

23.

Über Interpolation.

(Von Herrn Th. Clausen zu München.)

1. Eine beliebige Function y einer veränderlichen GröÙe x sei für die Werthe von x : 0, $+1$, $+2$, etc., -1 , -2 , -3 , etc. gegeben, man soll daraus den Werth für jedes beliebige x finden.

Es seien die Werthe der Function nebst ihren Differenzen, wie aus dem folgenden Schema zu ersēhen ist, bezeichnet:

x	y	$\Delta.y$	$\Delta^2.y$	$\Delta^3.y$	$\Delta^4.y$	$\Delta^5.y$	$\Delta^6.y$	
.	
-2	y_{-2}	
-1	y_{-1}	$a_{-\frac{3}{2}}$	b_{-1}	
0	y_0	$a_{-\frac{1}{2}}$	b_0	$c_{-\frac{1}{2}}$	d_0	$e_{-\frac{1}{2}}$	e_0	etc.
$+1$	y_{+1}	$a_{+\frac{1}{2}}$	b_{+1}	$c_{+\frac{1}{2}}$.	$e_{+\frac{1}{2}}$.	
$+2$	y_{+2}	$a_{+\frac{3}{2}}$	
.	

und überdies:

$$\begin{aligned} a_{-\frac{1}{2}} + a_{+\frac{1}{2}} &= 2a_0, \\ c_{-\frac{1}{2}} + c_{+\frac{1}{2}} &= 2c_0, \\ e_{-\frac{1}{2}} + e_{+\frac{1}{2}} &= 2e_0, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Der Werth von y_x sei nun:

$$1. \quad y_x = y_0 + A_{x,1}a_0 + A_{x,2}b_0 + A_{x,3}c_0 + A_{x,4}d_0 + A_{x,5}e_0 + \dots$$

wo $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. bloÙs Functionen von x sind. Es läÙt sich zeigen, daÙ der Werth von y_x in Beziehung auf y_0 , a_0 , b_0 etc. bloÙs linearisch sein könne. Man nehme den allgemeinsten Ausdruck einer Function von y_0 , a_0 , b_0 etc. und $v_x = \Sigma M_{x,\mu,\nu,\dots} y_0^m. a_0^n. b_0^p. \dots$, wo m , n , p , alle Werthe von 0 bis ∞ haben können, und $M_{x,\mu,\nu,\dots}$ bloÙs von x und den Exponenten m , n , p , abhängt, Σ aber das Zeichen für die Summe aller möglichen Glieder von dieser Form andeutet. Es seien nun, wenn $y=v$ ist, die resp. Werthe von y_0 , a_0 , b_0 , c_0 ,: v_0 , α_0 , β_0 , γ_0 ,; wenn $y=v'$ ist: v'_0 , α'_0 , β'_0 ,; folglich, wenn $y=v+v'$ ist: $v_0+v'_0$, $\alpha_0+\alpha'_0$, $\beta_0+\beta'_0$, etc. Demnach wird

$$v_x = \Sigma . M_{x, \mu, \nu, \dots} v_o^m . \alpha_o^n . \beta_o^p \dots; \quad v'_x = \Sigma . M_{x, \mu, \nu, \dots} v_o'^m . \alpha_o'^n . \beta_o'^p \dots;$$

und

$$(v + v')_x = v_x + v'_x = \Sigma . M_{x, \mu, \nu, \dots} (v_o + v_o')^m . (\alpha_o + \alpha_o')^n . (\beta_o + \beta_o')^p \dots$$

Wäre nun in dem Ausdruck ein Glied, das aus zweien oder mehreren, gleichen oder ungleichen Factoren der Größen y_o , α_o , β_o etc. bestände, so gäbe die Entwicklung desselben in dem letzten Ausdrucke durch Multiplication ein oder mehrere einzelne Producte, deren Factoren aus beiden Reihen Größen v_o , α_o , β_o , und v_o' , α_o' , β_o' , zugleich genommen sind; da aber diese in der Summe der Ausdrücke für v_x und v'_x nicht vorkommen, die Factoren aber jeden beliebigen Werth haben können, so muß der Coëfficient aller dieser Glieder $= 0$ sein; wodurch also die Allgemeinheit der Gleichung (1.) erwiesen ist.

Überhaupt läßt sich jede Function von x durch ein Aggregat von Gliedern von der Form $A \sin(z + \alpha x)$ darstellen, wo A , z , und α von x unabhängig sind; die Differenzen der verschiedenen Ordnungen sind alsdann dem Aggregate der Differenzen der einzelnen Theile von derselben Ordnung gleich. Die Coëfficienten $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc. für den einzelnen Werth $y = A \sin(z + \alpha x)$ gelten also, wie leicht zu übersehen ist, allgemein für jede Function von x . Man kann noch von dem Factor A abstrahiren, indem derselbe bloß als Coëfficient in allen Gliedern der Gleichung (1.) vorkömmt.

Setzt man daher statt y_x , $\sin(z + \alpha x)$, so wird das obige Schema:

x	y	$\Delta . y$	$\Delta^2 . y$	$\Delta^3 . y$	$\Delta^4 . y$
-2	$\sin(z - 2\alpha)$				
-1	$\sin(z - \alpha)$	$+\cos(z - \frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$	$-\sin(z - \alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$	$-\cos(z - \frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3$	
0	$\sin z$	$+\cos(z - \frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$	$-\sin z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$	$-\cos(z + \frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^3$	$+\sin z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4$
+1	$\sin(z + \alpha)$	$+\cos(z + \frac{1}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$	$-\sin(z + \alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$		
+2	$\sin(z + 2\alpha)$	$+\cos(z + \frac{3}{2}\alpha)(2\sin\frac{1}{2}\alpha)$			

folglich wird:

$$\begin{aligned} y_o &= \sin z; & d_o &= \sin z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^4; \\ a_o &= \cos z (2\sin\frac{1}{2}\alpha) \cos\frac{1}{2}\alpha; & e_o &= \cos z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^5 \cos\frac{1}{2}\alpha; \\ b_o &= -\sin z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2; & f_o &= -\sin z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^6; \\ c_o &= -\cos z (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2 \cos\frac{1}{2}\alpha; & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel (1.), so findet man:

$$\begin{aligned}\sin(z + \alpha x) &= \sin z \cos \alpha x + \cos z \sin \alpha x \\ &= \sin z [1 - A_{x,2}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^2 + A_{x,4}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^4 - A_{x,6}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^6 + \dots] \\ &\quad + \cos z \cos \tfrac{1}{2} \alpha [A_{x,1}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha) - A_{x,3}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^3 + A_{x,5}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^5 - \dots],\end{aligned}$$

oder

$$2. \quad \cos \alpha x = 1 - A_{x,2}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^2 + A_{x,4}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^4 - A_{x,6}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^6 + \dots$$

$$3. \quad \sin \alpha x = \cos \tfrac{1}{2} \alpha [A_{x,1}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha) - A_{x,3}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^3 + A_{x,5}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^5 - \dots]$$

Die Differentiation der Gleichung (2.) giebt:

$$4. \quad -x \sin \alpha x$$

$$= \cos \tfrac{1}{2} \alpha [-2A_{x,2}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha) + 4A_{x,4}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^3 - 6A_{x,6}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^5 + \dots],$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (3.) man

$$5. \quad A_{x,1} = \frac{2}{x} \cdot A_{x,2}, \quad A_{x,3} = \frac{4}{x} \cdot A_{x,4}, \quad A_{x,5} = \frac{6}{x} \cdot A_{x,6}, \quad \text{etc.}$$

erhält. Eine nochmalige Differentiirung giebt nach Substitution von $\cos \tfrac{1}{2} \alpha^2 = 1 - \tfrac{1}{4}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^2$:

$$-x^2 \cos \alpha x = -1.2A_{x,2} + (3.4A_{x,4} + 1.A_{x,2})(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^2$$

$$- (5.6A_{x,6} + 2.2A_{x,4})(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^4 + (7.8A_{x,8} + 3^2A_{x,6})(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^6 - \dots$$

Wir haben aber auch durch die Gleichung (2.):

$$-x^2 \cos \alpha x = -x^2 + x^2 A_{x,2}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^2 - x^2 A_{x,4}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^4 + x^2 A_{x,6}(2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha)^6 - \dots,$$

mithin durch Vergleichung dieser beiden Reihen:

$$1.2A_{x,2} = x^2,$$

$$3.4A_{x,4} = (x^2 - 1)A_{x,2},$$

$$5.6A_{x,6} = (x^2 - 2^2)A_{x,4},$$

$$7.8A_{x,8} = (x^2 - 3^2)A_{x,6},$$

etc.

oder:

$$6. \quad \begin{cases} A_{x,2} = \frac{x^2}{1.2}, \\ A_{x,4} = \frac{x^2 \cdot x^2 - 1}{1.2.3.4}, \\ A_{x,6} = \frac{x^2 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2}{1.2.3.4.5.6}, \\ A_{x,8} = \frac{x^2 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2 \cdot x^2 - 3^2}{1.2.3.4.5.6.7.8}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und durch Hülfe der Gleichungen (5.):

$$7. \quad A_{x,1} = \frac{x}{1}, \quad A_{x,3} = \frac{x \cdot x^2 - 1}{1.2.3}, \quad A_{x,5} = \frac{x \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 4}{1.2.3.4.5}.$$

Nach Substitution dieser Werthe der Coëfficienten wird die Formel (1.):

$$9. \cos \alpha x = \cos \frac{1}{2} \alpha (1 - B_{x,2} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^2 + B_{x,4} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^4 - B_{x,6} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^6 + \dots),$$

$$10. \sin \alpha x = B_{x,1} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha) - B_{x,3} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^3 + B_{x,5} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^5 - \dots$$

Diese Gleichung differentiirt giebt:

$$x \cos \alpha x = \cos \frac{1}{2} \alpha (B_{x,1} - 3 B_{x,3} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^2 + 5 B_{x,5} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^4 - \dots),$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (9.) sich ergibt:

$$11. 1 = \frac{1}{x} \cdot B_{x,1}, \quad B_{x,2} = \frac{3}{x} \cdot B_{x,3}, \quad B_{x,4} = \frac{5}{x} \cdot B_{x,5}, \quad B_{x,6} = \frac{7}{x} \cdot B_{x,7} \text{ etc.}$$

$$\text{Differentiirt man nochmals, so erhält man, nach Substitution, } \cos \frac{1}{2} \alpha^2 = 1 - \frac{1}{4} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^2:$$

$$-x^2 \sin \alpha x = -(2.3 B_{x,3} + (\frac{1}{2})^2 B_{x,1}) (2 \sin \frac{1}{2} \alpha) + (4.5 B_{x,5} + (\frac{3}{2})^2 B_{x,3}) (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^3 - (6.7 B_{x,7} + (\frac{5}{2})^2 B_{x,5}) (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^5 + \dots$$

Nach der Gleichung (10.) ist aber:

$$-x^2 \sin \alpha x = -x^2 B_{x,1} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha) + x^2 B_{x,3} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^3 - x^2 B_{x,5} (2 \sin \frac{1}{2} \alpha)^5 + \dots$$

folglich:

$$\begin{aligned} 2.3 B_{x,3} &= (x^2 - (\frac{1}{2})^2) \cdot B_{x,1}, \\ 4.5 B_{x,5} &= (x^2 - (\frac{3}{2})^2) \cdot B_{x,3}, \\ 6.7 B_{x,7} &= (x^2 - (\frac{5}{2})^2) \cdot B_{x,5}, \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

oder, da $B_{x,1} = x$:

$$12. \begin{cases} B_{x,3} = \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3}, \\ B_{x,5} = \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5}, \\ B_{x,7} = \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2} \cdot x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6.7}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

und durch die Gleichungen (11.):

$$13. \begin{cases} B_{x,2} = \frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2}, \\ B_{x,4} = \frac{x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4}, \\ B_{x,6} = \frac{x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2} \cdot x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1.2.3.4.5.6}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

folglich wird die Formel (8.):

$$\text{II. } y_x = y'_0 + x \cdot a'_0 + \frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2} b'_0 + \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} c'_0 + \frac{x^3 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d'_0 \\ + \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2} \cdot x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} e'_0 + \frac{x^2 \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2} \cdot x^2 - \frac{5^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} f'_0 + \dots$$

3. Aus den Ausdrücken I. und II. folgt zwar unmittelbar durch Differentiirung der Ausdruck für $\frac{\partial y_x}{\partial x}$ in beiden Fällen; er läßt sich aber auch auf eine andere Art darstellen, die nicht uninteressant sein dürfte. Es sei nemlich nach der Bezeichnung in 1.:

$$14. \frac{\partial y_x}{\partial x} = C_{x,0} a_0 + C_{x,1} b_0 + C_{x,2} c_0 + C_{x,3} d_0 + C_{x,4} e_0 + \dots$$

und setzt man, wie vorher, statt y_x , $\sin(z + \alpha x)$; statt a_0 , b_0 u. s. w. die entsprechenden Werthe; und zur Abkürzung $2 \sin \frac{1}{2} \alpha = t$; so findet man:

$$\alpha \cos(z + \alpha x) = \alpha \cos z \cos \alpha x - \alpha \sin z \sin \alpha x \\ = \cos z \cos \frac{1}{2} \alpha [C_{x,0} t - C_{x,2} t^3 + C_{x,4} t^5 - C_{x,6} t^7 + \dots] \\ - \sin z [C_{x,1} t^2 - C_{x,3} t^4 + C_{x,5} t^6 - C_{x,7} t^8 + \dots].$$

Es ist aber $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{2} t$, und mittelst der Gleichungen (9.) und (10.)

$$\alpha \cos z \cos \alpha x - \alpha \sin z \sin \alpha x \\ = \cos z \cos \frac{1}{2} \alpha (2 \arcsin \frac{1}{2} t) [1 - B_{x,2} t^2 + B_{x,4} t^4 - B_{x,6} t^6 + \dots] \\ - \sin z (2 \arcsin \frac{1}{2} t) [B_{x,1} t - B_{x,3} t^3 + B_{x,5} t^5 - \dots].$$

Man hat also, wenn man die Ausdrücke für $B_{x,1}$, $B_{x,2}$ u. s. w. aus (12. und 13.) substituirt, und $2 \arcsin \frac{1}{2} t$ in eine Reihe entwickelt:

$$15. C_{x,0} t - C_{x,2} t^3 + C_{x,4} t^5 - C_{x,6} t^7 + \dots \\ = \left[t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 16 \cdot 24} \cdot \frac{1}{7} t^7 + \dots \right] \\ \times \left(1 - \frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 + \dots \right),$$

$$16. C_{x,1} t^2 - C_{x,3} t^4 + C_{x,5} t^6 - \dots \\ = \left[t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \dots \right] \left(x t - \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} t^5 - \dots \right).$$

4. Sei nach der Bezeichnung von 2.

$$17. \frac{\partial y_x}{\partial x} = D_{x,0} a'_0 + D_{x,1} b'_0 + D_{x,2} c'_0 + D_{x,3} d'_0 + D_{x,4} e'_0 + \dots$$

und setzt man hinwiederum statt y_x , $\sin(z + \alpha x)$, und statt a'_0 , b'_0 die entsprechenden Werthe, so hat man:

$$\begin{aligned} \alpha \cos z \cos \alpha x - \alpha \sin z \sin \alpha x \\ = \cos z [D_{x,0} t - D_{x,2} t^3 + D_{x,4} t^5 - D_{x,6} t^7 + \dots] \\ - \sin z \cos \frac{1}{2} \alpha [D_{x,1} t^2 - D_{x,3} t^4 + D_{x,5} t^6 - \dots]. \end{aligned}$$

Durch Hülfe der Gleichungen (2. und 3.) haben wir aber auch:

$$\begin{aligned} \alpha \cos z \cos \alpha x - \alpha \sin z \sin \alpha x \\ = \cos z (2 \arcsin \frac{1}{2} t) [1 - A_{x,2} t^2 + A_{x,4} t^4 - A_{x,6} t^6 + \dots] \\ - \sin z \cos \frac{1}{2} \alpha (2 \arcsin \frac{1}{2} t) [A_{x,1} t - A_{x,3} t^3 + A_{x,5} t^5 - \dots], \end{aligned}$$

folglich, wenn man statt $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ etc., deren Werthe aus (6. und 7.) substituirt:

$$\begin{aligned} 18. \quad D_{x,0} t - D_{x,2} t^3 + D_{x,4} t^5 - D_{x,6} t^7 + \dots \\ = \left(t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1.3}{8.16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24} \cdot \frac{1}{7} t^7 + \dots \right) \left[1 - \frac{x^2}{1.2} t^2 + \frac{x^2 \cdot x^2 - 1}{1.2.3.4} t^4 - \dots \right], \\ 19. \quad D_{x,1} t^2 - D_{x,3} t^4 + D_{x,5} t^6 - \dots \\ = \left(t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1.3}{8.16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \frac{1.3.5}{8.16.24} \cdot \frac{1}{7} t^7 + \dots \right) \\ \times \left[x \cdot t - \frac{x \cdot x^2 - 1}{1.2.3} t^3 + \frac{x \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2}{1.2.3.4.5} t^5 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Auf gleiche Art findet man für den zweiten und höhern Differentialquotienten ähnliche Ausdrücke, deren Entwicklung ich der Kürze wegen übergehe. Ich bemerke nur, daß die Coëfficienten des ersten Factors in dem Ausdruck für den zweiten Differentialquotienten $(2 \arcsin \frac{1}{2} t)^2$ einem sehr einfachen Gesetze folgen, welches aber bei dem dritten und den höhern nicht Statt findet.

5. Eine vielfache Anwendung findet der Ausdruck des Integrals $\int y_x \partial x$. Man sieht leicht, daß es in der Bezeichnung von (1.), wenn es von $x=0$ bis $x=x$ genommen wird, die Form haben muß:

$$\begin{aligned} 20. \quad \int y_x \partial x = x \cdot y_0 + E_{x,1} a_0 + E_{x,2} b_0 + E_{x,3} c_0 + E_{x,4} d_0 + E_{x,5} e_0 + \dots, \\ \text{und nach der Substitution des Werthes } \sin(z + \alpha x) \text{ statt } y_x: \\ - \frac{1}{\alpha} \cos(z + \alpha x) + \frac{1}{\alpha} \cos z = - \frac{1}{\alpha} \cos z (\cos \alpha x - 1) + \frac{1}{\alpha} \sin z \sin \alpha x \\ = \sin z (x - E_{x,2} t^2 + E_{x,4} t^4 - E_{x,6} t^6 + \dots \\ + \cos z \cos \frac{1}{2} \alpha (E_{x,1} t - E_{x,3} t^3 + E_{x,5} t^5 - \dots)) \end{aligned}$$

und mittelst (9., 10., 12. und 13.):

$$\begin{aligned} = \frac{\sin z}{2 \arcsin \frac{1}{2} t} \left(x \cdot t - \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2.3} t^3 + \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4.5} t^5 - \dots \right) \\ + \frac{\cos z \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \arcsin \frac{1}{2} t} \left(\frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1.2} t^2 - \frac{x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1.2.3.4} t^4 + \dots \right), \end{aligned}$$

mithin:

$$21. \quad x - E_{x,2} t^2 + E_{x,4} t^4 - E_{x,6} t^6 + \dots \\ = \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{x \cdot x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} t^5 - \dots \\ = \frac{t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \dots}{t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \dots},$$

$$22. \quad E_{x,1} t - E_{x,3} t^3 + E_{x,5} t^5 - \dots \\ = \frac{x^2 - \frac{1}{2^2}}{1 \cdot 2} t^2 - \frac{x^2 - \frac{1}{2^2} \cdot x^2 - \frac{3^2}{2^2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 + \dots \\ = \frac{t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \dots}{t + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^3 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^5 + \dots}.$$

Sucht man das Integral von $x = -\frac{1}{2}$ bis $x = +\frac{1}{2}$, so verschwinden die mit $E_{x,1}$, $E_{x,3}$ etc. multiplicirten Glieder, da sie bloß gerade Potenzen enthalten. Nennt man in diesem einzelnen Falle die Coëfficienten der übrigen 1 , E_2 , E_4 , so ist:

$$23. \quad 1 - E_2 t^2 + E_4 t^4 - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^4 + \dots}.$$

Eben so wenn die Coëfficienten des Integrals, von $x = -\frac{3}{2}$ bis $x = +\frac{3}{2}$ genommen, 3 , E'_2 , E'_4 etc. sind:

$$24. \quad 3 - E_2 t^2 + E_4 t^4 - \dots = \frac{3 - t^2}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} t^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5} t^4 + \dots}.$$

u. s. f.

6. Nach der Bezeichnung von (2.) sei

$$25. \quad f_{y_x} \partial x = x y'_0 + F_{x,1} a'_0 + F_{x,2} b'_0 + F_{x,3} c'_0 + \dots,$$

so ist nach Substitution von $y_x = \sin(z + \alpha x)$:

$$- \frac{1}{\alpha} \cos(z + \alpha x) = - \frac{1}{\alpha} \cos z (\cos \alpha x - 1) + \frac{1}{\alpha} \sin z \sin \alpha x \\ = \sin z \cos \frac{1}{2} \alpha (x - F_{x,2} t^2 + F_{x,4} t^4 - F_{x,6} t^6 + \dots) \\ + \cos z (F_{x,1} t - F_{x,3} t^3 + F_{x,5} t^5 - F_{x,7} t^7 + \dots),$$

oder mittelst (2., 3., 6. und 7.):

$$= \frac{\sin z \cos \frac{1}{2} \alpha}{2 \arcsin \frac{1}{2} t} \left(x t - \frac{x \cdot x^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{x \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} t^5 - \dots \right) \\ + \frac{\cos z}{2 \arcsin \frac{1}{2} t} \left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} t^2 - \frac{x^2 \cdot x^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 + \frac{x^2 \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} t^6 - \dots \right),$$

folglich:

$$\begin{aligned}
 26. \quad & x - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \dots \\
 &= \frac{x - \frac{x \cdot x^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^2 + \frac{x \cdot x^2 - 1 \cdot x^2 - 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^4 - \dots}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5}t^4 + \dots},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27. \quad & F_{x,1}t - F_{x,3}t^3 + F_{x,5}t^5 - \dots \\
 &= \frac{\frac{x^2}{1 \cdot 2}t - \frac{x^2 \cdot x^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}t^3 + \dots}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5}t^4 + \dots},
 \end{aligned}$$

Nimmt man das Integral von $x = -1$ bis $x = +1$, so wird $F_{x,1} = F_{x,3} = \text{etc.} = 0$, und wenn man die übrigen Coëfficienten F_2, F_4 , etc. setzt:

$$28. \quad 2 - F_{x,2}t^2 + F_{x,4}t^4 - F_{x,6}t^6 + \dots = \frac{2}{1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 16} \cdot \frac{1}{5}t^4 + \dots}.$$

In Beziehung auf eine zweite oder höhere Integration gilt auch die in (4.) in Bezug auf die Ausdrücke für die Differentiale von y_x gemachte Bemerkung.

München, den 22. Juli 1829.