

Theorie der reellen Funktionen. Von HANS HAHN. Erster Band. Berlin (Julius Springer) 1921. VII u. 600 S. Preis 136 M.

Von diesem auf zwei Bände berechneten Werk, das in der zusammenfassenden Darstellung eines Lehrbuches die gesamte Theorie der reellen Funktionen behandeln will, liegt nunmehr der erste Band vor; um es gleich zu sagen: ein nach Inhalt und Form ganz hervorragendes und überaus wertvolles Buch. Wir besitzen damit jetzt zwei große, moderne Lehrbücher über die Theorie der reellen Funktionen; beide aber sind weitgehend voneinander verschieden: Die vorzüglichen und originellen Vorlesungen von Carathéodory beschränken sich absichtlich auf eine Reihe von allerdings besonders wichtigen Teilen der Theorie, die natürlich zu einer einheitlichen Komposition verarbeitet sind. Dagegen ist es die Absicht Hahns, sämtliche Teile der Theorie der reellen Funktionen, alle ihre wesentlichen Ergebnisse zur Darstellung zu bringen. In dieser Tendenz trifft also Hahn mit dem wesentlich älteren (jetzt vielfach überholten) Buch von Hobson zusammen; aber in viel höherem Maße als damals Hobson gelingt es jetzt Hahn, den ganzen Stoff zu einer in sich geschlossenen, abgerundeten Einheit zu gestalten und ihn in eine Form zu gießen, die in jedem Stück den persönlichen Stempel des Verfassers trägt. Dazu kommt noch ein zweites: Die Vorlesungen von Carathéodory bringen die Theorie der reellen Funktionen im n -dimensionalen Raum; Hahn dagegen geht von vornherein wesentlich darüber hinaus und führt die Untersuchungen in einem beliebigen „metrischen Raum“ (gemäß der Bezeichnung von Hausdorff ein Raum, in dem irgendwie eine Entfernung definiert ist; also dasselbe wie Fréchet's „classe E “) und zum Teil in noch allgemeineren Räumen; auch sonst ist es das Bestreben des Verfassers, stets zu möglichst umfassender Allgemeinheit vorzudringen. Hahn ist überhaupt der erste, der es unternommen hat, die Theorie der reellen Funktionen im metrischen Raum konsequent aufzubauen (nachdem dies vorher außer für die Punktmengenlehre nur für einige Einzelheiten der Theorie geschehen war), und er hat dies mit außerordentlicher Sorgfalt und Exaktheit ausgeführt; natürlich mußte er zu diesem Zweck vieles neu schaffen, vieles weitgehend umgestalten. Man lasse sich übrigens durch diese sehr allgemeine Fassung der Theorie ja nicht abschrecken und nicht etwa zu der Vermutung verleiten, daß dadurch die Lektüre erschwert werde. Gerade das Gegenteil ist der Fall. Um die allgemeinste Formulierung der Sätze zu ermöglichen, mußte notwendigerweise aus den Gedankengängen der wesentliche Kern herauspräpariert und alles sonst vorhandene Beiwerk beseitigt werden, so daß also die Beweise gerade eine möglichst einfache und möglichst durchsichtige Gestalt erhalten. Außerdem wird von jenem allgemeinen Standpunkt aus eine deutliche Einsicht in die Tragweite der einzelnen Sätze gewonnen.

Wir wollen nun noch einen ganz kurzen Überblick über die im vorliegenden ersten Band behandelten Teile der Theorie geben. Leider ist es im Rahmen dieser kurzen Besprechung nicht möglich, ausführlich darauf einzugehen und im einzelnen genauer aufzuweisen, wie viel Neues an Resultaten und Begriffsbildungen der Verfasser in seine ausgezeichnete Darstellung hineingearbeitet, welche Fortschritte er an so vielen Punkten zu erzielen gewußt hat. Erst durch ein ausführliches Eingehen auf Einzelheiten könnte man der Bedeutung dieses Werkes gerecht werden. So aber müssen wir uns hier mit einer

Andeutung begnügen, um nur überhaupt eine wenn auch noch so schwache Vorstellung von dem überaus reichen Inhalt dieses ersten Bandes und von der sehr naturgemäßen Anordnung des Stoffes zu geben. In einer Einleitung wird eine kurze Übersicht über die später benötigten Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre und der Theorie der reellen Zahlen gebracht. Sodann beginnt der systematische Aufbau im metrischen Raum mit der Punktmengenlehre (in dem hier nötigen Umfang). Es folgt nun eine eingehende Untersuchung zunächst der stetigen und halbstetigen, hierauf der unstetigen Funktionen. Ein inhaltsreiches Kapitel ist dann den Funktionenfolgen (und -mengen) und den verschiedenen Arten von Konvergenz und Oszillation gewidmet. Hieran schließt sich naturgemäß eine ausführliche Theorie der Baireschen Funktionen und Klassen an, im Zusammenhang mit den Borelschen Mengen. Von den im bisherigen behandelten Punktfunktionen wird nun zu den Mengenfunktionen übergegangen. Die absolut-additiven Mengenfunktionen und spezieller solche Mengenfunktionen, die außerdem stetig oder totalstetig sind, werden eindringend untersucht; und es erweist sich als sehr sachgemäß, hieran die Theorie der Carathéodoryschen Maßfunktionen anzureihen. An letztere wird dann (zum Teil sich ihr unterordnend) die weit ausgeführte Theorie der Funktionen „endlicher Variation“ (sonst „beschränkter Schwankung“ genannt) angeknüpft, einschließlich der spezielleren totalstetigen Funktionen. Den Schluß des ersten Bandes macht eine [statt auf die Maßfunktionen mit Radon, allgemeiner auf beliebige absolut-additive Mengenfunktionen aufgebaute] Theorie der meßbaren (und nicht-meßbaren) Funktionen und der aus ersteren gebildeten Folgen.

Mit großer Spannung wird man den zweiten Band erwarten, der das Werk zum Abschluß bringen wird und Integration und Differentiation, analytische Darstellung willkürlicher Funktionen sowie die Fourierschen Reihen behandeln soll. Auszusetzen oder sagen wir lieber bedauerlich bleibt an dem ersten Band nur eines, der hohe (wenn auch bei den heutigen Herstellungskosten vielleicht nicht einmal unverhältnismäßig hohe) Preis von 136 M., der in valutaschwachen Ländern, speziell in Deutsch-Österreich, leider ein Hindernis für die weite Verbreitung darbieten wird, die man diesem vorzüglichen Werk in den Kreisen der Mathematiker wünschen möchte. *A. Rosenthal.*

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von H. Burkhardt, neu herausgegeben von G. Faber. W. de Gruyter, Berlin und Leipzig. I. Bd. Algebraische Analysis, 3. Aufl. 1920. X u. 182 S. 22 M. — II. Bd. Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 5. Aufl. 1921. X u. 286 S. 50 M. — III. Bd. Elliptische Funktionen. 3. Aufl. 1920. XVI u. 444 S. 52 M.

Das bekannte Lehrbuch Burkhardts erscheint hiemit neu aufgelegt, herausgegeben von G. Faber, dem Nachfolger Burkhardts auf seinem Lehrstuhl in München. Sämtliche Bände wurden umgearbeitet, besonders stark der dritte, so daß hier fast ein neues Buch entstand. Im folgenden seien die Unterschiede gegenüber den früheren Auflagen kurz angegeben. Im ersten Bande wurden die beiden Kapitel über ganze rationale Funktionen und Auflösung linearer Gleichungen, die mehr ins Gebiet der Algebra gehören, vollständig weggelassen, in den anderen Kapiteln gewisse Umstellungen vorgenommen. Im zweiten Bande wurde die Burkhardtsche Anordnung im großen und ganzen beibehalten.