La prima comunicazione che Lagrange fece all'Accademia di Berlino (4 marzo 1767) ⁽¹²⁷⁾ contiene un'ampia ed importante generalizzazione del Problema delle tautocrone, che Huygens aveva risoluto nell'ipotesi che il movimento accadesse nel vuoto, mentre Giovanni Bernoulli ed Eulero avevano contemplato il caso più difficile in cui il moto succedesse in un mezzo che presentasse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Il Nostro invece si propose e riuscì a determinare in generale quale è la forza necessaria a produrre il tautocronismo, solo supponendo che sia una funzione dello spazio e della velocità. Il Fontaine, che erasi già prima occupato della stessa questione con discutibile successo, attaccò ingiustamente le ricerche di Lagrange; ciò costrinse il grande matematico ad una replica ⁽¹²⁸⁾, sul cui tono pacato e cortese dovrebbero modellarsi tutti gli scritti di polemica scientifica; ma ciò porse a lui anche l'occasione per esporre nuovi sviluppi dottrinali di grande importanza, perchè toccano questioni interessanti in egual grado l'Analisi e la Meccanica ⁽¹²⁹⁾.

Mentre questi scritti fecero compiere un *sostanziale* progresso ad un bel capitolo della Teoria dei moti e delle forze, ve n'è un altro posteriore ⁽¹³⁰⁾ (letto a Berlino il 2 ottobre 1717) il cui merito è piuttosto *formale*: esso concerne il « problema degli n corpi » ed ha come precipuo scopo di mostrare come le relative equazioni differenziali assumano, mediante la metodica introduzione della funzione

$$\Omega = \sum \frac{M M'}{\sqrt{x-x'^2 + y-y'^2 + z-z'^2}}$$

(ove M è la massa del punto di coordinate x, y, z , ecc.), una forma estremamente comoda, che permette di giungere con meravigliosa speditezza, non soltanto ai tre noti principî che governano sempre il moto del sistema, ma anche ad altre proposizioni più speciali, segnalate da d'Alembert, valide soltanto in ipotesi più ristrette.

In altra memoria ⁽¹³¹⁾ Lagrange si è occupato pure di un sistema di punti di masse M, M', \dots , e coordinate $(x, y, z), (x', y', z'), \dots$, coll'intento di stabilire le proprietà del suo centro di gravità; dette x_0, y_0, z_0 le coordinate di questo e a, b, c quelle di un punto arbitrario dello spazio, le due propo-

sizioni da lui stabilite si possono esprimere col mezzo delle due seguenti equazioni:

$$\frac{\sum M M' [\overline{x-x'}^2 + \overline{y-y'}^2 + \overline{z-z'}^2]}{\sum M} = \sum M [\overline{x-x_0}^2 + \overline{y-y_0}^2 + \overline{z-z_0}^2]$$

$$\begin{aligned} \sum M [\overline{x-a}^2 + \overline{y-b}^2 + \overline{z-c}^2] &= [\overline{x_0-a}^2 + \overline{y_0-b}^2 + \overline{z_0-c}^2] \sum M \\ &+ \frac{\sum M M' [\overline{x-x'}^2 + \overline{y-y'}^2 + \overline{z-z'}^2]}{\sum M}. \end{aligned}$$

« Cette manière de déterminer le centre de gravité par les seules distances des corps entre eux (osserva con pieno fondamento il sommo geometra) est, je crois, nouvelle, et peut être utile dans quelque occasion »; ed infatti se ne trova menzione in tutti i migliori trattati della materia.

All'Idrodinamica il Nostro dedicò due lavori: uno ⁽¹³²⁾ inteso a confermare, contro il sentimento di d'Alembert, un risultato teorico conseguito da D. Bernoulli e che sembrava smentito da certe esperienze del Kraft; l'altro (letto a Berlino il 22 novembre 1781) ⁽¹³³⁾ di molto maggior lena, avente lo scopo di far conoscere un metodo nuovo per gettare le basi dell'Idrodinamica teorica, con applicazioni al movimento dei fluidi omogenei pesanti in vasi o canali di forma qualunque; è superfluo far conoscere per esteso l'essenza di questo metodo, chè esso conseguì grande notorietà dopochè entrò a far parte della *Mécanique analytique*.

Altre due memorie toccano l'Ottica; una ⁽¹³⁴⁾ si riferisce alle lenti, teoria di cui si erano già occupati ottimamente Côtes ed Eulero e sulla quale il Nostro sa fare nuove acute osservazioni; nell'altra ⁽¹³⁵⁾ è esposta una legge generale giudicata dall'autore (ignoriamo con quanta ragione) utile in Ottica quanto è in Meccanica il principio delle velocità virtuali.

All'elasticità si riferisce una memoria ⁽¹³⁶⁾ nella quale Lagrange investiga le condizioni di equilibrio di una verga elastica omogenea di cui un estremo è fisso; mentre all'Acustica ed alla propagazione delle onde in generale appartengono alcune rettifiche da lui suggerite per i *Principia* di Newton ⁽¹³⁷⁾.

Da ultimo, dalla teoria degli orologi gli fu ispirato un elegante lavoro ⁽¹³⁸⁾ il quale prova quanto profondi siano stati gli studi da lui fatti anche sopra questa specialissima materia e come a lui fosse dato di far scaturire delle scintille percuotendo qualunque pietra.

17. Astronomia. Di alcuni lavori astronomici di Lagrange già si tenne parola in via incidentale; nel mentre ci accingiamo a dare concisa notizia degli altri, giova premettere che essi abbracciano si può dire tutte le questioni teoriche e pratiche che s'incontrano nello studio del moto degli astri e che tali questioni sono sempre trattate da Lagrange con grande elevatezza e generalità, sicchè l'esame accurato di tali lavori va caldamente raccomandato anche agli analisti puri, i quali vi incontreranno ad ogni pagina vedute originali, teoremi nuovi, algoritmi di suprema eleganza. Alcuni risultati ivi esposti godono di valore permanente, mentre altri appaiono oggi come tappe intermedie che l'Astronomia doveva incontrare per arrivare ai metodi di calcolo più sicuri e perfetti, che vennero elaborati nel corso del secolo scorso, a cominciare da Laplace e Gauss fino a giungere a Gildén e Poincaré.

Scendendo a qualche più minuto particolare osserviamo che Lagrange ha dimostrato ⁽¹³⁹⁾, che la non-sfericità dei corpi celesti non può produrre sensibili alterazioni nei loro movimenti; in altri termini, egli diede della stabilità del sistema del mondo una dimostrazione più soddisfacente di quella immaginata da Laplace (1773) e che permise poi (1809) a Poisson di congegnarne altra al coperto da ogni obbiezione.

Al fondamentale problema della determinazione dell'orbita di una cometa col mezzo di opportune osservazioni egli ha consacrato non meno di quattro memorie ⁽¹⁴⁰⁾, dalle quali emerge che in generale essa non si può far dipendere da un'equazione algebrica di un grado inferiore a sette; mentre lo studio delle perturbazioni che possono subire quei capricciosi corpi celesti per l'influenza di altri pianeti, fu da lui compiuto in una memoria che l'Accademia di Parigi premiò nel 1778 ⁽¹⁴¹⁾. Sopra la teoria della Librazione della luna — tema di uno dei suoi primi lavori — egli è ritornato con notevole ampiezza ⁽¹⁴²⁾, applicandovi un metodo generale ed analitico da lui proposto per risolvere tutti i problemi di dinamica, cioè il principio di d'Alembert espresso in formule col mezzo della legge delle velocità virtuali.

Altre assidue e non sterili ricerche il Nostro consacrò alle variazioni secolari ⁽¹⁴³⁾ e periodiche ⁽¹⁴⁴⁾ dei movimenti dei pianeti — in particolare all'equazione secolare della luna ⁽¹⁴⁵⁾ — ed altre ancora ⁽¹⁴⁶⁾ alla determinazione del movimento dei nodi delle orbite planetarie, questione di grande utilità per chi voglia investigare la struttura presente e futura del mondo.

Meno vasto è il soggetto di uno scritto ove Lagrange mostra come, mediante successive approssimazioni, si possano ottenere integrali sempre più esatti delle equazioni dei movimenti planetari ⁽¹⁴⁷⁾. Notevole è anche un com-

plemento ⁽¹⁴⁸⁾ da lui indicato per un passo dei *Principia*, notevole, non fosse altro, perchè dimostra come egli, benchè infaticabile campione dei metodi puramente analitici, era in grado di maneggiare con grande disinvoltura le considerazioni geometriche preferite da Newton.

In previsione del passaggio di Venere, annunciato per il 6 giugno 1769, egli lesse il 12 novembre 1767 all'Accademia di Berlino un'elaboratissima memoria ⁽¹⁴⁹⁾ per mostrare come tale fenomeno si potesse utilizzare onde determinare la parallasse del Sole, per insegnare come si dovesse condurre il calcolo relativo, finalmente per determinare qual fosse la località della Prussia dove il fenomeno potevasi osservare nelle condizioni più favorevoli.

Altri soggetti da lui studiati sono le rifrazioni astronomiche ⁽¹⁵⁰⁾, l'applicazione del metodo delle proiezioni al calcolo delle eclissi ⁽¹⁵¹⁾, la determinazione di queste ⁽¹⁵²⁾, la trasformazione di certe tavole astronomiche a doppia entrata in altre a semplice entrata ⁽¹⁵³⁾ e le variazioni annue degli elementi orbitali dei pianeti ⁽¹⁵⁴⁾. Dovremmo segnalare eziandio un metodo ideato da Lagrange per risolvere mediante serie alcuni problemi di Astronomia sferica ⁽¹⁵⁵⁾; ma è forza riconoscere che questo lavoro, malgrado il titolo datogli da Lagrange, è di pretta trigonometria, dal momento che insegna a valutare certi elementi di un triangolo sferico rettangolo quando altri ne siano noti, osservazione che noi facciamo, non per togliere pregio allo scritto in questione, ma per assegnargli il posto che gli compete nella letteratura matematica.

Giunti al termine di questa vertiginosa rassegna dei lavori del Nostro, affrettiamoci a riconoscerne noi pei primi le manchevolezze, dovute in parte alla loro mole imponente ed in parte alla mancanza in chi scrive di una competenza speciale sull'argomento.

A nostra parziale giustificazione milita il fatto che, neppure gli astronomi che si accinsero a narrare la storia della loro scienza, osarono di pronunciare uno schietto giudizio sul valore del contributo dato da Lagrange alle nostre cognizioni sopra l'« essere » ed il « divenire » del creato; persino il Delambre non dedicò a lui uno speciale capitolo della sua *Histoire de l'Astronomie au XIX siècle*, ma si limitò a fare qualche cenno (e non sempre favorevole) su alcune ricerche da lui compiute. Onde la determinazione del posto che spetta a Lagrange nella storia dell'Astronomia è un problema tuttora irrisolto, che auguriamo tenti qualche specialista in materia.

18. La somma di lavoro compiuto e l'entità dei risultati conseguiti da Lagrange a Berlino è sorprendente ⁽¹⁵⁶⁾; onde altrettanto sorprendente è che

egli, mentre alla sua mente si affollavano tanti grandi pensieri originali, potesse scrivere (in data 21 settembre 1781) queste scoraggiate parole: « D'ailleurs, je commence à sentir que ma force d'inertie augmente peu à peu, et je ne répons pas que je fasse encore de la Géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde, et qu'au moins qu'on ne découvre de nouveaux filons il faudra tôt ou tard l'abandonner. La Physique et la Chimie offrent maintenant des richesses plus brillantes et d'une exploitation plus facile; aussi le goût du siècle paraît-il entièrement tourné de ce côté-là, et il n'est pas impossible que les places de Géométrie dans les Académies ne deviennent un jour ce que sont actuellement les chaires d'arabe dans les Universités » ⁽¹⁵⁷⁾.

In tali linee si trova la prima manifestazione a noi nota di uno stato d'animo, che in Lagrange andò col tempo sempre più accentuandosi ⁽¹⁵⁸⁾ e finì per fargli prendere in uggia la piccola e grigia Berlino e desiderare una scena più vasta e movimentata, ove rappresentare una parte importante. La perdita della compagna della sua vita e la morte (17 agosto 1786) del sovrano che lo aveva chiamato al proprio fianco allentarono a poco a poco i legami che sino allora lo avevano avvinto al Regno di Prussia; tanto che Mirabeau, sino dal 26 novembre 1786, spronava il Governo francese a tentare d'ottenere il trasloco a Parigi, al quale egli attribuiva tale importanza da equipararlo ad una rivincita della sua patria sulle umiliazioni subite in parecchi campi di battaglia ⁽¹⁵⁹⁾. A tale passo il grande oratore si decise probabilmente previo consenso del principale interessato, propenso a stabilirsi in una città ove stava per iniziarsi la stampa della *Mécanique analytique*, opera di cui l'Accademia di Parigi aveva accettato il patronato ⁽¹⁶⁰⁾. Malgrado gli sforzi del Re di Prussia ⁽¹⁶¹⁾, le pratiche relative non tardarono a condurre al risultato voluto ⁽¹⁶²⁾, giacchè sino dal 20 febbrajo 1787 Lagrange veniva nuovamente iscritto fra i soci corrispondenti dell'Accademia di Berlino e declinava un'offerta vantaggiosa ed onorevole fattagli da suo padre in nome del Governo sardo, giustificando tale attitudine con gl'impegni precedentemente assunti con Luigi XVI ⁽¹⁶³⁾. Mentre questi gli conferiva il titolo di « pensionnaire vétéran » dell'Accademia delle Scienze con l'annua pensione di 6000 franchi e lo alloggiava al Louvre ⁽¹⁶⁴⁾, il re di Prussia, per assicurare la continuità della sua collaborazione alle *Memorie dell'Accademia di Berlino*, s'impegnava di sborsargli annualmente 300 talleri: sicchè egli riuscì a risolvere anche l'arduo problema di mantenere ad un tempo ottimi rapporti con due corti tradizionalmente nemiche ⁽¹⁶⁵⁾.

III. - A PARIGI.

19. Accoglienze oneste e liete vennero fatte a Lagrange quando giunse a Parigi, non soltanto da parte di Luigi XVI e di Maria Antonietta, ma anche da tutti gli scienziati colà residenti.

Primo avvenimento degno di nota che lo concerne, succeduto nella capitale della Francia, è la pubblicazione (1788) della prima edizione della *Mécanique analytique* ⁽¹⁶⁶⁾, una delle opere più eminenti della letteratura matematica, la più eccelsa, a giudizio di taluno, fra quelle che recano la firma del grande geometra. I concetti a cui egli s'inspirò nello scriverla sono gli stessi che segnalammo in gran numero di suoi lavori anteriori: tali concetti egli espose con la consueta chiarezza nella Prefazione, di cui giova qui riferire i passi più salienti:

« On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème... Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité: il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrant la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue... On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme ».

Emerge da queste frasi che l'opera di Lagrange è essenzialmente e rigorosamente metodica; essa ha per cardini il Principio delle velocità virtuali ⁽¹⁶⁷⁾ ed il Principio di d'Alembert ed insegna come, applicandoli quasi automaticamente, si possano risolvere tutti i problemi concernenti l'equilibrio ed il moto di punti, di solidi e di fluidi. Essa possiede, a somiglianza degli scritti di Archimede, il carattere proprio e distintivo della filosofia naturale di Platone, che è quello di astrarre, per quanto sia possibile, dalle proprietà fisiche dei corpi, per trattenersi a contemplarne i caratteri matematici. È la fisionomia che la Meccanica ha conservato durante tutto il corso del secolo XIX e di cui

soltanto ora accenna a spogliarsi. Ma sino a che non sia instaurato il regno della Meccanica fisica, l'opera di Lagrange, come fece cadere nell'oblio tutte quelle anteriori, servirà sempre di guida agli studiosi di Meccanica, presa questa parola nel suo significato più ampio e comprensivo.

Quando, un ventennio più tardi, si manifestò la necessità di una nuova edizione della sua grande opera, il grande Geometra, pur mantenendone intatti il piano ed i concetti direttivi, moltiplicò le applicazioni della procedura di cui è l'inventore; sicchè, ove gli fosse stato concesso di darvi l'ultima mano, avrebbe offerto ai matematici un compendio ben coordinato di tutti i suoi lavori di Meccanica (non esclusi quelli relativi alla Meccanica celeste).

Ma poichè il vol. II uscì dopo la sua morte ⁽¹⁶⁸⁾ (il vol. I porta la data 1811), presenta indiscutibili imperfezioni e deplorevoli lacune, che G. Bertrand e G. Darboux riuscirono a togliere, riducendolo così ad essere un libro che si può porre nelle mani di qualunque principiante, senza tema che questo sia traviato. La *Mécanique analytique* porta il n. 1 nel Catalogo delle opere costituenti oggi la biblioteca di qualunque investigatore dell'indicata materia; e, grazie alle esaurienti considerazioni storiche e dottrinali che contiene sopra i lavori congeneri di più antica data, può fungere da ottima guida anche per coloro che intendono seguire l'evoluzione storica delle idee di moto e forza o che almeno s'interessano a conoscerne le varie fasi di sviluppo.

Aggiungiamo che gli è nel rielaborare il materiale dell'opera testè discorsa che l'immortale scienziato fu condotto all'ultima grande scoperta a cui è legato il suo nome, cioè alla Teoria della variazione delle costanti arbitrarie ⁽¹⁶⁹⁾ ed alla sua applicazione alla meccanica celeste ⁽¹⁷⁰⁾.

20. Fu forse l'esaurimento prodotto dall'immane sforzo che costò il comporre la *Mécanique analytique*, oppure il brusco passaggio dall'imperturbabile tranquillità berlinese alla baraonda parigina ⁽¹⁷¹⁾ che produssero in Lagrange quel lungo periodo di inerzia, durante il quale egli provava un'invincibile avversione per formole e calcoli? Altri risponda; a noi basti notare che tale condizione fu talmente acuta che, a quanto si narra, egli lasciò per molti mesi il suo immortale volume chiuso ed intonso sopra il proprio tavolo, ed invece si interessò alle esperienze con cui Lavoisier stava allora creando una nuova scienza naturale, la Chimica.

Nè va taciuto che la violenta instaurazione del nuovo regime politico in Francia destava in lui non a torto assai gravi apprensioni economiche, che mantennero desta e viva ne' suoi amici prussiani la speranza di riaverlo a Berlino. Ma la Francia repubblicana, ben comprendendo tutto il disdoro

che sarebbe ad essa ridonato dal comportarsi diversamente, gli confermò la pensione assegnatagli dal « ci-devant roi » ⁽¹⁷²⁾; inoltre ⁽¹⁷³⁾, dietro proposta di Lavoisier fece a suo favore un'eccezione al decreto del 16 ottobre 1793, con cui venivano espulsi dalla Francia tutti gli stranieri ivi residenti ⁽¹⁷⁴⁾, incaricandolo di eseguire calcoli ed esperienze sopra il moto dei proiettili ⁽¹⁷⁵⁾.

Soppressa l'Accademia delle Scienze, fu creato per lui il posto di Amministratore della « Monnaie » (zecca) ⁽¹⁷⁶⁾. Egli poi fu nominato membro del Magistrato incaricato di proporre le ricompense per le invenzioni di pubblica utilità. In qualità di membro o di presidente partecipò attivamente ai lavori di tutte le commissioni che, nel decennio 1790-1799, lavorarono a preparare il nuovo sistema di pesi e misure ⁽¹⁷⁷⁾, atteggiandosi in ogni occasione a strenuo fautore del numero 10. Il Bureau des Longitudes lo volle nel proprio seno ed egli si mostrò degno di tale nuova distinzione intervenendo alle sue adunanze e contribuendo alla *Connaissance des temps* con due lavori, uno dei quali ha il modesto scopo di esporre i fondamenti teorici di uno strumento utile agli astronomi ⁽¹⁷⁸⁾, mentre l'altro insegna un'ipotesi cosmologica atta a completare quella che porta il nome di Laplace ⁽¹⁷⁹⁾.

Tutto questo sta a provare come anche a Parigi egli abbia finito per procurarsi le condizioni di vita necessarie ad un pensatore; ciò è confermato dalle seguenti frasi che si leggono in una lettera da lui scritta il 24 ottobre 1791:

« Pour n'avoir été que simple spectateur des événements qui sont arrivés, je n'en ai été moins affecté. Maintenant que la tranquillité et l'ordre sont rétablis, je ne regrette pas d'avoir assisté à un spectacle, le plus intéressant pour les philosophes mêmes, celui d'une grande nation qui se crée un nouveau gouvernement, non par la force des armes, mais par celle de la parole et de l'opinion publique » ⁽¹⁸⁰⁾.

21. Istituita (Decreto 11 marzo e Legge 28 settembre 1794) l'« Ecole centrale des travaux publics » (destinata a mutarsi poco dopo nella celebre « École polytechnique ») Lagrange vi ebbe (insieme a Prony) la cattedra di Analisi e Meccanica ed il Consiglio dei professori nella sua prima adunanza (4 dicembre 1794) lo elesse a proprio presidente. I corsi ordinari vennero inaugurati il 24 maggio 1795 con una seduta solenne, in cui egli tenne la sua prima lezione in presenza degli altri professori e della scolaresca; poco dopo però egli, per ragioni di età, cedeva la cattedra al Lacroix ⁽¹⁸¹⁾.

Fondato l'Istituto di Francia, in luogo dell'antica Accademia delle Scienze,

Lagrange fu subito eletto a farne parte come membro della nuova Accademia delle Scienze, della quale fu il primo presidente ed ai cui lavori prese parte attivissima ⁽¹⁸²⁾.

E quando la Convenzione Nazionale, con Decreto del 9 brumajo anno III (30 ottobre 1794), fondò a Parigi la Scuola Normale, egli, assieme a Laplace, fu chiamato a professarvi matematica. Diremo fra un momento l'influenza che tale carica esercitò sopra l'ultima fase della vita scientifica di Lagrange; ma prima reputiamo non privo d'interesse il riferire un giudizio (a dir vero un po' superficiale) pronunciato su di lui come insegnante da uno (Fourrier) di coloro che ne seguirono le lezioni:

« Lagrange, le premier des savants d'Europe, paraît avoir de cinquante à soixante ans; il est cependant plus jeune ⁽¹⁸³⁾; il a dans les traits de la dignité, et de la finesse dans la physionomie; il paraît un peu grêle ou pâle; sa voix est très-faible, à moins qu'il ne s'échauffe; il a l'accent italien très-marqué; il prononce les S comme des Z; il est très-modestement vêtu en noir ou en brun; il parle très-familièrement et avec quelque peine; il a dans la parole l'embarras et la simplicité de l'enfant. Tout le monde sait bien que c'est un homme extraordinaire, mais il faut l'avoir vu pour reconnaître un grand homme. Il ne parle que dans les conférences, et il y a telles de ses phrases qui exciteraient la risée. Il disait l'autre jour: « *Il y a encore sur cette matière beaucoup de choses importantes à dire, mais je ne les dirai pas* ». Les élèves, dont la plus part sont incapables de l'apprécier, lui font assez peu d'accueil, mais les professeurs le dédommagent » ⁽¹⁸⁴⁾.

22. Quali fossero gli argomenti scelti da Lagrange agli inizi del proprio insegnamento e con quali intendimenti li svolgesse emerge dalle ammirabili *Leçons élémentaires sur les Mathématiques données à l'École Normale en 1795* ⁽¹⁸⁵⁾, che la riproduzione stenografica fattane dagli allievi e le molte edizioni e traduzioni resero popolari in tutto il mondo; esse, a parer nostro, dovrebbero servire di modello a tutti coloro che si accingono a salire sopra una cattedra di scuola media, chè provano non esservi soggetto per quanto umile e vieto che non si presti ad essere ringiovanito e rallegato con sviluppi originali e brillanti. Sono ivi trattate le questioni fondamentali dell'Aritmetica e dell'Algebra (teoria delle equazioni) e, fra l'altro, è segnalata ai matematici puri la così detta « formola d'interpolazione di Lagrange » che fino allora giaceva sepolta in una memoria destinata agli astronomi. Va notato che la parte aritmetica di queste *Leçons* ricevette un importante complemento da un breve scritto posteriore ⁽¹⁸⁶⁾, destinato allo studio del problema di tras-

formare una frazione in altre più semplici, del quale è messo in luce il sommo interesse teorico e pratico.

È probabilmente per porre a disposizione dei propri discepoli le memorie da lui scritte sopra la Teoria delle equazioni che Lagrange decise (1798) di raccoglierle in un volume, con l'aggiunta di una magistrale introduzione storica e di buon numero di Note. Così ebbe origine il celebre *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, che (è forza riconoscerlo) di trattato non ha che il nome, essendo una semplice successione di materiali preziosi ma staccati ⁽¹⁸⁷⁾. Tuttavia fu coronato da tale successo che dieci anni appresso si manifestò la necessità di una nuova edizione e nel 1826 di una terza. Ciò non deve stupire perchè, come ebbe a notare il Poincot ⁽¹⁸⁸⁾, « comme il n'y a dans toute l'Analyse aucun point remarquable où ce géomètre (Lagrange) n'ait porté son esprit et qu'il n'ait, pour ainsi dire, regardé de très près, on est sûr de trouver dans ses ouvrages, en même temps que ses propres découvertes, tout ce qui a été pensé de plus profond et de plus ingénieux par ses prédécesseurs; et, ce qui est bien digne de remarque, tout y paraît suivre uniformément des mêmes principes, comme si l'auteur en développait des simples corollaires ».

23. Mentre questo volume, al pari della *Mécanique analytique*, riscosse lodi generali ed incondizionate, gravi e non ingiustificate obiezioni vennero mosse contro la *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies*, pubblicata la prima volta nel 1797 e nuovamente l'anno stesso della morte dell'autore (1813). Ivi il grande geometra si è proposto di dimostrare completamente (come aveva enunciato in una memoria che risale al 1772 e poi in un corso tenuto alla Scuola Politecnica ⁽¹⁸⁹⁾) che gli sviluppi in serie di potenze abilitano a fondare solidamente il Calcolo differenziale senza far appello al tanto controverso concetto d'infinito ⁽¹⁹⁰⁾; è notorio che tale geniale concetto, assai più tardi, nelle mani di Weierstrass e Méray, si è mostrato capace di disimpegnare l'ufficio di colonna vertebrale di tutta l'Analisi; ma sotto la forma embrionale sotto cui è presentata dal Nostro, presta il fianco a critiche gravi, le quali vennero coraggiosamente esposte da H. Wronski ⁽¹⁹¹⁾ e che ebbero per conseguenza l'abbandono, poco dopo la morte del sommo analista, dei concetti da lui caldeggiati. Ma se vita effimera ebbe la parte che diremmo filosofica della *Théorie des fonctions analytiques*, la parte algoritmica di essa (completata nelle notissime *Leçons sur le Calcul des*

fonctions) ha un valore grande e permanente, tanto che certi capitoli di essa (ad es. quanto concerne i contatti di curve e superficie) passarono integralmente nelle opere didattiche posteriori, tutti avendo riconosciuto che la generalità e l'eleganza ivi raggiunte ben difficilmente possono venire superate.

Sono queste le doti che riscontrammo in tutti gli scritti di Lagrange che sin qui analizzammo e che non mancano nemmeno in quello notevolissimo di cui ci resta ancora da parlare. È una memoria ⁽¹⁹²⁾ con cui egli si propose di porre in sodo la possibilità di dedurre tutte le formole della trigonometria sferica da un solo teorema, tratto dall'investigazione diretta della figura. È una tesi già intravveduta (1783) dal de Gua, ma che questi aveva tentato stabilire mediante calcoli talmente farragginosi, che si sarebbero detti congegnati con lo scopo di mettere in luce, non i vantaggi, ma gli inconvenienti dello svolgere quell'idea. Lagrange, invece, dimostra direttamente il « teorema del coseno » $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$, ne deduce $\sin A$ e dalla simmetria della risultante espressione di $\frac{\sin A}{\sin a}$ trae il « teorema dei seni ». Similmente ottiene le formole

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a, \\ \cot a \sin b &= \cot A \sin C + \cos b \cos C;\end{aligned}$$

fa vedere che dalle relazioni stabilite scaturiscono, come casi speciali, tutte quelle che sussistono per triangoli sferici rettangoli; nè manca di dimostrare, in modo estremamente semplice, il « teorema di Legendre » che insegna una relazione metrica approssimata fra un triangolo sferico qualunque ed un triangolo piano opportunamente scelto, teorema del quale è nota la straordinaria importanza pratica. Risulta da ciò come ben a ragione un giudice competentissimo dichiarasse: « Es besteht kein Zweifel, dass dieses von Lagrange aufgestellte System der sphärischen Trigonometrie an Uebersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz alle die bis dahin erschienen übertrifft und so in würdiger Weise die Bestrebungen des 18. Jahrhunderts auf dem Gebiete unserer Wissenschaft abschliesst » ⁽¹⁹³⁾.

Gli è presumibilmente nel corso di tali studi che Lagrange ebbe a notare che le formole della Trigonometria sferica sono indipendenti dal postulato di Euclide, e fu indotto a pensare che, facendo tendere ad infinito il raggio della sfera su cui si opera, si sarebbe giunti a sormontare quelle difficoltà della Geometria del piano che i non sterili conati di Legendre avevano posto all'ordine del giorno al tramonto del secolo XVIII. Tale convin-

zione egli ebbe a manifestare conversando col Biot⁽¹⁹⁴⁾ e forse costituiva il nocciolo di una memoria di cui — a quanto narra A. de Morgan⁽¹⁹⁵⁾ — egli avrebbe cominciata la lettura all'Accademia delle Scienze di Parigi, lettura che interruppe improvvisamente esclamando « Il faut que j'y songe encore! ».

24. Tutto quanto esponemmo nel presente Capitolo basta a provare che, durante il soggiorno a Parigi, il genio di Lagrange si mostrò di forza, se non di originalità, comparabile a quella dimostrata nelle precedenti fasi di sviluppo. Nè a lui mancarono le più espressive manifestazioni di alta considerazione da parte di discepoli, di privati, del Governo: infatti ebbe la dignità di Grand'Ufficiale della Legion d'Onore, a lui venne assegnato il primo de' premi decennali istituiti da Napoleone I⁽¹⁹⁶⁾, a lui fu assegnato un posto nel Senato, a lui infine fu conferito l'ambito titolo di Conte dell'Impero. Circondato da un culto universale egli continuava a lavorare senza dar segno di alcun deperimento intellettuale; ma le frequenti sincopi — che tanto allarmavano parenti ed amici — erano sintomi indubbi di un morbosissimo indebolimento fisico. Però gli è soltanto verso il cadere di marzo del 1813 che a tale diminuzione di forze, lenta ma incessante, si accompagnarono fenomeni allarmanti. Tuttavia il giorno 8 del seguente aprile egli potè ricevere i colleghi Monge, Laplace e Chaptal — incaricati di recargli, in nome dell'Imperatore, il Gran cordone dell'Ordine imperiale della Riunione —, intrattenendosi famigliarmente con essi. Ma fu l'ultimo raggio di luce proveniente da una fiamma che andava spegnendosi: chè due giorni dopo (10 aprile 1813) alle 9^{3/4}, egli esalava la sua grande anima⁽¹⁹⁷⁾.

25. L'Istituto di Francia ed il Senato conservatore assistettero in pompa magna alle sue esequie⁽¹⁹⁸⁾; e, dopo che il presidente del più eccelso corpo politico della Francia ebbe dato all'illustre estinto il supremo addio, Laplace, con parola commossa, delineava rapidamente le immense benemerienze scientifiche del sommo matematico, osservando, fra l'altro, che « parmi les inventeurs qui ont le plus reculé les bornes de nos connaissances Newton et lui... paraissent avoir possédé au plus haut point ce tact heureux qui, faisant discerner dans les objets les principes généraux qu'ils recèlent, constitue le véritable génie des sciences dont le but est la découverte de ces principes. Ce tact, joint à une rare élégance dans l'exposition des théories les plus abstraites, caractérise M. de Lagrange ».

Riuscirebbe impossibile delineare con maggiore chiarezza e sobrietà di parole l'opera scientifica del Grande da un secolo scomparso, chè sostanza

e forma erano di pari perfezione in tutte le sue scritture! L'eleganza dei calcoli e la lucidità dello stile fanno ancor oggi dei suoi scritti altrettanti insuperabili modelli; d'altra parte l'originalità e profondità delle sue vedute sono tali che a lui fu dato, in tutti i vari campi che ha coltivati, di inaugurare un'era novella o di chiuderne un'altra.

Così, nella Teoria dei Numeri pose termine all'epoca cominciata con Fermat e preparò quella a cui compete il nome di Gauss, mentre nella Teoria delle Equazioni schiuse il grande periodo nel quale — per precipuo merito di Ruffini, Cauchy, Abel, Galois — questa disciplina ha trovata una nuova anima nel concetto di sostituzione. Similmente, mentre corona degnamente l'opera trigonometrica del secolo XVIII, scrive le prime pagine della Geometria analitica, nel senso che a tale vocabolo venne dato da tutti coloro che se ne occuparono durante il secolo passato. Nell'Analisi in generale egli appare come ultimo rappresentante di quello che può dirsi indirizzo algoritmico, il quale, per opera di Cauchy e Abel, doveva, all'alba del secolo XIX, cedere il posto al regno del rigore: ma per certe speciali teorie (ad esempio le Equazioni differenziali ed il Calcolo delle variazioni) egli è tuttora venerato come pioniere e fondatore. E se le sue assidue ricerche sul Calcolo delle probabilità e la Meccanica celeste ebbero la sfortuna di precedere di poco quelle più decisive di Laplace e Gauss, l'apparizione della *Mécanique analytique* può ben compararsi al sorgere del sole, chè lo splendore da essa emanante fece cadere in dimenticanza tutti gli scritti congeneri anteriori. Calcolatore geniale si mostrò insuperabile nell'immaginare nuove procedure aritmetiche ed analitiche, onde tutti coloro che serban fede nell'avvenire del simbolismo algebrico considerano le *Opere di Lagrange* come inesauribile fonte di preziosi ammaestramenti.

Dopo un secolo intero dacchè la stanca mano di Lagrange cadde sulle eterne pagine da lui vergate, dopo un secolo che per attività e fecondità matematica supera di gran lunga tutti i precedenti, noi troviamo il nome di Lagrange ancora collegato a tutte le varie branche della scienza matematica: onde per tutti coloro che le coltivano è dovere e vanto di proclamarsi discepoli dell'immortale Scienziato a cui l'Italia diede i natali, a cui la Germania assicurò la pace e la tranquillità indispensabili ad un fecondo lavoro scientifico, a cui la Francia largì, con insuperabile generosità, i supremi onori a cui può aspirare un pensatore.

Genova, 31 dicembre 1912.

NOTE

(¹) *Opere del Marchese G. C. de' Toschi di Fagnano pubblicate da V. Volterra, G. Loria e D. Gambioli*, Vol. III (Roma, 1912), p. 181. È la casa attualmente contrassegnata col n. 29 in Via Lagrange.

(²) Cfr. una dichiarazione ufficiale fatta da Lagrange il 30 marzo 1795 e riprodotta a p. 286 del T. XIV delle *Oeuvres complètes de Lagrange publiées par les soins de J. A. Serret et G. Darboux* (Paris, 1867-1892). D'altronde nel Registro degli Atti di nascita e battesimo della Parrocchia di S. Eusebio (detta di S. Filippo) a Torino si trova il seguente documento:

ATTO DI NASCITA E BATTESIMO.

« LAGRANGIA GIUSEPPE LODOVICO, figlio del signor Giuseppe Francesco Ludovico et Teresa Grosso, giugali Lagrangia, nato li venticinque gennajo dell'anno millesettecentotrentasei, fu battezzato il 30 gennajo seguente. Padrino fu il sig. Carlo Lagrangia, e Madrina l'Ill.^{ma} Sig.^a Contessa Anna Caterina Rebuffi di Traves. — Firm. Padre Carlo Boscallis della Congregazione dell'Oratorio e Rettore della Parrocchia di S. Eusebio ».

Notiamo per incidenza che questo documento porge in certo modo una sanzione legale al costume, invalso in passato ed ora abbandonato, di scrivere LAGRANGIA invece di LAGRANGE.

(³) Un fatto congenere è offerto dalla biografia di C. MÉRAY, il quale (come egli ebbe a scrivermi il 15 febbrajo 1899) cessò di occuparsi di geometria, tema de' suoi primi lavori, quando constatò l'impossibilità di determinare, per via puramente geometrica, il numero dei punti comuni a due sezioni coniche.

(⁴) Che la collezione di lettere di cui disponiamo non sia completa emerge, fra l'altro, da ciò che il carteggio con FAGNANO s'inizia con una risposta di questo (*Opere di Fagnano*, T. III, p. 179) e quello con EULERO con una lettera di Lagrange che evidentemente non inaugura il relativo epistolario (*Oeuvres de Lagrange*, T. XIV, p. 135).

(⁵) *Lettera di Luigi de la Grange Tournier, torinese, all'illustrissimo signor Conte Giulio Carlo da Fagnano, contenente una nuova serie per i differenziali ed integrali di qualsivoglia grado, corrispondente alla newtoniana per le potestà e le radici*. Torino, 1754 (*Oeuvres de Lagrange*, T. VII, p. 583-588; *Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 181-185).

(⁶) V. lettera al Fagnano del 14 agosto 1754 (*Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 189).

(⁷) Tale aneddoto è raccontato dall'Arago nella sua biografia di Fresnel (*Oeuvres de F. Arago*, T. I. Paris, 1854, p. 119).

(⁸) *Opere di C. G. di Fagnano*, T. III, p. 202.

(⁹) In una lettera scritta a D'ALEMBERT il 20 novembre 1769 LAGRANGE, a proposito del calcolo delle variazioni, scriveva: «... la méthode dont je parle a été le premier fruit de mes études (n'ayant que dix-neuf ans lorsque je l'imaginai) et... je le regarde toujours comme ce que j'ai fait de mieux en Géométrie » (*Oeuvres de Lagrange*, T. XIII, p. 154).

(¹⁰) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 138; cfr. la risposta di EULERO in data 6 settembre 1755, ivi p. 144. Secondo un biografo del sommo matematico (VASSALLI-ERANDI, *Notice abrégée de la vie et des écrits de Louis Lagrange*, nel T. XII delle Miscellanee di Storia Italiana), la scoperta sarebbe stata fatta da lui nella Chiesa di S. Francesco di Paola, ascoltando un concerto musicale.

(¹¹) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 146.

(¹²) Questo atto di governo venne pubblicato da G. VACCA nell'articolo *Sui primi anni di Giuseppe Lagrange* (Bollettino di bibl. e storia delle sc. matem., T. IV, 1901, p. 2).

(¹³) Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 207. In senso somigliante LAGRANGE si esprimeva scrivendo ad Eulero il 20 novembre 1755 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 147).

(¹⁴) L'Università di Torino non fu sede di fiorenti studi fisico-matematici prima del secolo XIX. Nota il VALLAURI (*Storia delle Università degli studi del Piemonte*, II ed., Torino, 1875, p. 413), parlando delle solerti cure date da re Carlo Emanuele III a quell'istituto, che « sugli studi fisici e matematici sembra che non scendesse egual favore », forse perchè (stando almeno a quanto risulta dagli scarsi documenti sino ad ora pubblicati) non avevano alcun ben definito scopo pratico o sociale, come possedevano le discipline mediche, giuridiche e letterarie facenti parte del programma degli studi universitari. In principio del secolo XVIII si era fatto venire da Bologna, ove le matematiche erano in fiore, il CORAZZI; ma egli si dimostrò professore mediocre; alla sua morte (1726) una delle due cattedre di matematica rimase per parecchio tempo vacante, talchè quella disciplina restò tutta affidata ad un certo CARLO TOMMASO BOCCA, individuo totalmente oscuro. Finalmente nel gennajo 1730 fu nominato professore di matematica il P. GIULIO ACCETTA, che, come dice il VALLAURI (op. cit., p. 413) fu « il primo che cominciasse a rialzare alquanto gli studi matematici in Piemonte »; la determinazione della posizione astronomica di Torino da lui compiuta gli fece ottenere una certa notorietà ed il grado di corrispondente dell'Accademia di Parigi, mentre il volume intitolato *Gli Elementi di Euclide a migliore e più chiara maniera ridotti* (Torino, 1753), pubblicati dopo la sua morte dal suo discepolo e successore FILIPPO REVELLI, gli assicurarono un posto, sia pur modesto, nella storia della matematica. Nell'anno 1755 le due cattedre matematiche (che, in base agli statuti del 1737, erano stabilite nell'Università di Torino, con gli stipendii annui di L. 1200 l'una, di L. 2400 l'altra) erano occupate, quella di geometria dal REVELLI e quella di matematica da F. D. MICHELETTI, persona di cui si serbò memoria solo perchè fu membro dell'Accademia delle Scienze di Torino.

(¹⁵) V. l'articolo del VACCA citato nella nota (¹²).

(¹⁶) Lettera del 19 maggio 1756 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 155).

(¹⁷) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 156. Cfr. anche una lettera scritta da LAGRANGE a FAGNANO il 4 ottobre 1756 (Opere di C. G. di Fagnano, T. III, p. 208).

(¹⁸) A. HARNACK, *Geschichte der k. Preuss. Akad. der Wissenschaften*, T. I (Berlin, 1900), p. 338.

(¹⁹) « Der jugendliche Lagrange gestaltete 1760, noch in Turin, das Princip so, dass es nach Jacobi's Ausspruch in seiner Händen die Mutter unser ganzen analytischen Mechanik ward ». E. DU BOIS REYMOND, *Maupertuis* (Reden, II. Aufl., II. Bd., Leipzig, 1912, p. 462).

(²⁰) Per più minuti particolari al riguardo si ricorra a T. VALLAURI, *Delle società letterarie del Piemonte* (Torino, 1844, p. 156-215) ed al documentatissimo volume commemorativo *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche 1783-1883* (Torino, 1883).

(²¹) Escluderemo soltanto un lavoro sopra l'Analisi indeterminata di secondo grado, perchè è assodato che appartiene al periodo « berlinese » della vita di Lagrange; per converso faremo qui cenno anche delle posteriori continuazioni che ebbero le ricerche iniziate durante l'epoca « torinese ».

- (²²) *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*. Oeuvres, T. I, p. 1-20.
- (²³) *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Oeuvres, T. I, p. 335-362.
- (²⁴) « Desideratur . . . methodus a resolutione geometrica et lineari libera ». Così sta scritto nell'art. 39 del Cap. II della fondamentale memoria *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Lausannae et Genevae, 1744).
- (²⁵) *Elementa calculi variationum*. Novi Comment. Acad. Sc. Petrop., T. X, 1764.
- (²⁶) V. la memoria intitolata *Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis* (Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris, 1767).
- (²⁷) *Sur la méthode des variations*. Oeuvres, T. II, p. 37-63.
- (²⁸) *Sur la méthode de trouver les courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou de minimum* (Mém. de l'Acad. des Sciences. Paris, 1767).
- (²⁹) *Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes*. Oeuvres, T. I, p. 23-36.
- (³⁰) *Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards*. Oeuvres, T. IV, p. 151-251.
- (³¹) *Comptes-rendus*, T. II, p. 396.
- (³²) Questa memoria si trova riassunta da TODHUNTER, *A history of the theory of probabilities* (Cambridge and Dublin, 1865), p. 313-320.
- (³³) Memorie della Società Italiana delle Scienze, T. III, 1786, p. 313-320.
- (³⁴) *Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales*. Oeuvres, T. V, p. 627-641.
- (³⁵) *Solutions de divers problèmes de calcul intégral*. Oeuvres, T. I, p. 471-668.
- (³⁶) *Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable*. Oeuvres, T. II, p. 5-33.
- (³⁷) *Recherches sur la nature et la propagation du son*. Oeuvres, T. I, p. 39-148. Il lettore desideroso di più minuti particolari sopra quanto è ivi esposto ricorra ai §§ 10-12 della II Parte del grande Rapporto di H. BURCKHARDT sopra le *Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen* inserito nel T. X del Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung.
- (³⁸) Parole di E. BELTRAMI: v. Opere, T. II, Milano, 1904, p. 464.
- (³⁹) *Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes*. Oeuvres, T. II, p. 67-121.
- (⁴⁰) A. CAYLEY, *On Lagrange solution of the problem of the two fixed centres* (Quart. Journ. of mathem., T. 2, 1858, oppure Collected Papers, T. III, p. 114 e segg.).
- (⁴¹) *Sur la figure des colonnes*. Oeuvres, T. II, p. 125-170.
- (⁴²) Per brevità non ci arrestiamo sopra la *Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque* (Oeuvres, T. VII, p. 591-594) e la *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (Ivi, p. 597-599), non essendo che brevi commenti a lavori altrui.
- (⁴³) *Mémoire sur l'utilité de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière*. Oeuvres, T. II, p. 173-234.
- (⁴⁴) Si veggano i *Miscellaneous tracts* pubblicati nel 1757.
- (⁴⁵) Cfr. TODHUNTER, op. cit. nella nota (³²), p. 428.
- (⁴⁶) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 4.
- (⁴⁷) Ivi, p. 9.
- (⁴⁸) V. una lettera di d'Alembert pubblicata da CH. HENRY nel T. XIX (1886) del *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matem. et fis.*, p. 131.

(⁴⁹) *Recherches sur la libration de la lune, dans lesquelles on tache de résoudre la question proposée par l'Académie royale des sciences pour le prix de l'année 1764*. Oeuvres, T. VI, p. 5-61.

(⁵⁰) V. la Prefazione generale posta in testa al T. I di J. G. H. LEIBNIZ, *Opera Omnia* (Genevae, 1768); cfr. la lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 26 gennaio 1765 (Oeuvres, T. XIII, p. 31).

(⁵¹) Si veggano le lettere di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 30 maggio e del 6 settembre 1765 (Oeuvres, T. XIII, p. 31 e 43).

(⁵²) Per tutto quanto concerne questo istituto si vegga l'opera dell'HARNACK citata nella nota (¹⁸).

(⁵³) V. la lettera di EULERO a LAGRANGE del 2 ottobre 1759 (Oeuvres, T. XIV, p. 162).

(⁵⁴) Lettera del 4 febbrajo 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 53).

(⁵⁵) Lettera del (?) marzo 1766 (ivi, p. 55). Cfr. la lettera di LAGRANGE ad EULERO del 19 aprile 1766 (Id., T. XIV, p. 208). Un suggerimento congenere fu dato da EULERO: v. la lettera di questo a LAGRANGE del 3 maggio 1766 (Oeuvres, T. XIV, p. 208).

(⁵⁶) *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle*. Oeuvres, T. VI, p. 67-225. Cfr. la lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 25 marzo 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 57).

(⁵⁷) Lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 5 aprile 1766 (id. p. 58).

(⁵⁸) Per giudicare conformemente a giustizia il contegno del governo sardo di fronte a LAGRANGE, bisogna tener presente che il periodo di giovinezza di questo coincide con quello che tenne dietro alla guerra per la successione d'Austria (1735-1749), nella quale il Piemonte ebbe una parte attiva e gloriosa; è un periodo di riordinamento e di riforme pacifiche, nel quale il governo, per impellenti ragioni finanziarie, credette di restringere la propria azione a conservare piuttosto che a promuovere la cultura; tuttavia la fondazione delle Università di Cagliari e di Sassari (1764-1765) sta a provare che, nei limiti del possibile, esso agiva in conformità alle esigenze dei tempi.

(⁵⁹) Lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 26 aprile 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 61).

(⁶⁰) HARNACK, *Geschichte*, T. I, p. 601. Si riferiscono al trasloco di Lagrange le lettere di Federico II datate 29 marzo, 26 luglio e 12 agosto 1766 pubblicate nel T. XXIV (p. 312, 407 e 409) delle *Oeuvres de Frédéric*. Va eziandio rilevato a titolo di onore di LAGRANGE che egli avrebbe potuto occupare anche il posto di Presidente dell'Accademia, che d'ALEMBERT gli offerse due volte (v. le lettere del 23 maggio e del 16 giugno 1769 stampate in Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 71 e 135); ma lo rifiutò sempre per modestia (lettere a d'Alembert del 4 giugno e del 15 luglio 1769, pubblicate ivi p. 72 e 142).

(⁶¹) Lettera di LAGRANGE a d'ALEMBERT del 10 maggio 1766 (Oeuvres, T. XIII, p. 62).

(⁶²) Ivi, p. 73.

(⁶³) A Berlino LAGRANGE abitò sempre Unter den Linden in casa del presidente GÖRNE (HARNACK, l. c., T. I, p. 481).

(⁶⁴) Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 316.

(⁶⁵) « Il calcule, calcule des courbes tant que vous en voudrez »; così scriveva Federico II a d'Alembert il 13 (23) gennaio 1782 (Oeuvres de Frédéric, T. XXIV, p. 212).

(⁶⁶) Cfr. una lettera di EULERO a LAGRANGE del 9 gennaio 1767 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 212). Più tardi (23 maggio 1775) egli scrivevagli: « Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'Académie un plus grand service qu'en prenant mon congé, et, à cet égard, je puis me vanter d'une grande supériorité sur vous, vu que vous ne lui saurez jamais rendre un tel service » (ivi, p. 241).

(⁶⁷) V. una lettera di d'ALEMBERT a LAGRANGE del 14 giugno 1771 e la risposta in data 12 luglio (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 202 e 205); inoltre due lettere del CASTILLON a d'Alembert del 27 aprile 1768 e del 18 ottobre 1771 pubblicate da CH. HENRY (*Bull. di bibl. e storia delle sc. mat. e fis.*, T. XVIII, p. 549 e 552).

(⁶⁸) Infatti in data 6 giugno 1769 egli scriveva a d'ALEMBERT: «... j'ai une mauvaise habitude, dont il m'est impossible de me défaire: c'est que je refais souvent mes Mémoires, même plusieurs fois, jusqu'à ce que j'en sois passablement content» (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 132). Altre notizie interessantissime relative al metodo di studio tenuto da Lagrange si trovano in un articolo di F. G. MAURICE (che ebbe col grande geometra lunga dimestichezza) dal titolo *Directions pour l'étude approfondie des mathématiques recueillies des entretiens de Lagrange*, inserito nel *Moniteur* del 26 febbrajo 1814. Tale articolo venne sostanzialmente riprodotto da C. A. BJERKNES a pag. 174 del suo noto volume sopra *N. H. Abel* (Paris, 1885), come tolto dal Giornale di Lindenau e Bohnenberg, mentre nel T. I della *Zeitschrift für Astronomie und verwandten Wissenschaften* non si trova che un Elenco delle pubblicazioni del grande geometra; tale rettifica mi è possibile grazie al cortese aiuto di G. ENESTRÖM (Stockholm) e V. MORTET (Parigi).

(⁶⁹) Ricerche accuratissime fatte, dietro mia preghiera, dal dott. G. VALENTIN a Berlino per rintracciare l'atto di matrimonio di LAGRANGE non condussero ad alcun risultato. Altrettanto dicasi per quelle praticate allo stesso scopo negli archivi della R. Ambasciata d'Italia presso la Corte tedesca e nel R. Archivio di Stato di Torino; il che non deve stupire, perchè già il BIANCHI ha rilevato (nella sua pubblicazione sopra *Le materie politiche relative all'Estero negli Archivi di Stato del Piemonte*) che ivi mancano gli atti dell'ambasciata presso il re di Prussia dal 1731 al 1775.

(⁷⁰) L'ultima delle lettere scritte da d'ALEMBERT a LAGRANGE, pochi giorni prima di morire (27 settembre 1783), è appunto per condolarsi con l'amico per la perdita che egli aveva fatta (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 377).

(⁷¹) Ciò è attestato da parecchi passi del carteggio con d'ALEMBERT (Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 131, 173, 300).

(⁷²) La memoria premiata è l'*Essai sur le problème des trois corps* (Oeuvres, T. VI, p. 229-324).

(⁷³) Cfr. una lettera di d'ALEMBERT a MELANDERHJELM del 25 aprile 1774 pubblicata dall'HENRY (*Bull. di bibl. e storia, ecc.*, T. XVIII, 1885, p. 615); la memoria premiata è intitolata *Sur l'équation séculaire de la lune* (Oeuvres, T. VI, p. 335-399); ivi si trova la più antica menzione del concetto di «potenziale».

(⁷⁴) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 238 e T. XIV, p. 268.

(⁷⁵) Ivi, T. XIV, p. 267.

(⁷⁶) Ivi, p. 305.

(⁷⁷) Autore di tale progetto fu il marchese CARACCIOLI, divenuto da ambasciatore vicerè di Sicilia; le ragioni per le quali LAGRANGE non fu favorevole a questo disegno si desumono da una sua lettera al CARACCIOLI in data 13 ottobre 1781 (Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 281) comunicata da F. SCLOPIS alla R. Acc. di Torino il 28 gennajo 1872.

(⁷⁸) Id., p. 284.

(⁷⁹) Ivi, T. XIII, p. 250.

(⁸⁰) Ivi, p. 371.

(⁸¹) Ivi, p. 375.

(⁸²) Vedi *Dieci lettere inedite di G. L. Lagrange scritte al matematico veronese A. M. Lorgna* (Buletino di bibliografia e storia, ecc., T. VI, 1873, p. 131-141); *Sette lettere inedite di G. L. Lagrange al P. Paolo Frisi tratte dagli autografi nella Biblioteca Ambrosiana di Milano e pubblicate per cura di A. FAVARO* (Atti della R. Acc. di Torino, T. XXXI, 1895).

(⁸³) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 118. A proposito delle ricerche aritmetiche del matematico di cui ci occupiamo, è interessante la seguente notizia data da E. LUCAS e cortesemente segnalatami da H. BROCARD: « Lagrange avait l'intention de publier une nouvelle édition de l'arithmétique du géomètre d'Alexandrie (Diophante) dans laquelle il se proposait surtout d'éclaircir les courtes remarques de Fermat et de restituer la plus grande partie des beaux théorèmes qui y sont répandus; mais cet ouvrage n'a point été terminé et l'analyse manuscrite des quatre premiers livres seulement est conservée à la bibliothèque de l'Institut » (*Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante*).

(⁸⁴) *Solution d'un problème d'arithmétique* (Oeuvres, T. I, p. 671-731).

(⁸⁵) Cfr. le *Additions à l'Algèbre de M. Euler* (Oeuvres, T. VII, p. 158).

(⁸⁶) *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré* (Oeuvres, T. I, p. 378-535).

(⁸⁷) Oeuvres de Lagrange, T. XIII, p. 127.

(⁸⁸) *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombre entiers* (Oeuvres, T. II, p. 655-726).

(⁸⁹) *Recherches d'arithmétique* (Oeuvres, T. III, p. 695-795).

(⁹⁰) È questa la prima pubblicazione di carattere didattico che abbia fatta Lagrange.

(⁹¹) *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* (Oeuvres, T. III, p. 189-201).

(⁹²) *Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers* (Id., p. 425-438); ivi è anche posto in chiaro il legame che passa fra il teorema di Wilson ed il « piccolo » teorema di Fermat e sono stabilite alcune nuove proposizioni congeneri.

(⁹³) *Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante* (Oeuvres, T. IV, p. 367-398).

(⁹⁴) *Sur la résolution des équations numériques* (Oeuvres, T. II, p. 359-378).

(⁹⁵) Per più minuti particolari rimandiamo a *A History of the Arithmetical Methods of Approximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknown Quantity* di F. CAJORI (Colorado College Publications, Science Series, Vol. XII, 1910).

(⁹⁶) *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques* (Oeuvres, T. II, p. 581-652).

(⁹⁷) Cfr. anche le posteriori *Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations littérales* (Oeuvres, T. IV, p. 343-374).

(⁹⁸) *Sur l'élimination des inconnues dans les équations* (Oeuvres, T. III, p. 141-154).

(⁹⁹) *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries* (Oeuvres, T. III, p. 5-73).

(¹⁰⁰) *Sur le problème de Képler* (Oeuvres, T. III, p. 113-138).

(¹⁰¹) Oeuvres, T. III, p. 205-241; cfr. J. PIERPONT, *Early History of Galois' Theory of Equations* (Bull. of the Amer. mathem. Society, T. IV, 1898, p. 332-340). Dalle considerazioni esposte nella memoria in discorso Lagrange tentò più tardi (v. la memoria *Sur la forme des racines imaginaires des équations*; Oeuvres, T. III, p. 479-516) di dedurre una dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche; ma lasciò a GAUSS la gloria di dire l'ultima parola sopra questa essenziale questione di principio.

(¹⁰²) *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (Oeuvres, T. III, p. 661-692).

(¹⁰³) Cfr. TH. MUIR, *The Theory of Determinants in its historical order of developement*, T. I, 2^a ed., London, 1906, p. 37-40.

(¹⁰⁴) *Solution algébrique d'un problème de géométrie* (Oeuvres, T. IV, p. 335-339).

(¹⁰⁵) V. la memoria *Sur une nouvelle propriété des sections coniques* (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1776).

(¹⁰⁶) *Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques* (Oeuvres, T. III, p. 619-649). *Addition au Mémoire précédent* (Id., p. 651-658).

(¹⁰⁷) V. la memoria *De causa physica fluxus et refluxus maris*, premiata nel 1740 dall'Accademia di Parigi.

(¹⁰⁸) *Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques* (Oeuvres, T. V, p. 645-660).

(¹⁰⁹) *Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques, décrites par des forces tendentes au foyer et réciproquement proportionnelles aux carrés des distances* (Oeuvres, T. IV, p. 559-582).

(¹¹⁰) *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice* (Id., T. III, p. 579-616).

(¹¹¹) Cfr. MUIR, op. cit. nella nota (¹⁰⁸), p. 33-37.

(¹¹²) *Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières* (Oeuvres, T. IV, p. 586-634).

(¹¹³) *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral* (Oeuvres, T. IV, p. 301-332).

(¹¹⁴) *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré* (Oeuvres, T. II, p. 253-312).

(¹¹⁵) *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables* (Oeuvres, T. III, p. 441-476).

(¹¹⁶) *Mémoire sur la méthode d'interpolation* (Oeuvres, T. V, p. 633-684). Notiamo che nell'antecedente scritto *Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation* (Id., p. 517-532) il Nostro aveva esposta una notevole generalizzazione dell'algoritmo usato dal BRIGGS nella sua *Arithmetica logarithmica*; si veggano anche le osservazioni *Sur les interpolations* (Oeuvres, T. VII, p. 534-553) di cui LAGRANGE intendeva fare applicazione a questioni astronomiche.

(¹¹⁷) Cfr. A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, T. II (Leipzig, 1905), p. 28 e *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, I, D. 3, n. 9.

(¹¹⁸) V. la memoria *Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre* (Oeuvres, T. III, p. 549-575), l'ultimo § dell'altra *Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des intégrales particulières* (Id., T. IV, p. 586-634) e finalmente la *Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires* (Id., T. V, p. 543-562), ove giova rilevare lo studio e l'estensione allo spazio del problema delle traiettorie oblique di un sistema di curve piane.

(¹¹⁹) *Sur les intégrales particulières des équations différentielles* (Oeuvres, T. IV, p. 5-108).

(¹²⁰) *Mémoire sur une question concernant les annuités* (Oeuvres, T. V, p. 613-624).

(¹²¹) V. la 3.^a ediz. (1750) del *Treatise of annuities of lines*.

(¹²²) *Recherches sur la manière de former des tables de planètes d'après les seules observations* (Oeuvres, T. VI, p. 506-627).

(¹²³) *Sur la construction de cartes géographiques* (Oeuvres, T. IV, p. 637-692).

(¹²⁴) Però è ignoto chi per primo l'ha avvertita; il DELAMBRE (*Histoire de l'Astronomie au XVIII^e Siècle*, Paris, 1827, p. 88) ne trovò cenno, con una dimostrazione non perfetta, in *A complete system of astronomy* (London, 1728) di C. LEADBETTER.

(¹²⁵) Donde il nome di «Schwarzian derivative» usato dal CAYLEY.

(¹²⁶) *Sposizione del metodo delle equipollenze*, n. 84 (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, T. XXV, Parte II, 1855).

(¹²⁷) *Sur les courbes tautochrones* (Oeuvres, T. II, p. 318-331).

(¹²⁸) *Nouvelles réflexions sur les tautochrones* (Oeuvres, T. III, p. 157-188).

(¹²⁹) Per informazioni meno incomplete sulla storia di tale questione si ricorra alla monografia di C. OHRTMANN, *Das Problem der Tautochronen* (Berlin, 1872).

(¹³⁰) *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances* (Oeuvres, T. IV, p. 401-418).

(¹³¹) *Sur une nouvelle propriété du centre de gravité* (Oeuvres, T. V, p. 535-540).

- (¹³³) *Sur la percussion des fluides* (Oeuvres, T. II, p. 237-249).
- (¹³⁸) *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides* (Oeuvres, T. IV, p. 695-748).
- (¹³⁴) *Sur la théorie des lunettes* (Oeuvres, T. IV, p. 535-555).
- (¹³⁵) *Mémoire sur une loi générale d'optique* (Oeuvres, T. V, p. 701-710).
- (¹³⁶) *Sur la force des ressorts pliés* (Oeuvres, T. III, p. 77-110).
- (¹³⁷) *Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes* (Oeuvres, T. V, p. 591-609).
- (¹³⁸) *Réflexions sur l'échappement* (Oeuvres, T. IV, p. 421-436).
- (¹³⁹) *Sur l'altération des moyens mouvements des planètes* (Oeuvres, T. IV, p. 255-271).
- (¹⁴⁰) *Sur le problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations* (Oeuvres, T. IV, p. 439-496 e 496-532) e *Nouvelle méthode pour déterminer l'orbite des comètes d'après les observations* (Id., T. VII, p. 471-486). Cfr. anche la nota intitolata *Equations pour la détermination des éléments de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen de trois observations peu éloignées* (Ivi, p. 563-567).
- (¹⁴¹) *Recherches sur les perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes* (Oeuvres, T. VI, p. 403-503).
- (¹⁴²) *Théorie de la libration de la lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète* (Oeuvres, T. V, p. 122).
- (¹⁴³) *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 125-207, 211-344), *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes* (Ivi, p. 382-414) e *Lettre de Lagrange à Laplace relative à la théorie des inégalités séculaires des planètes* (Id., T. VI, p. 631-632).
- (¹⁴⁴) *Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 347-377, 417-422).
- (¹⁴⁵) *Mémoire sur l'équation séculaire de la lune* (Oeuvres, T. V, p. 687-698); ivi s'incontra per la prima volta la nota « formola d'interpolazione di Lagrange ».
- (¹⁴⁶) *Sur le mouvement des noeuds des orbites planétaires* (Oeuvres, T. IV, p. 111-147) e *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinations des orbites des planètes* (Id., T. VI, p. 635-709). Cfr. la nota *Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique* (Id., T. VII, p. 517-532).
- (¹⁴⁷) *Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes* (Oeuvres, T. V, p. 493-514).
- (¹⁴⁸) *Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'Addition aux principes de Newton* (Oeuvres, T. V, p. 565-587).
- (¹⁴⁹) *Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769* (Oeuvres, T. II, p. 335-376).
- (¹⁵⁰) *Sur les réfractions astronomiques* (Oeuvres, T. III, p. 519-545).
- (¹⁵¹) *Remarques sur la méthode des projections pour le calcul des éclipses de soleil ou d'étoiles* (Oeuvres, T. VII, p. 324-412).
- (¹⁵²) *Sur le calcul des éclipses sujettes aux parallaxes* (Oeuvres, T. VII, p. 416-465, 513-514).
- (¹⁵³) *Nouveau moyen de déterminer les longitudes de Jupiter et de Saturne au moyen d'une table à simple entrée* (Ivi, p. 487-510).
- (¹⁵⁴) *Valeurs des variations annuelles des éléments des orbites des planètes* (Ivi, p. 557-560).
- (¹⁵⁵) *Solutions de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des séries* (Oeuvres, T. IV, p. 275-298).
- (¹⁵⁶) Ai dilettanti di statistica potrà forse interessare l'osservazione seguente: Le memorie di LAGRANGE occupano in totale 4678 pagine in 4°, della edizione delle sue *Oeuvres complètes*. Una classificazione (necessariamente grossolana) di queste pagine dà il seguente risultato: **Analisi 714; Fisica matematica 553; Aritmetica 734; Meccanica 200; Probabilità 174;**

Astronomia 1650; Algebra 472; Geometria 93; Trigonometria 52. Non deve stupire se all'Astronomia spettò la parte del leone quando si tenga presente che il Direttore della Classe di Matematica dell'Accademia di Berlino doveva dirigere la compilazione delle Effemeridi astronomiche da essa pubblicate; d'altronde di questioni di Meccanica celeste il Nostro (come vedemmo) cominciò ad occuparsi sino da giovane e (come vedremo) s'interessò sino al termine della sua vita. Si noti anche che fra gli obblighi del Direttore della Classe matematica dell'Accademia di Berlino vi era pur quello di esaminare e dar parere intorno agli scritti presentati da estranei; ora nelle *Oeuvres complètes de Lagrange* si trovano (T. V, p. 713-718) due relazioni, una delle quali concerne la sterile fatica di un quadratore del cerchio, la quale deve considerarsi come un vero modello del genere.

(¹⁵⁷) *Oeuvres de Lagrange*, T. XIII, p. 368. D'ALEMBERT rispose con ragione e cortesia il 14 dicembre 1781: « Je ne sais pas si le nombre des géomètres diminuera bientôt, comme vous le croyez, mais il suffira pour l'avancement des sciences, qu'il y en ait un seul qui vous ressemble » (Ivi, p. 371).

(¹⁵⁸) Infatti il 3 luglio 1784 scriveva all'ab. CALUSO: « Je deviens de jour en jour plus difficile sur les miens (travaux), et au lieu d'augmenter le nombre de mes mémoires imprimés, je désirerois fort de pouvoir en supprimer une partie, ou du moins la réduire en peu de pages » (G. PITTARELLI, *Due lettere inedite di Lagrange all'abate Caluso esistenti nell'Archivio storico municipale di Asti*; Atti del IV Congresso intern. dei Matematici, T. III, p. 556).

(¹⁵⁹) HARNACK, *Geschichte*, citata nella nota (¹⁵), T. I, p. 505.

(¹⁶⁰) La cura della stampa era stata assunta dal Legendre e dal Marie che si erano anche fatti mallevadori presso l'editore riguardo alle spese relative.

(¹⁶¹) Cfr. un brano di lettera scritta dal LANDRIANI e riferita a p. 130 del T. VI (1873) del *Bullettino di bibl. e storia*, ecc.

(¹⁶²) Tutti i documenti relativi al passaggio di Lagrange da Berlino a Parigi furono pubblicati dall'HARNACK, *Geschichte*, citata, T. II, p. 314-321.

(¹⁶³) Cfr. A. GENOCCHI a pag. 93 del già citato — nota (²⁰) — volume *Il primo secolo della R. Accademia delle scienze di Torino*.

(¹⁶⁴) A partire dal 1788 la sua abitazione fu in Rue Fromentan n. 4, Section du Museum (*Oeuvres*, T. XIV, p. 286).

(¹⁶⁵) Il fatto che nell'Accademia di Berlino non venne mai pronunciato alcun elogio di LAGRANGE, farebbe credere che non gli sia mai stato perdonato di avere varcato il Reno.

(¹⁶⁶) Copie di essa furono spedite all'abate CALUSO il 28 aprile 1788.

(¹⁶⁷) Però la prima dimostrazione completa di questo principio si trova nella *Théorie des fonctions analytiques*; cfr. anche la nota (che risale al 1798) *Sur le principe des vitesses virtuelles* (*Oeuvres*, T. VII, p. 371-321).

(¹⁶⁸) Per cura di PRONY, GARNIER e BINET.

(¹⁶⁹) « Lagrange's theory of the variation of the arbitrary constants, a theory perfectly complete in itself. » A. CAYLEY, *The collected Papers*, T. III, p. 200.

(¹⁷⁰) *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites* (*Oeuvres*, T. VI, p. 713-768); *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique* (Ivi, p. 771-805); *Second Mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes* (Ivi, p. 809-815).

(¹⁷¹) In data 19 maggio 1789 il MÉRIAN scriveva al ministro HERTZENBERGER che LAGRANGE, non soltanto non aveva potuto occuparsi di nulla dacchè era a Parigi, ma che aveva corso rischio di perdere la vita in un tumulto, ove erasi casualmente trovato (A. HARNACK, l. c.,

T. II, p. 319; v. anche p. 321 una lettera di Lagrange in data 14 aprile 1791). Inoltre in una lettera scritta da Lagrange all'abate Caluso il 28 aprile 1788 e pubblicata dal Pittarelli — v. nota ⁽¹⁵⁸⁾ — si legge ciò che segue: « J'ai presque pris congé de la Géométrie en quittant Berlin et le cercle des distractions au milieu duquel je vis ici est peu propre à ranimer mon ancienne passion pour cette science ».

⁽¹⁷⁸⁾ Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 284.

⁽¹⁷⁹⁾ Ivi, p. 314-315.

⁽¹⁷⁴⁾ A tale deliberazione fu probabilmente non estraneo il fatto che un nuovo vincolo avvinceva LAGRANGE alla Francia, avendo egli sposata (31 maggio 1792) una delle figlie dell'astronomo LEMONNIER. Ricerche fatte per mio incarico negli Archivi della Prefettura della Senna hanno portato alla conclusione che l'Atto di tale matrimonio non esiste più: la data surriferita venne desunta dal prezioso opuscolo di VIREY et POTEL, *Précis historique sur la vie et la mort de Joseph-Louis Lagrange* (Paris, 1813) che mi fu dato di esaminare grazie ai buoni uffici del Decano della Sorbona, P. APPELL, al quale è per me un grato dovere l'esprimere qui la mia riconoscenza.

⁽¹⁷⁵⁾ Frutto di tali studi è la postuma nota: *Formules relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon, extraites des manuscrits de Lagrange* par M. POISSON (Oeuvres, T. VII, p. 603-615).

⁽¹⁷⁶⁾ Da questa funzione puramente amministrativa il Nostro ebbe lo stimolo a scrivere quell'*Essai d'arithmétique politique sur les premiers besoins de la République* (Oeuvres, T. VII, p. 571-579) che gli accorda un posto anche nella storia dell'Economia politica.

⁽¹⁷⁷⁾ Cfr. G. BIGOURDAN, *Le système métrique de poids et mesures* (Paris, 1901).

⁽¹⁷⁸⁾ *Compas de réduction pour la distance de la lune aux étoiles* (Oeuvres, T. VII, p. 377-378).

⁽¹⁷⁹⁾ *Sur l'origine des comètes* (Id., p. 381-389). Chi desidera conoscere come sia stata giudicata l'ipotesi di LAGRANGE ricorra alla dotta memoria di O. ZANOTTI-BIANCO, *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull'origine delle comete* (Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie II, T. LXIII, 1912).

⁽¹⁸⁰⁾ Oeuvres de Lagrange, T. XIV, p. 283.

⁽¹⁸¹⁾ *École polytechnique. Le livre du Centenaire*, T. I (Paris, 1895), p. 5, 19, 20, 25.

⁽¹⁸²⁾ Cfr. *Institut de France. Académie des Sciences. Procès-verbaux des Séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois de Août 1835. Publiés conformément à une décision de l'Académie par MM. les secrétaires perpétuels*. T. I, Ans IV-VII (1795-1799), 1910.

⁽¹⁸³⁾ Affermazione erronea; nel 1796 Lagrange compì sessant'anni.

⁽¹⁸⁴⁾ *Le centenaire de l'École Normale 1795-1895* (Paris, 1895), p. 140.

⁽¹⁸⁵⁾ Oeuvres de Lagrange, T. VII, p. 183-288.

⁽¹⁸⁶⁾ *Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions* (Oeuvres, T. VII, p. 291-313).

⁽¹⁸⁷⁾ Ciò è reso manifesto considerando che l'opera in questione consta di **sei** Capitoli (97 pagine) e **tredici** Note (215 pagine).

⁽¹⁸⁸⁾ V. una limpidissima analisi della 2.^a ediz. inserita nel *Magasin encyclopédique* 1808 e riprodotta in testa alla 3.^a ediz.

⁽¹⁸⁹⁾ Cfr. R. PRONY, *Notice sur un Cours élémentaire d'Analyse fait par Lagrange* (Journ. de l'École polyth., II Cah., p. 206-208).

⁽¹⁹⁰⁾ Cfr. anche il *Discours sur l'objet de la Théorie des fonctions analytiques*, tenuto nel 1798 (Oeuvres, T. VII, p. 325-328).

⁽¹⁹¹⁾ *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (Paris, 1812).

(¹⁹³) *Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques, avec une analyse complète de ces triangles* (Oeuvres, T. VII, p. 331-399). Giova rilevare che dalla memoria di Lagrange emerge che egli percepì chiaramente l'importanza della funzione denominata più tardi « seno di un angolo triedro ».

(¹⁹³) A. VON BRAUNMÜHL, *Vorlesungen* citate nella nota (¹¹⁷), p. 167.

(¹⁹⁴) Cfr. J. HOÜEL, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* (Paris, 1867), p. 76.

(¹⁹⁵) Cfr. F. ENGEL UND P. STÄCKEL, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895), p. 212.

(¹⁹⁶) G. DARBOUX, *Eloges académiques et Discours* (Paris, 1912), p. 274.

(¹⁹⁷) Per particolari minuti intorno a quanto concerne la vita fisica di Lagrange ed alla sua morte si ricorra al *Précis* di VIREY et POTEL citato nella nota (¹⁷⁴). L'Atto originale di morte del Nostro fu distrutto nel 1871 durante gli incendi della Comune. Grazie ai buoni uffici del sig. CH. HENRY fu possibile rintracciarne la copia ricostituita in omaggio alle disposizioni generali contenute nella Legge 12 febbrajo 1872. Eccone il tenore:

« Du onze avril mil huit cent treize à dix heures du matin.

« Acte de décès de Monsieur Joseph Louis Lagrange, sénateur, grand officier de la Légion d'honneur, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, décédé hier à dix heures du matin, rue du Faubourg Saint-Honoré n. 128, en son hôtel, quartier du Roule, époux de Ma.^{me} Rénée Francoise Adélaïde Lemonnier, mondit sieur Lagrange, né à Turin, âgé de près de soixante-dix-sept ans, originaire d'une famille française. Constaté par nous Antoine Charles Roze, adjoint au maire du premier arrondissement de Paris, faisant les fonctions d'officier de l'État-Civil sur la déclaration à nous faite par les sieurs Charles François Jacques de Parfouru, propriétaire; âgé de quarant cinq ans, demeurant à Evy, département du Calvados, de présent à Paris, à domicile susdit, beau-frère du defunt, et Jean Baptiste Etienne François Maire, lieutenant-colonel, attaché au Ministère de la Guerre, âgé de trente-quatre ans, même rue n. 100, et sont signés avec nous après déclaration faite ».

(¹⁹⁸) Più tardi la Francia tributò a LAGRANGE la più significativa onoranza postuma prendendo l'iniziativa ed assumendo il patronato della prima edizione completa delle sue Opere. In base ad un Rapporto fatto da Legendre, Prony, Poisson e Lacroix, il 3 novembre 1817 (v. Oeuvres, T. XIV, p. ix-xii) venne escluso quanto di ancora inedito si trova nei manoscritti conservati nella Biblioteca dell'Istituto di Francia; ora le proposizioni che G. PEANO ricavò da un rapido esame di quei manoscritti (v. *Formulaire mathématique, Éd. de l'an 1902-03*, p. 321-324) fanno ritenere che da essi non siasi ancora spremuto tutto ciò che d'importante sarebbero in grado di porgere, onde sarebbe desiderabile che l'Accademia delle Scienze di Parigi incoraggiasse e dirigesse nuove ricerche intorno ad essi.

Inoltre da varie pubblicazioni posteriori all'anno 1892 (e che vennero da noi scrupolosamente ricordate) sarebbe agevole trarre gli elementi per un nuovo volume di Corrispondenza.