Der Fundamentalsatz der Algebra.

Von **F. Mertens** in Graz.

1.

Wenn eine algebraische Gleichung

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0$$

mit einer Unbekannten keine rationale reelle oder complexe Wurzel besitzt, so kann sie nur durch einen unendlichen unabschließbaren Vorgang befriedigt werden. Der Fundamentalsatz der Algebra, dass jede algebraische Gleichung $f(z) = 0$ Wurzeln hat, kann daher nur den Sinn haben, dass man im Stande ist, rationale complexe Werte $x + iy$ anzugeben, für welche beide Coordinaten des Einsetzungsresultats $f(x + iy)$ oder die Norm desselben von gewünschter Kleinheit sind. Ein Beweis dieses Satzes, welcher nicht die Mittel an die Hand gibt, um solche Werte thatsächlich aufzustellen, kann nicht als befriedigend angesehen werden.

Es soll hier ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra[1]) unter der Voraussetzung geführt werden, dass die Coefficienten der Function f rationale reelle oder complexe Zahlen sind, dass f mit seiner Ableitung f' keinen Theiler von höherem als dem 0^{ten} Grade gemein hat und dass $n > 1$ ist. Derselbe besteht darin, dass gezeigt wird, wie man durch eine endliche Anzahl von Versuchen zu einem Werte gelangen kann, von welchem aus das Newton'sche Näherungsverfahren mit Erfolg einsetzen kann.

2.

Wenn

$$F(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots a_m$$

eine ganze Function mit rationalen Coefficienten und $N(u)$ die Norm von u bezeichnet, so soll zur Vereinfachung unter $F_0(z)$ diejenige ganze Function von z

$$F_0(z) = g_0 z^m + g_1 z^{m-1} + \ldots + g_m$$

[1]) Vergl. Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von F. Mertens, Sitzungsb. der k. Ak. d. W. in Wien, Bd. XCVII., Abth. IIa Dec. 1888.

verstanden verden, deren Coefficienten die kleinsten den Bedingungen

$$N(a_0) \leqq g_0^2 \quad N(a_1) \leqq g_1^2 \ldots N(a_m) \leqq g_m^2$$

genügenden nicht negativen ganzen Zahlen sind. Aus dem Satze, dass der Modul der Summe zweier oder mehrerer complexer Zahlen nie die Summe der Moduln der einzelnen Zahlen übersteigt, folgt dann

$$\operatorname{mod} F(z) \leqq F_0(r),$$

wenn $\operatorname{mod} z \leqq r$.

3.

Da die reine Gleichung

$$z^m = A + iB$$

bei dem Beweise als Hilfsgleichung auftritt, so ist zu zeigen, wie man derselben mit beliebigem Grade von Genauigkeit genügen kann, wenn $m > 1$. Die Ausziehung der $2m^{\text{ten}}$ positiven Wurzel aus einer positiven rationalen Zahl soll hiebei als bekannt angenommen werden und man kann sich auf den Fall eines positiven B und nicht negativen A beschränken, da alle anderen Fälle auf denselben zurückführbar sind.

Es sei

$$(1 + ti)^{2m} = \varphi(t) + i\psi(t),$$

wo

$$\varphi(t) = 1 - (2m)_2 t^2 + (2m)_4 t^4 - \ldots$$

$$\psi(t) = 2mt - (2m)_3 t^3 + (2m)_5 t^5 - \ldots$$

und

$$(2m)_k = \frac{2m(2m-1)\ldots(2m-k+1)}{1.2\ldots k}$$

ist. Da

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = 1 - \frac{(2m)_2}{m^2} + \frac{(2m)_4}{m^4} - \frac{(2m)_6}{m^6}\left(1 - \frac{(2m-6)(2m-7)}{7.8m^2}\right) - \ldots$$

ist, so wird

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) \leqq 1 - \frac{(2m)_2}{m^2} + \frac{(2m)_4}{m^4} = -\frac{m-1}{m^3}\left(m^2 + \frac{(2m-1)(2m-3)}{6}\right)$$
$$< 0.$$

Hingegen ist $\psi(t)$ positiv, wenn $0 < t \leqq \frac{1}{m}$; denn es wird unter dieser Voraussetzung

(1)
$$\psi(t) = 2mt\left(1 - \frac{(2m-1)(2m-2)t^2}{2.3}\right) + (2m)_5\, t^5\left(1 - \frac{(2m-5)(2m-6)t^2}{6.7}\right) + \dots$$
$$> 2mt\left(1 - \frac{2}{3}\, m^2 t^2\right) \geqq \frac{2mt}{3}.$$

Die Function $A\psi(t) - B\varphi(t)$ hat hienach für $t = \frac{1}{m}$ einen positiven Wert und da sie für $t = 0$ den negativen Wert $-B$ annimmt, so gibt es zwischen 0 und $\frac{1}{m}$ rationale Zahlen τ, welche die Gleichung

(2)
$$A\psi(\tau) - B\varphi(\tau) = 0$$

mit beliebiger Genauigkeit erfüllen. Bestimmt man nun eine positive Zahl r, welche der Gleichung

$$r^{2m} = A^2 + B^2$$

mit beliebiger Genauigkeit genügt, so wird der Identität

$$[A\varphi(\tau) + B\psi(\tau)]^2 + [A\psi(\tau) - B\varphi(\tau)]^2 = (A^2 + B^2)\,[\varphi(\tau)^2 + \psi(\tau)^2]$$
$$= (A^2 + B^2)\,(1 + \tau^2)^{2m}$$

zufolge:

$$[A\varphi(\tau) + B\psi(\tau)]^2 = r^{2m}\,(1 + \tau^2)^{2m}.$$

Die Zahl

$$A\varphi(\tau) + B\psi(\tau) = \frac{A^2 + B^2}{B} \cdot \psi(\tau)$$

kann aber nach (1) nicht negativ sein und man hat daher

(3)
$$A\varphi(\tau) + B\psi(\tau) = r^m\,(1 + \tau^2)^m$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$(A + iB)\,[\varphi(\tau) - i\psi(\tau)] = r^m\,(1 + \tau^2)^m$$

und man erhält durch Multiplication mit $\frac{\varphi(\tau) + i\psi(\tau)}{(1 + \tau^2)^{2m}}$

$$A + iB = \frac{r^m\,(1 + i\tau)^{2m}}{(1 + \tau^2)^m} = \left(r\,\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} + i\,\frac{2r\tau}{1+\tau^2}\right)^m.$$

4.

Es sei g die kleinste ganze positive Zahl, welche den Bedingungen

$$N(c_1) \leqq g^2 \quad N(c_2) \leqq g^2 \dots N(c_n) \leqq g^2$$

genügt und es werde $g+2=h$ gesetzt. Für jeden der Bedingung $\operatorname{mod} z > h - \frac{2}{h}$ genügenden complexen Wert z ist dann

$$(4) \qquad N f(z) > (g+1)^2.$$

Denn aus der Identität

$$z^n = f(z) + [z^n - f(z)]$$

folgt, wenn $\operatorname{mod} z = r$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(z^n) = r^n &\leqq \operatorname{mod} f(z) + \operatorname{mod}[z^n - f(z)] \\ &\leqq \operatorname{mod} f(z) + f_0(r) - r^n \\ &\leqq \operatorname{mod} f(z) + g(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

und man hat daher auch

$$\operatorname{mod} f(z) \geqq 1 + (r - g - 1)(1 + r + \ldots + r^{n-1}).$$

Wenn also $r > h - \frac{2}{h}$ ist, so wird

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} f(z) &> 1 + \left(1 - \frac{2}{h}\right)\left(1 + h - \frac{2}{h}\right) = h - 1 + \left(1 - \frac{2}{h}\right)^2 \\ &> g + 1. \end{aligned}$$

5.

Wenn beide Coordinaten der Zahl ω_1 der arithmetischen Reihe angehören, deren Differenz $\rho^{n(n-1)}$ ist, und

$$(5) \qquad \begin{aligned} \operatorname{mod} f'(\omega_1) &< \rho^{n(n-1)} \sqrt{2}\, f_0''(h) \\ \operatorname{mod} \omega_1 &\leqq h \end{aligned}$$

ist, so kann unter gewissen Bedingungen, welche ρ hinsichtlich seiner Kleinheit zu erfüllen hat, eine Zahl ω_2 angegeben werden, deren Coordinaten derselben arithmetischen Reihe angehören und welche die Ungleichung

$$N f(\omega_2) < N f(\omega_1)$$

erfüllt.

Die Ableitung $f'(x)$ lässt sich in die Form

$$(6) \qquad f' = n P^{\lambda} Q^{\mu} \ldots.$$

setzen, wo $P, Q, \ldots$ ganze Functionen von x bezeichnen, in welchen der Coefficient der höchsten Potenz von $x = 1$ und welche sowohl unter einander als auch beziehungsweise zu $f^{(\lambda+1)}$, $f^{(\mu+1)}$, ... theilerfremd sind.

Sind f', f'' theilerfremd, so genügt es $f' = nP$ zu setzen. Ist dagegen der größte gemeinschaftliche Theiler von f' und f'' von höherem als dem 0^{ten} Grade, so sei $f^{(\lambda)}$ die letzte Ableitung von der Art, dass der größte gemeinschaftliche Theiler P der Functionen

$$f', f'', \dots f^{(\lambda)} \tag{7}$$

von höherem als dem 0^{ten} Grade ist. Es ist klar, dass P zu P' theilerfremd ist, da andernfalls $f^{(\lambda+1)}$ nicht zu P theilerfremd wäre. Hieraus folgt, dass, wenn eine der Ableitungen (7), etwa $f^{(p)}$, durch $P^{\varkappa}$ theilbar ist, die unmittelbar vorhergehende durch $P^{\varkappa+1}$ theilbar sein muss. Ist nämlich P^{α} die höchste in $f^{(p-1)}$ aufgehende Potenz von P und $f^{(p-1)} = S.P^{\alpha}$, so ist $\alpha \geqq 1$ und

$$f^{(p)} = S' P^{\alpha} + \alpha S P^{\alpha-1} P'.$$

Da aber P' zu P theilerfremd und S nicht durch P theilbar ist, so kann $f^{(p)}$ höchstens durch die $\alpha-1^{\text{te}}$ Potenz von P theilbar und es muss $\alpha \geqq k+1$ sein. Hienach ist also $f^{(\lambda-1)}$ durch P^2, $f^{(\lambda-2)}$ durch P^3, ... f' durch P^{λ} theilbar und man kann

$$f' = \varphi_1 P^{\lambda} \quad f'' = \varphi_2 P^{\lambda-1} \dots f^{(\lambda)} = \varphi_{\lambda} P$$

setzen.

Ist nun schon φ_1 zu φ_2 theilerfremd, so ist φ_1 auch zu f'' theilerfremd und es genügt $\varphi_1 = nQ$ zu setzen. Ist dagegen der größte gemeinschaftliche Theiler von φ_1 und φ_2 von höherem als dem 0^{ten} Grade, so sei φ_{μ} die letzte der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ von der Art, dass der größte gemeinschaftliche Theiler Q der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{\mu}$ von höherem als dem 0^{ten} Grade ist. Q ist dann zu P theilerfremd und man findet wie vorher

$$\varphi_1 = \psi_1 Q^{\mu} \quad \varphi_2 = \psi_2 Q^{\mu-1} \dots \varphi_{\mu} = \psi_{\mu} Q.$$

Fährt man in derselben Weise fort, so gelangt man zu der behaupteten Zerlegung.

Aus der Zerlegung (6) und der Ungleichung (5) folgt nun

$$\operatorname{mod} P^{\lambda}(\omega_1) \,.\, \operatorname{mod} Q^{\mu}(\omega_1) \dots < \frac{\sqrt{2}}{n} \rho^{n(n-1)} f_0''(h)$$

und es muss daher wenigstens für eine der Functionen $P, Q, \ldots$, welche mit F bezeichnet werde

$$\bmod F(\omega_1) < l\rho^n$$

sein, wo

$$l^{n-1} \geqq \frac{\sqrt{2}}{n} f_0''(h).$$

Es sei $m-1$ der Exponent, mit welchem F in der Zerlegung von f' vorkommt und man setze

(8) $$f' = G^{(1)} F^{m-1}\; f'' = G^{(2)} F^{m-2} \ldots f^{(m-1)} = G^{(m-1)} F.$$

Da f und f' einerseits und F und $f^{(m)}$ anderseits theilerfremd sind, so kann man ganze Functionen $\varphi, \psi, \chi, \vartheta$ bestimmen, welche den Identitäten

(9) $$\varphi f + \psi f' = 1$$
$$\chi F + \frac{\vartheta f^{(m)}}{m!} = 1$$

genügen und beziehungsweise von geringerem Grade wie $f', f, f^{(m)}, F$ sind. Aus der ersten dieser Identitäten folgt

$$\bmod \varphi(\omega_1) \bmod f(\omega_1) + \bmod \psi(\omega_1) \bmod f'(\omega_1) \geqq 1$$

und daher auch

$$\varphi_0(h) \bmod f(\omega_1) + \psi_0(h) \sqrt{2}\, \rho^{n(n-1)} f_0''(h) > 1;$$

es ist also

$$\bmod f(\omega_1) > \frac{1}{2\varphi_0(h)},$$

wenn

(10) $$\sqrt{2}\, \psi_0(h) f_0''(h) \rho^{n(n-1)} < \frac{1}{2}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Identität

$$\bmod \chi(\omega_1) \bmod F(\omega_1) + \bmod \vartheta(\omega_1) \bmod \frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!} \geqq 1$$

und daher auch

$$\vartheta_0(h) \bmod \frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!} + \chi_0(h)\, l\rho^n \geqq 1;$$

es ist also

$$\bmod \frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!} > \frac{1}{2\vartheta_0(h)},$$

wenn

$$(11) \qquad l\,\chi_0(h)\,\rho^n < \frac{1}{2}.$$

Denkt man sich ferner einen rationalen Wert $r(p+iq)$ ermittelt, in welchem $p^2+q^2=1$ ist und welcher der Bedingung

$$\frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!\,f(\omega_1)} = -r^m(p+iq)^m + \omega$$

genügt, wo $\mathrm{mod}\,\omega < \frac{1}{3}\,\mathrm{mod}\,\frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!\,f(\omega_1)}$, so wird

$$r^m > \frac{2}{3}\,\mathrm{mod}\,\frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!\,f(\omega_1)} > \frac{1}{3\,\vartheta_0(h)\,f_0(h)}$$

$$< \frac{4}{3}\,\mathrm{mod}\,\frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m!\,f(\omega_1)} < \frac{8}{3}\,\frac{\varphi_0(h)\,f_0^{(m)}(h)}{m!};$$

es ist daher $1-r^m\rho^{m(n-1)}$ positiv, wenn ρ der Bedingung

$$(12) \qquad \frac{8}{3}\cdot\frac{\varphi_0(h)f_0^{(m)}(h)}{m!}\,\rho^{m(n-1)} < 1$$

genügt.

Dies vorausgeschickt, ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn

$$z = \rho^{n-1}(p-iq+\zeta) \qquad z_1 = 1+\zeta(p+iq)$$
$$\mathrm{mod}\,\zeta \leqq \rho$$

$$f_1(z) = \frac{zf'(\omega_1)}{f(\omega_1)} + \frac{z^2f''(\omega_1)}{2!\,f(\omega_1)} + \ldots + \frac{z^{m-1}f^{(m-1)}(\omega_1)}{(m-1)!\,f(\omega_1)} + \frac{z^{m+1}f^{(m+1)}(\omega_1)}{(m+1)!\,f(\omega_1)} + \ldots$$

gesetzt wird,

$$\frac{f(\omega_1+z)}{f(\omega_1)} = 1 + \frac{z^mf^{(m)}(\omega_1)}{m!\,f(\omega_1)} + f_1(z)$$
$$= 1 - r^m\rho^{m(n-1)} - r^m\rho^{m(n-1)}(z_1^m-1) + \omega z^m + f_1(z)$$

und man hat

$$(13) \qquad \mathrm{mod}\,\frac{f(\omega_1+z)}{f(\omega_1)} \leqq$$

$$\leqq 1-r^m\rho^{m(n-1)} + r^m\rho^{m(n-1)}\,\mathrm{mod}\,(z_1^m-1) + \mathrm{mod}\,\omega z^m + \mathrm{mod}\,f_1(z).$$

Es ist aber

$$r^m \operatorname{mod}(z_1^m - 1) \leqq r^m[(1+\rho)^m - 1] < \frac{8}{3}\frac{\varphi_0(h) f_0^{(m)}(h)}{m!}[(1+\rho)^m - 1]$$

$$1 - r^m \rho^{m(n-1)} + \operatorname{mod} \omega z^m <$$

$$< 1 - r^m \rho^{m(n-1)} + \rho^{m(n-1)}(1+\rho)^m \cdot \frac{1}{3} \operatorname{mod} \frac{f^{(m)}(\omega_1)}{m! f(\omega_1)}$$

$$< 1 - \frac{1}{2} r^m \rho^{m(n-1)} + \frac{1}{2} r^m \rho^{m(n-1)}[(1+\rho)^m - 1]$$

$$< 1 - \frac{1}{6\vartheta_0(h) f_0(h)} \rho^{m(n-1)} + \frac{4}{3}\frac{\varphi_0(h) f_0^{(m)}(h)}{m!} \rho^{m(n-1)}[(1+\rho)^m - 1]$$

und nach (8)

$$\operatorname{mod} f_1(z) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{mod} f(\omega_1)} \operatorname{mod}\left[G^{(1)}(\omega_1) F^{m-1}(\omega_1) + \cdots + \frac{f^{(m+1)}(\omega_1)}{(m+1)!} z^{m+1} + \cdots\right].$$

$$< A \rho^{m(n-1)+1},$$

wo

$$A = 2\varphi_0(h)\left[G_0^{(1)}(h) l^{m-1}(1+\rho)\rho^{m-2} + \frac{1}{2!} G_0^{(2)}(h) l^{m-2}(1+\rho)^2 \rho^{m-3} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{1}{(m+1)!} f_0^{(m+1)}(h)(1+\rho)^{m+1}\rho^{n-2} + \cdots\right].$$

Die Ungleichung (13) ergibt daher

$$\operatorname{mod} \frac{f(\omega_1 + z)}{f(\omega_1)} < 1 - \frac{\rho^{m(n-1)}}{6\vartheta_0(h) f_0(h)} +$$

$$+ \frac{4\varphi_0(h) f_0^{(m)}(h)}{m!} \rho^{m(n-1)}[(1+\rho)^m - 1] + A \rho^{m(n-1)+1}.$$

Wenn also ρ auch noch die Bedingung

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{6\vartheta_0(h) f_0(h)} > \frac{4\varphi_0(h) f_0^{(m)}(h)}{m!}[(1+\rho)^m - 1] + A\rho$$

erfüllt, so ist

$$\operatorname{mod} \frac{f(\omega_1 + z)}{f(\omega_1)} < 1.$$

Sollen überdies die Coordinaten von $\omega_1 + z$ der arithmetischen Reihe mit der Differenz $\rho^{n(n-1)}$ angehören, so werde

$$p = k\rho - \gamma \qquad -q = k'\rho - \delta \qquad \zeta = \gamma + \delta i$$

gesetzt, wo k, k' ganze Zahlen und γ, δ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $\leqq \frac{1}{2}\rho$ sind, und unter ρ der reciproke Wert einer ganzen Zahl verstanden. Es ist dann

$$z = (k + ik')\rho^{n-1}$$

und $k\rho^{n-1}$, $k'\rho^{n-1}$ sind Vielfache von $\rho^{n(n-1)}$.

Erfüllt daher ρ die vier Bedingungen (10), (11), (12), (14) und setzt man $\omega_1 + z = \omega_2$, so ist

$$Nf(\omega_2) < Nf(\omega_1).$$

6.

Es sei ε eine positive Zahl, welche nur der Bedingung unterworfen ist, kleiner als $\frac{1}{h}$ zu sein, und es bezeichne J den Inbegriff aller complexen Zahlen $(p + iq)\varepsilon$, in welchen p und q ganz sind und deren Norm die Zahl h^2 nicht übersteigt. Setzt man alle Zahlen von J in die Function f ein, so erhält man eine endliche Anzahl rationaler complexer Resultate, unter welchen eines mit kleinstmöglicher Norm herausgesucht werde. Entspricht dasselbe dem Werte ω, so setze man

$$f(\omega) = a + bi \qquad f'(\omega) = a' + ib'$$

$$f(\omega) + \varepsilon i^k f'(\omega) = a + ib + \varepsilon i^k (a' + ib') = s.$$

Da

$$Nf(\omega) \leqq Nf(0) < (g+1)^2$$

ist, so muss nach (4) $\bmod \omega \leqq h - \frac{2}{h}$ sein und es ist nach der über ε gemachten Voraussetzung

$$\bmod(\omega + \varepsilon i^k) \leqq h - \frac{2}{h} + \varepsilon < h.$$

Die Zahl $\omega + \varepsilon i^k$ gehört demnach für jeden ganzzahligen Wert von k dem Inbegriffe J an und man hat

$$(15) \qquad Nf(\omega + \varepsilon i^k) \geqq Nf(\omega).$$

Entwickelt man nun $f(\omega + \varepsilon i^k)$ nach Potenzen von εi^k, so ergibt sich

$$f(\omega + \varepsilon i^k) = s + \frac{1}{2}\varepsilon^2 i^{2k} f''(\omega) + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 i^{3k} f'''(\omega) + \ldots$$

und es wird

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} f(\omega + \varepsilon i^k) &\leqq \operatorname{mod} s + \operatorname{mod}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 i^{2k} f''(\omega)\right) + \ldots \\ &\leqq \operatorname{mod} s + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h}\right) + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 f_0'''\left(h - \frac{2}{h}\right) + \ldots \\ &\leqq \operatorname{mod} s + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Nach (15) folgt hieraus

$$\operatorname{mod} f(\omega) - \operatorname{mod} s \leqq \frac{1}{2}\varepsilon^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right). \tag{16}$$

Anderseits folgt aus der Definition von s

$$\operatorname{mod} s \leqq \operatorname{mod} f(\omega) + \varepsilon \operatorname{mod} f'(\omega)$$

$$\operatorname{mod} f(\omega) + \operatorname{mod} s \leqq 2 \operatorname{mod} f(\omega) + \varepsilon \operatorname{mod} f'(\omega). \tag{17}$$

Die Multiplication der Ungleichungen (16), (17) ergibt

$$\begin{aligned}N f(\omega) - N(s) &\leqq \varepsilon^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right) \operatorname{mod} f(\omega) + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^3 f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right) \operatorname{mod} f'(\omega);\end{aligned} \tag{18}$$

es ist aber

$$f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right) \leqq f_0''(h)$$

$$f_0'\left(h - \frac{2}{h} + \frac{3\varepsilon}{2}\right) \geqq f_0'\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right) + \frac{\varepsilon}{2} f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right)$$

also um so mehr

$$f_0'(h) - \operatorname{mod} f'(\omega) > \frac{\varepsilon}{2} f_0''\left(h - \frac{2}{h} + \varepsilon\right)$$

und die Ungleichung (18) geht demzufolge in

$$N(s) - N f(\omega) - \varepsilon^2 N f'(\omega) + c\varepsilon^2 \geqq 0$$

über, wenn zur Abkürzung

$$c = f_0''(h) \operatorname{mod} f(\omega) + f_0'(h) \operatorname{mod} f'(\omega)$$

gesetzt wird.

Es werde jetzt k der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3$ gesetzt und Ns entwickelt. Man erhält so die Ungleichungen

$$c\varepsilon^2 + 2(aa' + bb')\varepsilon \geqq 0 \qquad c\varepsilon^2 - 2(aa' + bb')\varepsilon \geqq 0$$
$$c\varepsilon^2 + 2(ab' - ba')\varepsilon \geqq 0 \qquad c\varepsilon^2 - 2(ab' - ba')\varepsilon \geqq 0,$$

deren erste und zweite, sowie dritte und vierte, in einander multipliciert zu

$$c^2\varepsilon^4 - 4(aa' + bb')^2\varepsilon^2 \geqq 0$$
$$c^2\varepsilon^4 - 4(ab' - ba')^2\varepsilon^2 \geqq 0$$

führen. Durch Addition folgt sodann nach Forthebung von $4\varepsilon^2$

$$\frac{1}{2}c^2\varepsilon^2 - (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \geqq 0$$

und man hat

$$Nf(\omega)\, Nf'(\omega) \leqq \frac{1}{2}c^2\varepsilon^2$$

oder

$$\operatorname{mod} f(\omega) \operatorname{mod} f'(\omega) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}\,[f_0''(h) \operatorname{mod} f(\omega) + f_0'(h) \operatorname{mod} f'(\omega)].$$

Wird diese Ungleichung auf die Form

$$\frac{1}{2}\operatorname{mod} f'(\omega)\,[\operatorname{mod} f(\omega) - \varepsilon\sqrt{2}\, f_0'(h)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{mod} f(\omega)\,[\operatorname{mod} f'(\omega) - \varepsilon\sqrt{2}\, f_0''(h)] \leqq 0$$

gebracht, so erhellt, dass eine der Ungleichungen

$$\operatorname{mod} f(\omega) \leqq \varepsilon\sqrt{2}\, f_0'(h)$$
$$\operatorname{mod} f'(\omega) \leqq \varepsilon\sqrt{2}\, f_0''(h)$$

stattfinden muss.

Es lässt sich nun darthun, dass die erste Ungleichung statthat. Zu diesem Ende denke man sich unter ρ eine positive Zahl, welche alle den verschiedenen möglichen Werten von m entsprechenden Ungleichungen (10), (11), (12), (14) erfüllt und überdies noch $\leqq \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}$ und der reciproke Wert einer ganzen Zahl ist. Man denke sich wieder alle Werte $(p+iq)\,\rho^{n(n-1)}$, in welchen p, q ganze Zahlen sind und deren Norm die Zahl h^2 nicht übersteigt, in f eingesetzt und ein Résultat $f(\omega_1)$ von möglichst kleiner Norm herausgesucht. Man hat dann nach dem Vorhergehenden eine der Ungleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} f(\omega_1) &\leqq \rho^{n(n-1)} \sqrt{2}\, f_0'(h)\\ \operatorname{mod} f'(\omega_1) &\leqq \rho^{n(n-1)} \sqrt{2}\, f_0''(h).\end{aligned}$$

Fände nun die zweite statt, so könnte man nach Abschnitt 5 einen Wert ω_2 angeben, dessen Coordinaten ebenfalls Vielfache von $\rho^{n(n-1)}$ wären und für welchen $Nf(\omega_2) < Nf(\omega_1)$ wäre. Einen solchen Wert aber kann es nicht geben. Die Norm desselben müsste nämlich nach der über ω_1 gemachten Annahme über h^2 liegen und man hätte nach (4) $Nf(\omega_2) > (g+1)^2$, was mit den Ungleichungen

$$Nf(\omega_2) < Nf(\omega_1) \leqq Nf(0) < (g+1)^2$$

im Widerspruch steht.

Es kann also nur

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} f(\omega_1) &\leqq \rho^{n(n-1)} \sqrt{2}\, f_0'(h)\\ &\leqq \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} f_0'(h)\end{aligned}$$

sein.

Setzt man nun

$$\omega_1 = (p_0+iq_0)\,\varepsilon - \omega' \quad (p_0+iq_0)\,\varepsilon = \omega_0,$$

wo p_0, q_0 ganze Zahlen und die Coordinaten von ω' ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $\leqq \frac{1}{2}\varepsilon$ sind, so wird

$$\begin{aligned}f(\omega_0) &= f(\omega_1+\omega')\\ &= f(\omega_1) + \omega' f'(\omega_1) + \frac{1}{2}\omega'^2 f''(\omega_1) + \cdots\end{aligned}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} f(\omega_0) &\leqq \operatorname{mod} f(\omega_1) + \operatorname{mod}[\omega' f(\omega_1)] + \cdots\\ &\leqq \operatorname{mod} f(\omega_1) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} f_0'\left(h-\frac{2}{h}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{1}{2!}, f_0''\left(h-\frac{2}{h}\right) + \cdots\\ &\leqq \operatorname{mod} f(\omega_1) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} f_0'\left(h-\frac{2}{h}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)\\ &\leqq \operatorname{mod} f(\omega_1) + \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} f_0'(h).\end{aligned}$$

Da aber

$$\operatorname{mod} f(\omega) \leqq \operatorname{mod} f(\omega_0)$$

$$\operatorname{mod} f(\omega_1) \leqq \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{2} f_0'(h)$$

ist, weil ω_0 zu J gehört, so folgt

$$\operatorname{mod} f(\omega) < \varepsilon \sqrt{2} f_0'(h).$$

7.

Es werde nun angenommen, dass $f(z)$ für keinen rationalen complexen Wert von z verschwindet.

Kennt man einen rationalen complexen Wert ω, welcher den Bedingungen

(19) $$N f(\omega) \leqq (g+1)^2$$

(20) $$N \frac{f(\omega)}{f'(\omega)} \leqq \frac{4}{h^2}$$

(21) $$N \frac{f(\omega) f_0''(h)}{f'(\omega)^2} \leqq \frac{1}{(a+1)^2}$$

genügt, wo $a \geqq 2$, so liefert das Newton'sche Näherungsverfahren schrittweise rationale complexe Zahlen, welche der Norm von f rasch abnehmende Werte ertheilen. Dass man sich aber immer einen Wert ω mit den geforderten Eigenschaften verschaffen kann, folgt aus dem Vorhergehenden und der Identität (9). Man hat nämlich auf Grund letzterer

$$\varphi_0(h) \operatorname{mod} f(\omega) + \psi_0(h) \operatorname{mod} f'(\omega) \geqq 1$$

und demzufolge

$$\operatorname{mod} f'(\omega) \geqq \frac{1 - \varphi_0(h) \operatorname{mod} f(\omega)}{\psi_0(h)}$$

$$\operatorname{mod} \frac{f(\omega)}{f'(\omega)} \leqq \frac{\psi_0(h) \operatorname{mod} f(\omega)}{1 - \varphi_0(h) \operatorname{mod} f(\omega)}$$

$$\operatorname{mod} \frac{f(\omega) f_0''(h)}{f'(\omega)^2} \leqq \frac{\psi_0(h)^2 f_0''(h) \operatorname{mod} f(\omega)}{[1 - \varphi_0(h) \operatorname{mod} f(\omega)]^2}.$$

Wenn also $N f(\omega)$ entsprechend klein ist, so sind alle obigen Bedingungen erfüllt.

Es sei

$$-\frac{f(\omega)}{f'(\omega)} = \alpha + i\beta + \gamma + i\delta$$

$$\alpha + i\beta = \zeta \qquad \mathrm{mod}\,(\alpha + i\beta) = r \qquad \gamma + i\delta = -v$$

$$\omega + \zeta = \omega_1,$$

wo

$$(22) \qquad \alpha\gamma \geqq 0 \qquad \beta\delta \geqq 0$$

und α, β nur so viele Decimalstellen enthalten, dass

$$(23) \qquad \gamma^2 + \delta^2 \leqq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\,(a+1)^2}$$

wird. Dies ist immer erreichbar, da $f(\omega)$ nach der Annahme nicht $= 0$ sein kann. Nach dem Taylor'schen Satze ist dann

$$f(\omega_1) = f(\omega) + \zeta f'(\omega) + \frac{1}{2!}\zeta^2 f''(\omega) + \dots$$

$$= v f'(\omega) + \frac{1}{2!}\zeta^2 f''(\omega) + \dots$$

$$f'(\omega_1) = f'(\omega) + \zeta f''(\omega) + \frac{1}{2!}\zeta^2 f'''(\omega) + \dots$$

und es ergibt sich, wenn man beachtet, dass aus (19) $\mathrm{mod}\,\omega \leqq h - \frac{2}{h}$ folgt,

$$\mathrm{mod} f(\omega_1) \leqq \mathrm{mod}\,[v f'(\omega)] + \frac{1}{2!} r^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h}\right) + \frac{1}{3!} r^3 f_0'''\left(h - \frac{2}{h}\right) + \dots$$

$$\leqq \mathrm{mod}\,[v f'(\omega)] + \frac{1}{2} r^2 f_0''\left(h - \frac{2}{h} + r\right)$$

$$\mathrm{mod} f'(\omega) \leqq \mathrm{mod} f'(\omega_1) + r f_0''\left(h - \frac{2}{h}\right) + \dots$$

$$\leqq \mathrm{mod} f'(\omega_1) + r f_0''\left(h - \frac{2}{h} + r\right).$$

Es ist aber nach (22), (20), (23)

$$r \leqq \mathrm{mod}\,\frac{f(\omega)}{f'(\omega)}$$

$$h - \frac{2}{h} + r \leqq h$$

$$\mathrm{mod}\,v \leqq \frac{1}{2(a+1)}\,\mathrm{mod}\,\frac{f(\omega)}{f'(\omega)};$$

daher wird nach (21)

$$\begin{aligned}\operatorname{mod} f(\omega_1) &\leqq \frac{1}{2(a+1)} \operatorname{mod} f(\omega) + \frac{1}{2} f_0''(h) \operatorname{mod} \frac{f^2(\omega)}{f'(\omega)^2} \\ &\leqq \frac{1}{a+1} \operatorname{mod} f(\omega) \\ \operatorname{mod} f'(\omega_1) &\geqq \operatorname{mod} f'(\omega) - \operatorname{mod} \frac{f(\omega)}{f'(\omega)} f_0''(h) \\ &\geqq \frac{a}{a+1} \operatorname{mod} f'(\omega).\end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt:

$$N f(\omega_1) < (g+1)^2$$

$$N \frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)} < \frac{4}{h^2},$$

$$N \frac{f(\omega_1) f_0''(h)}{f'(\omega_1)^2} \leqq \frac{1}{a^4}.$$

Wird daher wieder

$$-\frac{f(\omega_1)}{f'(\omega_1)} = \alpha_1 + i\beta_1 + \gamma_1 + i\delta_1$$

$$\omega_1 + \alpha_1 + i\beta_1 = \omega_2$$

gesetzt, wo

$$\alpha_1 \gamma_1 \geqq 0 \qquad \beta_1 \delta_1 \geqq 0$$

$$\gamma_1^2 + \delta_1^2 \leqq \frac{1}{4a^4}\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right),$$

so findet man wie vorher:

$$\operatorname{mod} f(\omega_2) \leqq \frac{1}{a^2} \operatorname{mod} f(\omega_1)$$

$$\operatorname{mod} f'(\omega_2) \leqq \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \operatorname{mod} f'(\omega_1)$$

$$N f(\omega_2) < (g+1)^2$$

$$N \frac{f(\omega_2)}{f'(\omega_2)} < \frac{4}{h^2}$$

$$N \frac{f(\omega_2) f_0''(h)}{f'(\omega_2)^2} \leqq \frac{1}{(a^2-1)^4} \leqq \frac{1}{(a+1)^4}.$$

Rechnet man in derselben Weise weiter, indem man

$$-\frac{f(\omega_2)}{f'(\omega_2)} = \alpha_2 + i\beta_2 + \gamma_2 + i\delta_2$$

$$\omega_2 + \alpha_2 + i\beta_2 = \omega_3$$

$$\alpha_2\gamma_2 \geqq 0 \qquad \beta_2\delta_2 \geqq 0$$

$$\gamma_2^2 + \delta_2^2 \leqq \frac{1}{4(a+1)^4}(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

$$\cdots$$

setzt, so ergibt sich nach und nach

$$\operatorname{mod} f(\omega_3) \leqq \frac{1}{(a+1)^2} \operatorname{mod} f(\omega_2)$$

$$\operatorname{mod} f(\omega_4) < \frac{1}{a^2(a+1)^2} \operatorname{mod} f(\omega_3)$$

$$\operatorname{mod} f(\omega_5) < \frac{1}{a^6(a+1)^2} \operatorname{mod} f(\omega_4)$$

$$\cdots$$

und es wird

$$\operatorname{mod} f(\omega_\nu) < \frac{\operatorname{mod} f(\omega)}{(a+1)^{2\nu-3}\, a^{2^\nu - 2\nu + 4}}.$$