Über die Singularitäten analytischer Funktionen.

Von **Wilhelm Groß** in Wien.

Die Singularitäten analytischer Funktionen bilden den Gegenstand zahlreicher Arbeiten und ihr Studium ist in gewissen Richtungen bereits weit gediehen. So ist die Theorie der ganzen Funktionen im Grunde die Theorie des isolierten wesentlich singulären Punktes und so stehen viele der Arbeiten über das Verhalten einer Potenzreihe am Konvergenzkreise in mehr oder minder nahem Zusammenhang mit dem Studium der dortselbst befindlichen singulären Punkte.

Durch die Arbeiten zur Uniformisierung bezw. zur konformen Abbildung der allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereiche wurden neue Möglichkeiten erschlossen, in gewissen Fällen die Natur der auftretenden Singularitäten näher zu untersuchen und der Weg hiezu wurde bereits von Study,[1]) vor allem aber von Carathéodory[2]) und von Koebe[3]) selbst angebahnt in ihren Arbeiten über die Randzuordnung bei der unverzweigten Fundamentalabbildung schlichter Bereiche. Natürlich ist dies erst ein Anfang und eine ganze Reihe wichtiger Fragen harren noch ihrer Erledigung.

Auch vorliegende Arbeit sucht einiges zur Untersuchung der Singularitäten analytischer Funktionen beizutragen durch das Studium der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen über der z-Ebene und der ihnen zugehörigen Fundamentaluniformisierenden, so daß diese Arbeit in gewisser Hinsicht auch als „Beiträge zur Topologie der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen" betitelt werden könnte. Die Verwertbarkeit dieser Untersuchungen für den allgemeinen Fall liegt darin, daß falls ein an einen Punkt P heranreichendes, einfach zusammenhängendes Gebiet G angegeben werden kann, innerhalb der $f(w)$ meromorph ist, das Verhalten von $f(w)$ in der Umgebung von P innerhalb von G in gewisser Beziehung analog ist dem Verhalten einer innerhalb des Einheitskreises meromorphen Funktion in der Nähe eines Punktes des Randes und

[1]) Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweites Heft. B. G. Teubner, 1913.

[2]) Carathéodory, „Über die gegenseitige Beziehung der Ränder" usw., „Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete". Math. Ann. LXXIII, S. 305 bezw. 323. 1913.

[3]) Koebe, „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung". I. Journal f. Math. 145. S. 177. 1914. II. Acta math. 40. S. 251. 1916.

daß sich Häufungsbereich, Wertbereich und Konvergenzbereich entsprechend definieren läßt. Ferner kann man bei manchen Fragen eine Funktion, deren Riemannsche Fläche R mehrfach zusammenhängend ist, als Funktion auf einer unverzweigten einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche betrachten.

Von den angewandten Methoden sei die Konstruktion der Funktionen mit Hilfe der Riemannschen Fläche sowie die Verwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\iint |f'(w)|\, du\, dv\right)^2 \leq \iint |f'(w)|^2\, du\, dv \iint du\, dv$$

hervorgehoben.

Von Resultaten erwähne ich den Satz, daß jeder Stern der Umkehrungsfunktion einer eindeutigen Funktion mit einer einzigen singulären Stelle die Ebene „fast" ganz bedeckt, den Nachweis der Existenz einer im endlichen meromorphen Funktion, die auf jedem ins Unendliche gehenden Weg die ganze Ebene approximiert, sodann die Sätze über Wertebereich, Häufungsbereich einer Funktion bezüglich eines Punktes. Besonderes Interesse beanspruchen die Verallgemeinerungen des Picardschen Theorems. Es sei noch hingewiesen auf die beiden Verallgemeinerungen eines Schwarzschen Satzes, deren erste die Frage nach der Randzuordnung bei der Fundamentalabbildung „ausnahmsverzweigter" Riemannscher Flächen einigermaßen beantworten läßt, während die zweite mit einem weiteren Satze einen Beitrag zur Frage nach der Punktmenge liefert, zu deren Konvergenzbereich ein bestimmter Wert gehört. Die hier erhaltenen Teilresultate lassen allerdings den Wunsch nach einer allgemeinen Beantwortung dieser Frage desto dringender erscheinen.

I. Der Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit.

1. Eine zweidimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeit[1]) bezeichnen wir als Riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn in ihr überall ein Winkelmaß derart festgelegt ist, daß es möglich ist, eine Umgebung jeder Stelle[2]) der Fläche konform auf das Innere eines Kreises der z-Ebene abzubilden.[3]) Damit ist es möglich, den Begriff der analytischen Funktion auf der Fläche aufzustellen, indem wir das Verhalten einer Funktion auf der Fläche nach dem Verhalten der übertragenen Funktion im Bildkreise der z-Ebene beurteilen.

2. Eine Riemannsche Fläche sei nun so beschaffen, daß die Umgebung jedes ihrer Punkte in einer mit der z-Ebene gleichliegenden Ebene liegt, bezw. die Umgebung des Verzweigungspunktes

---

[1]) Für die hier auftretenden Begriffe vergleiche das ausgezeichnete Buch von Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche. B. G. Teubner, Leipzig 1913.

[2]) Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit ist ja innerer Punkt.

[3]) Vgl. hiezu Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. III. Journ. f. reine u. angew. Math. 147. S. 67 ff. 1917.

einer n-blättrigen Windungsfläche über der z-Ebene bildet, so daß sich die an einer Stelle der Fläche regulären Funktionen als ganze Potenzreihen nach den ortsuniformisierenden Variabeln $z - z_0$, $\frac{1}{z}$ bezw. $(z - z_0)^{\frac{1}{n}}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ darstellen. Die Bedeutung dieser Riemannschen Flächen über der z-Ebene liegt darin, daß wir unmittelbar zu ihnen kommen, wenn wir aus einem Funktionselement der z-Ebene durch analytische Fortsetzung das zugehörige analytische Gebilde herstellen. Die Funktion ist auf der zugehörigen Riemannschen Fläche eindeutig. Bezeichnen wir den Punkt der z-Ebene, über dem der Punkt P der Riemannschen Fläche liegt, als Projektion des Punktes P, so gibt uns die Projektion der Riemannschen Fläche den Existenzbereich der Funktion in der z-Ebene,[1] während die Projektion der Riemannschen Fläche, die zur Umkehrungsfunktion gehört, den Wertebereich der Funktion liefert, d. h. die Gesamtheit jener Werte, die die Funktion annimmt.

3. Jede Riemannsche Fläche ist zusammenhängend, d. h. zwischen je zwei ihrer Punkte läßt sich eine endliche Anzahl von Punkten der Fläche derart einschalten, daß die passend gewählten Umgebungen zweier aufeinander folgender Punkte einen Teil gemein haben. Nach der beim analytischen Gebilde gebräuchlichen Schlußweise[2] schließen wir daraus einmal, da man als Zwischenschaltpunkte stets neue Punkte mit rationalem z verwenden kann, daß über einem Punkte der z-Ebene nur abzählbar viel Punkte der Riemannschen Fläche liegen, ferner, daß jeder Punkt der Fläche in den passend bestimmten Umgebungen von abzählbar vielen geeignet gewählten Flächenpunkten liegt. Die Riemannsche Fläche ist daher eine $\mathfrak{a}$-kompakte Menge.[3]

4. Als Häufungspunkt einer Punktmenge der Fläche bezeichnen wir einen Punkt, der in jeder Umgebung unendlich viel Punkte der Menge liegen hat. Da jede abgeschlossene kompakte[4] Menge auf der Fläche in den Umgebungen von endlich viel Punkten enthalten ist, so können wir nach dem Verhalten der übertragenen Mengen in den Bildkreisen Jordankurven und analytische Linien auf der Fläche definieren. Als Querschnitt der Fläche wollen wir jede Punktmenge der Fläche bezeichnen, die sich als eineindeutiges stetiges Bild der Strecke $0 < t < 1$ auffassen läßt, wenn die den Teilen $0 < t \leq t_1$ bezw. $t_2 < t < 1$ entsprechenden Mengen für $t_1 \to 0$ bezw. $t_2 \to 1$ keinen Häufungspunkt auf der

---

[1]) Als „natürlichen" Existenzbereich der Funktion können wir hingegen die zugehörige Riemannsche Fläche selbst ansehen.

[2]) Poincaré, Rend. di Palermo. II. S. 197. 1888. S. auch Vivanti, ebenda, S. 135, 150 und Volterra, Atti d. r. a. dei Lincei, ser. 4. IV_2. S. 355. 1888.

[3]) Wilh. Groß, Zur Theorie der Mengen, in denen ein Distanzbegriff definiert ist. Wien. Sitzber. CXXIII. S. 801. 1914.

[4]) Kompakt heißt eine Menge, wenn jede unendliche Teilmenge mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

Fläche besitzen, als Einschnitt der Fläche hingegen jedes eineindeutige Bild der Strecke $0 \leq t < 1$, wenn die den Teilen $t_0 \leq t < 1$ entsprechenden Mengen für $t_0 \rightarrow 1$ keinen Häufungspunkt auf der Fläche besitzen.

Zerfällt eine Fläche durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Teile, so bezeichnen wir sie als einfach zusammenhängend. Mit diesen Flächen wollen wir uns jetzt näher beschäftigen.

II. Die einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Die Umkehrungsfunktionen der im Endlichen meromorphen Funktionen.

1. Durch die Arbeiten von Poincaré[1]) und Koebe[2]) wissen wir, daß jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche konform abgebildet werden kann entweder auf die volle Ebene — in diesem Falle ist die Riemannsche Fläche geschlossen, d. h. eine abgeschlossene, kompakte Menge. Jede unendliche Menge hat auf der Fläche mindestens einen Häufungspunkt. — oder auf die punktierte Ebene oder auf den Einheitskreis.

Im ersten der beiden letztgenannten Fälle ist die Abbildungsfunktion der Riemannschen Fläche über der z-Ebene $z = f(w)$ eine eindeutige analytische Funktion, die in der w-Ebene einen einzigen wesentlich singulären Punkt besitzt, und wir können daher unsere Riemannsche Fäche der Umkehrungsfunktion einer im Endlichen überall meromorphen Funktion zugehörig betrachten. Das Picardsche Theorem[3]) bezw. seine Verallgemeinerung durch Caratheodory[4]) zeigt uns folgendes Verhalten der Fläche: Über jeder Stelle der z-Ebene, zwei Stellen höchstens ausgenommen, liegen unendlich viel Stellen der Riemannschen Fläche. Es kann nicht drei Stellen a_1, a_2 und a_3 geben derart, daß die über ihnen liegenden Stellen — von endlich vielen abgesehen — Windungsstellen von einer Ordnung sind, die, wenn die Stelle über a_i liegt, durch $m_i - 1$ teilbar ist, wobei $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < 1$. Hiebei rechnen wir eine Stelle, über der nur endlich viel Stellen der Fläche liegen, gleich einer Windungsstelle von der Ordnung $m = \infty$. Natürlich stecken hinter diesem Verhalten viel tiefer liegende topologische Tatsachen.

---

[1]) Poincaré, Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Act. math. Bd. 31. S. 1. 1907.

[2]) Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Erste und zweite Mitteilung. Gött. Nachr. S. 191 u. 633. 1907.

[3]) Picard, Memoire s. l. fonctions entiéres. Ann. de l'ec. norm. sup. 1880. S. 145.

[4]) Caratheodory, Sur quelques generalisations du theoreme de M. Picard. C. R. CXLI. S. 1213. 1905.

2. Normieren wir nun die Abbildung so, daß wir den Ausnahmspunkt der w-Ebene ins Unendliche werfen. Jedem Einschnitt der Fläche entspricht ein Einschnitt der punktierten Bildebene und umgekehrt. E sei ein Einschnitt der w-Ebene. Ich betrachte jetzt die Projektion des entsprechenden Einschnittes der Riemannschen Fläche auf die z-Ebene. Die den Teilen $t_0 \leq t < 1$ entsprechende Menge machen wir abgeschlossen[1]) und bilden den Durchschnitt dieser Mengen für $t_0 \rightarrow 1$. Diese Menge bezeichnen wir als Häufungsbereich des Einschnittes E bezüglich $f(w)$. Jeder Häufungsbereich eines Einschnittes ist eine zusammenhängende abgeschlossene Menge. Im allgemeinen sind bei einer gegebenen Funktion $f(w)$ diese Mengen gewissen Einschränkungen unterworfen. Jedenfalls tritt aber unter ihnen stets die ganze Ebene auf.[2]) Es sei $p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$ eine abzählbare Menge von Werten, so daß jede komplexe Zahl als Grenzwert einer Teilmenge erhalten werden kann. Sie soll obendrein die etwaigen zwei Ausnahmswerte z_1, z_2 nicht enthalten, für die die Gleichung $f(w) = z$ nur endlich viele Lösungen für w gibt. Daraus bilde ich mir eine Reihe, in der jeder Wert p_i unendlich oft auftritt:

$$p_1, p_2, p_1, p_2, p_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_1, \ldots .$$

Ich kann nun eine Reihe von Punkten w_1, $w_2, \ldots$ in der w-Ebene so wählen, daß $|w_i| > |w_{i-1}|$ und daß $f(w_k)$ den k^{ten} Wert obiger Reihe annimmt. Ich kann mir dann einen Einschnitt der w-Ebene herstellen, der durch alle Punkte w_1, $w_2, \ldots$ hindurchgeht, z. B. mit Hilfe von Kreisbögen und Geradenstücken. Dieser Einschnitt besitzt als Häufungsbereich die ganze Ebene.

3. Besteht der Häufungsbereich des Einschnittes aus einem einzigen Punkt, so bezeichnen wir ihn als Konvergenzwert der Funktion $f(w)$ im Punkte ∞. Die Gesamtheit aller Konvergenzwerte ist die Konvergenzmenge des Punktes ∞ bezüglich der Funktion $f(w)$. Die Konvergenzmenge kann leer sein, so die Konvergenzmenge bezüglich der Weierstraßschen Funktion $\wp(w)$. $\sin w$ hat den einzigen Konvergenzwert ∞, e^w die Konvergenzwerte $0, \infty$, e^{e^w} die Konvergenzwerte $0, 1, \infty$. Sire[3]) hat ein Beispiel angegeben, das zeigt, daß die Konvergenzmenge die Mächtigkeit des Kontinuums haben kann.

4. Wir greifen nun irgend eine Stelle $P: z_0$ der Riemannschen Fläche heraus, die keine Windungsstelle ist. Lege ich eine Gerade durch P, so will ich sagen, alle endlichen Punkte der Geraden, die der Fläche angehören und nicht Windungsstellen sind, gehören

[1]) Im Sinne der Funktionentheorie, wo wir das Unendlichferne als Punkt betrachten.

[2]) Siehe Zoretti, Leçons s. l. prolongement analytique. Gauthier-Villars 1911. S. 102.

[3]) Sire, Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières. Bull. d. l. soc. math. de France. XLI. S. 148. 1913.

dem P zugeordneten Sterne[1]) zu, falls alle Punkte, die auf der Geraden zwischen ihnen und P liegen, dieselbe Beschaffenheit aufweisen. Gehört von einem solchen Halbstrahl nur ein endliches Stück dem Sterne an, so ist der erste Punkt, der dem Sterne nicht angehört, entweder ein Windungspunkt oder er zählt zu den Konvergenzwerten der Funktion $f(w)$, denn der Halbstrahl liefert dann einen Einschnitt der Riemannschen Fläche. Da jede Riemannsche Fläche nur abzählbar viele Windungsstellen enthält — eine Windungsstelle kann ja nicht Häufungspunkt von Windungsstellen sein —, so gehören einem Sterne auch nur abzählbar viele Strahlen an, die von Windungsstellen begrenzt werden. Dem Sterne gehört kein Häufungspunkt von Windungsstellen an. Wir normieren jetzt die Abbildung der Riemannschen Fläche so, daß der wesentlich singuläre Punkt der w_1-Ebene nach $w_1 = 0$ kommt und wir transformieren durch eine lineare Substitution die z-Ebene so, daß unser Stern in ein Gebiet $\overline{G}$ der z_1-Ebene übergeht, dem der unendlich ferne Punkt angehört. Das Geradenbüschel durch den Punkt P geht über in ein Kreisbüschel durch die den Punkten P und ∞ entsprechenden Punkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ der z_1-Ebene. Durch die Abbildungsfunktion $z_1 = \varphi(w_1)$ geht $\overline{G}$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet der w_1-Ebene G^* über. Es sei nun $G^*(r)$ jener Teil von G^*, für den $|w_1| < r$. Das Maß von $G^*(r)$ ist natürlich $\leq r^2\pi$. Im Sterne entspreche $G^*(r)$ die Menge $\overline{G}(r)$, deren Maß gegeben wird durch das Integral

$$\int\limits_{G^*(r)} |\varphi'(w_1)|^2 \, dw_1 \, d\overline{w}_1 = \int\limits_{G^*(r)} |\varphi'(w_1)|^2 \, r \, dr \, d\varphi . \tag{1}$$

$J\left(\overline{G}(r)\right)$ geht daher mit $J\left(G^*(r)\right)$, d. h. mit r gegen Null. Jener Menge $\gamma^*(\rho)$ von G^*, die dem Kreise $|w_1| = \rho$ angehört, entspricht eine Menge $\overline{\gamma}(\rho)$ von $\overline{G}$, deren lineares Maß[2]), falls es endlich ist, gegeben wird durch das Integral

---

[1]) Mittag-Leffler, An en generalisering of potensserien, Stockh. Öfv. 55. S. 135. 1898. — Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene (première note). Act. math. 23. S. 43. 1900.

[2]) $\overline{\gamma}(\rho)$ besteht aus einer abzählbaren Zahl von Querschnitten des Sternes. Ist der einem Querschnitte entsprechende Teil von $\gamma^*(\rho)$ gegeben durch $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, so ist der Teil, dem die Parameterwerte $\varphi_1 < \tilde{\varphi}_1 \leq \varphi \leq \tilde{\varphi}_2 < \varphi_2$ entsprechen, als analytische Linie rektifizierbar und hat das Maß $\int\limits_{\tilde{\varphi}_1}^{\tilde{\varphi}_2} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\varphi$. Wir ordnen daher dem Querschnitt das Maß $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\varphi$ und der Menge $\overline{\gamma}(\rho)$ das Maß $\int\limits_{\gamma^*(\varrho)} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\varphi$ zu. Dies entspricht dem linearen Maß von Carathéodory (Über das lineare Maß von Punktmengen. Gött. Nachr. 1914. S. 404 ff.).

$$\int\limits_{\gamma^*(\varrho)} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\varphi. \tag{2}$$

Nun gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\Big(\int\limits_{G^*(r)} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\rho \, d\varphi\Big)^2 &\leqq \int\limits_{G^*(r)} |\varphi'(w_1)|^2 \, \rho \, d\rho \, d\varphi \cdot \int\limits_{G^*(r)} \rho \, d\rho \, d\varphi \\ &\leqq J\big(\overline{G}(r)\big) \cdot r^2 \pi .\end{aligned} \tag{3}$$

Das Doppelintegral links kann ich aber auch als iteriertes Integral auffassen. Wäre nun $\underline{\lim}_{\varrho = 0} \int\limits_{\gamma^*(\varrho)} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\varphi = g > 0$, so wäre

$$\int\limits_{G^*(r)} |\varphi'(w_1)| \, \rho \, d\rho \, d\varphi \geqq g r. \tag{4}$$

Dies aber widerspricht der Ungleichung (3), da $J\big(\overline{G}(r)\big)$ mit r gegen Null geht.

Gehen wir jetzt zum Sterne über der z-Ebene zurück. Es sei $\gamma(\rho; R)$ der Teil jener Menge, die $\overline{\gamma}(\rho)$ entspricht, für den $|z - z_0| \leqq R$. Ersichtlich ist auch bei festgehaltenem R

$$\underline{\lim}_{\varrho = 0} J\big(\gamma(\rho, R)\big) = 0 .$$

Nun trifft jeder Strahl des Sternes, der in einem Punkte $\tilde{z}$, $|\tilde{z} - z_0| \leqq R$, endet, der kein Windungspunkt ist, $\gamma(\rho, R)$ für jedes ρ. Bedenken wir, daß eine gewisse Umgebung des Punktes P ganz dem Sterne angehört, und messen wir eine Menge von Strahlen mit dem Maße der Punktmenge, in der der Einheitskreis um P von der Strahlenmenge getroffen wird, so ist das Maß der Menge der oben erwähnten Strahlen

$$M(R) \leqq m \, J\big(\gamma(\rho, R)\big),$$

sobald ρ so klein ist, daß $\gamma(\rho, R)$ eine bestimmte Umgebung des Punktes P frei läßt. m ist hiebei eine numerische Konstante, die nur von der Größe dieser Umgebung abhängt. Daraus folgt aber

$$M(R) = 0 .$$

Wir können hier mit R gegen unendlich gehen. Da die Windungspunkte nur eine abzählbare Menge bilden, so folgt, daß die Menge der Strahlen des Sternes, die in einem endlichen Punkte endigen, das Maß Null besitzt. Der Stern bedeckt die ganze Ebene mit Ausnahme einer — im Sinne der Funktionentheorie — abgeschlossenen Nullmenge.

5. Eine unmittelbare Folgerung hievon ist, daß jeder Ausnahmswert, d. h. jeder Wert, den die Funktion ausläßt oder nur endlich vielmal annimmt, ein Konvergenzwert ist. Denn transformieren wir unsere Funktion linear, daß der betrachtete Ausnahmswert für die transformierte Funktion in den Wert unendlich übergeht, so erkennen wir aus obigem Satze sofort die Möglichkeit, Einschnitte der Riemannschen Fläche zu bilden, die im Punkte unendlich enden. Entsprechend folgt der Satz: Besitzt die Gleichung $f(w) - R(w) = 0$, worin $R(w)$ eine rationale Funktion von w bedeutet, keine oder nur endlich viele Lösungen, so besitzt $f(w)$ den Konvergenzwert $\lim\limits_{w=\infty} R(w)$.

6. Nimmt man aus der Riemannschen Fläche die Windungspunkte weg, so läßt sich die überbleibende Punktmenge durch die passend bestimmten Umgebungen abzählbar vieler entsprechend gewählter ihrer Punkte vollständig bedecken; daher gehört auch jeder Punkt der Fläche, mit Ausnahme der abzählbar vielen Windungspunkte, mindestens einem der Sterne an, die zu jenen abzählbar vielen Punkten M gehören. Ich kann es dabei so einrichten, daß durch diese Punkte jeder Punkt der Fläche approximiert wird. Es sei nun N ein Punkt der z-Ebene, über dem in jedem dieser Sterne ein dem betreffenden Stern angehöriger Punkt liegt. Solche Punkte muß es geben, denn die Projektion aller Ausnahmsstrahlen, die den gewählten Sternen nicht angehören, besitzt als Summe von abzählbar vielen Nullmengen das Maß Null. Über N liegen natürlich unendlich viel Punkte der Riemannschen Fläche. Von den zu diesen Punkten gehörigen Sternen Σ wird jede Umgebung irgend eines Punktes der Fläche überall dicht bedeckt. Nehme ich die Umgebung irgend eines Punktes der Fläche her, so bilden die Punkte, die keinem dieser Sterne angehören, eine nirgends dichte abgeschlossene Menge, denn die Punkte von M liegen überall dicht und jeder Punkt von M gehört einem Sterne Σ an. Dadurch ist es möglich, aus den Sternen die Riemannsche Fläche zusammenzusetzen und sich so einigermaßen über ihren Aufbau zu orientieren.

7. Die Konvergenzwerte können wir jetzt in bezug auf M in zwei Klassen einteilen, je nachdem, ob es einen den Konvergenzwert bestimmenden Einschnitt gibt, der vollständig in endlich vielen der zu M gehörigen Sterne enthalten ist oder nicht. Die Konvergenzwerte der ersten Klasse bilden eine Nullmenge. Denn sie liegen auf den Ausnahmestrahlen der zu M gehörigen Sterne und eine abzählbare Menge von Nullmengen ist selbst eine Nullmenge.

Der vorstehende Satz gilt, wenn wir die Klasseneinteilung auf die Sterne über dem Punkt N basieren, je nachdem, ob es einen den Konvergenzwert bestimmenden Einschnitt gibt, der nur mit endlich vielen dieser Sterne Punkte gemein hat oder nicht.

8. Es sei uns jetzt ein zusammenhängender Teil der Riemannschen Fläche gegeben, durch den die z-Ebene höchstens n-mal bedeckt wird. Es ist leicht ersichtlich, was man hier unter der Berandung dieses Flächenteiles zu verstehen hat. Wir haben dann den Satz: Ist ein die Ebene höchstens n-mal bedeckender Teil der Riemannschen Fläche so beschaffen, daß sich die Projektion seiner Berandung aus einer endlichen Anzahl von rektifizierbaren Jordankurven[1]) zusammensetzen läßt, so liefern die diesem Teile ganz angehörenden Einschnitte der Riemannschen Fläche nur eine lineare Nullmenge von Konvergenzwerten. Die wesentlich singulären Stellen können ja nur auf der Berandung des Stückes der Riemannschen Fläche liegen. Durch eine lineare Transformation der z-Ebene erziele ich es zuerst, daß die Projektion der Berandung nicht durch den unendlich fernen Punkt der z-Ebene hindurchgeht. Gehen wir genau so vor wie auf S. 8, bezeichnen wir das berandete Stück der Riemannschen Fläche über der transformierten Ebene mit $\overline{G}$, den entsprechenden Bereich der w_1-Ebene, die so normiert ist, daß der singuläre Punkt in den Nullpunkt fällt, mit G^*, so geht wiederum $J\left(\overline{G}\,(r)\right)$ mit r gegen Null. Daher geht $\underline{\lim}\, J\left(\overline{\gamma}\,(\rho)\right)$ mit ρ gegen Null, wenn ich mit $\overline{\gamma}\,(r)$ jene Punktmenge von $\overline{G}$ bezeichne, für die $|\,w_1\,| = \rho$. $\overline{\gamma}\,(\rho)$ zerfällt in eine abzählbare Anzahl von Teilstücken.

Durch eine endliche Anzahl derselben werden aus der Berandung die Teile herausgeschnitten, in denen die abgeschlossene Menge der Konvergenzwerte liegt. Denn einem solchen Stück entspricht ein Stück von $\gamma^*(\rho)$, zwischen dessen Endpunkten die Berandung von G^* durch den Nullpunkt geht. Benötige ich zur Ausscheidung der transzendenten Stellen unendlich viele solche Stücke, so hätten diese Berandungsteile im Bilde in der w-Ebene auf dem Kreise $|\,w_1\,| = \rho$ einen Häufungspunkt, dem ein Punkt der Riemannschen Fläche entspricht. Daher ließen sich auf der Berandung von $\overline{G}$ unendlich viele Punkte finden, die gegen einen Punkt der Riemannschen Fläche konvergieren und zwischen deren je zweien auf der Berandung mindestens ein wesentlich singulärer Punkt liegt. Dies ist aber infolge unserer Voraussetzung über die Berandung nicht möglich.

Eine abgeschlossene Punktmenge M auf einer rektifizierbaren Bahnkurve besitzt nun als lineares Maß $J(M)$ die Länge der Kurve L, vermindert um die Summe $\mathfrak{L}$ der Längen der abzählbar vielen Stücke, die durch die Punktmenge auf der Kurve bestimmt werden. Habe ich jetzt eine Anzahl von rektifizierbaren Bahnkurvenstücken Σ, von der Gesamtlänge l_ε, so daß jedes dieser

---

[1]) der funktionentheoretischen Ebene; eine Kurve durch den Punkt nennen wir eine rektifizierbare Jordankurve, wenn sie durch eine lineare Transformation in eine solche übergeht.

Kurvenstücke ein Stück aus unserer Kurve ausschneidet, mit dem es in der gegenseitigen Nachbarschaft ε liegt, und ist in den so ausgeschnittenen Kurvenstücken S die Punktmenge M vollständig enthalten, so ist das lineare Maß von M gleich der unteren Unbestimmtheitsgrenze der l_ε bei allen möglichen Systemen Σ für $\varepsilon = 0$. Ich kann nämlich ersichtlich annehmen, daß je ein Kurvenstück von Σ und das entsprechende ausgeschnittene Stück unserer Kurve dieselben Endpunkte haben und ferner daß je zwei der ausgeschnittenen Stücke — als Teile der Bahnkurve betrachtet — auseinander liegen, d. h. die entsprechenden Parameterintervalle haben keinen Punkt gemeinsam. Dann aber bildet Σ zusammen mit den zu S komplementären Kurvenstücken und Punkten S^* unserer Kurve eine Bahnkurve, die mit unserer Kurve in der gegenseitigen Nachbarschaft ε liegt. Daher ist

$$\underline{\lim}\, J(\Sigma + S^*) \geq L$$

oder, da $J(S^*) \leq \mathfrak{L}$,

$$\underline{\lim}\, J(\Sigma) \geq L - \mathfrak{L} = J(M).$$

Da ich als System Σ auch das System S verwenden kann, ist anderseits

$$\underline{\lim}\, J(\Sigma) \leq \underline{\lim}\, J(S) = J(M)$$

und daraus erhellt die Wahrheit unserer Behauptung.

Da die Begrenzung jenes Teiles von $\overline{G}$, für den $|w_1| \geq \rho$, mit ρ gleichmäßig gegen die Berandung von G konvergiert, so erfüllen die oben erwähnten endlich vielen Stücke von $\overline{\gamma}(\rho)$ die Bedingungen eines Systems Σ für die abgeschlossene Menge der Konvergenzwerte, wobei das entsprechende ε mit ρ gegen Null geht. Da $\underline{\lim}_{\rho=0} J\left(\overline{\gamma}(\rho)\right) = 0$, muß daher nach unserem eben bewiesenen Hilfssatze die Menge der Konvergenzwerte das lineare Maß Null haben.

III. Zwei Beispiele.

1. Wir nehmen nun eine abzählbar unendliche Zahl von Ebenen her, deren erste zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, deren i^{te} $(i \geq 2)$ zwischen $\frac{1}{2^{2i-4}}$ und $\frac{1}{2^{2i-3}}$ sowie zwischen $\frac{1}{2^{2i-2}}$ und $\frac{1}{2^{2i-1}}$ längs der reellen Achse aufgeschlitzt ist. Aus den so aufgeschlitzten Ebenen setze ich nun, indem ich die i^{te} Ebene mit der $(i+1)^{\text{ten}}$ Ebene längs des Schlitzes $\left[\frac{1}{2^{2i-2}}, \frac{1}{2^{2i-1}}\right]$ kreuzweise verbinde, eine unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche zusammen, die ersichtlich einfach

zusammenhängend ist. Wir werden zeigen, daß diese Riemannsche Fläche auf die punktierte Ebene konform abgebildet werden kann. Denn sonst könnte man sie auf den Einheitskreis konform abbilden. Hiebei wird die i^{te} Ebene $(i \geq 2)$ auf einen ringförmigen Bereich B_i abgebildet. Diese Bereiche legen sich gürtelförmig aneinander und sie würden, wenn die Abbildung auf den Einheitskreis erfolgte, für $i = \infty$ gleichmäßig gegen den Einheitskreis konvergieren. Die Abbildung der i^{ten} Ebene auf B_i nehmen wir nun schrittweise vor, indem wir die aufgeschlitzte i^{te} Ebene zuerst durch eine Quadratwurzeloperation auf eine Ebene abbilden, aus der der Einheitskreis ausgeschnitten ist, so daß dem Punkte $\frac{1}{2^{2i-2}}$ der Punkt 1, dem Punkte $\frac{1}{2^{2i-1}}$ der Punkt -1 entspricht und die reelle Achse außerhalb des angegebenen Schlitzes auf die reelle Achse außerhalb des Einheitskreises abgebildet wird. Der Schlitz $\left[\frac{1}{2^{2i-3}}, \frac{1}{2^{2i-4}}\right]$ geht dabei in den geradlinigen Schlitz $[5+2\sqrt{6},\ 13+2\sqrt{42}]$ über. Sicher gehört also der Kreisring um den Nullpunkt mit den Radien eins und zwei der transformierten Ebene an. Diese bilden wir dann mittels der Funktion $\psi_i(\zeta_i)$ auf den Bereich B_i ab. Die Kreise $|\zeta_i| = r$ $(1 \leq r \leq 2)$ gehen dabei in Kurven über, die sich in B_i nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Diese Kurven sind rektifizierbar und da die B_i gegen den Einheitskreis konvergieren, so folgt, daß für genügend große i ihre Länge

$$\int_0^{2\pi} |\psi_i'(\zeta_i)|\, \rho\, d\varphi > \pi .$$

Nun gilt aber

$$\left[\int_1^2\!\!\int_0^{2\pi} |\psi_i'(\zeta_i)|\, \rho\, d\rho\, d\varphi\right]^2 < \int_1^2\!\!\int_0^{2\pi} |\psi_i'(\zeta_i)|^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi \cdot \int_1^2\!\!\int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\varphi$$

oder

$$\pi^2 \leq 3\pi\, J(K_i^*),$$

wobei K_i^* das Bild des oben erwähnten Kreisringes ist. Da dieses Bild in B_i enthalten ist, $\lim\limits_{i=\infty} J(B_i)$ aber gleich Null ist, so sind wir hiemit zu einem Widerspruch mit der Annahme gekommen, daß unsere Riemannsche Fläche konform auf den Einheitskreis abbildbar ist.

Bilden wir nun die Riemannsche Fläche auf die punktierte w-Ebene ab, so besitzt die Abbildungsfunktion $f(w)$ als einzigen Konvergenzwert den Wert Null und dieser Wert gehört der Berandung keines Sternes der Umkehrungsfunktion an; denn jeder Stern hat nur mit den drei Ebenen: $(i-1,\ i,\ i+1)$

Punkte gemein und für diese Ebenen ist der Punkt Null ein regulärer Punkt.

2. Nehmen wir jetzt wieder an, daß die i^{te} Ebene $(i \geq 2)$ zwei geradlinige Schlitze besitzt, deren Länge mit $\frac{1}{i}$ gegen Null geht, deren Mittelpunkte die ganze Ebene als Häufungsmenge besitzen und richten wir es so ein, daß eine Ellipse, die die Endpunkte des Kreuzungsschlitzes der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Ebene zu Brennpunkten besitzt und die das feste Achsenverhältnis $\lambda < 1$ besitzt, der i^{ten} Ebene angehört, sodaß der zweite Kreuzungsschlitz dieser Ebene außerhalb dieser Ellipse liegt, so sieht man mit der gerade angewandten Beweismethode ein, daß sich die hieraus gebildete Riemannsche Fläche auf die punktierte w-Ebene abbilden läßt. Denn transformieren wir die i^{te} Ebene mittels einer Quadratwurzeloperation auf eine Ebene, aus der der Einheitskreis ausgeschnitten ist, so daß die Schlitzgerade außerhalb des Kreuzungsschlitzes zwischen der i^{ten} und $(i+1)^{\text{ten}}$ Ebene in die reelle Achse außerhalb des Einheitskreises übergeht, so gehört ein Kreisring um den Nullpunkt mit den Radien 1 und $\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$ der transformierten aufgeschlitzten Ebene an. Die im Endlichen meromorphe Abbildungsfunktion $f(w)$ ist daher so beschaffen, daß *jeder Weg, der nach $w = \infty$ geht, als Häufungsbereich die ganze Ebene besitzt.* Eine ganze Funktion kann nach einem früheren Satze (S. 8) diese Eigenschaft nicht haben.

Die Resultate dieses und des folgenden Abschnittes dürften auch im Hinblick auf eine nicht ganz klar abgefaßte Note von Borel[1]) von Interesse sein.

3. Es sei erwähnt, daß man auf die angegebene Art eine Funktion $f(w)$ herstellen kann, so daß *die größte Punktmenge, die den Häufungsbereichen aller möglichen, im Punkte ∞ endenden Wege bezüglich der Funktion $f(w)$ gemein ist, aus einer beliebig vorgegebenen abgeschlossenen Teilmenge der funktionentheoretischen Ebene besteht.* Wir brauchen es nur so einzurichten, daß die Mittelpunkte der Schlitze genau diese Menge als Häufungsmenge besitzt. Nach der von Carathéodory[2]) eingeführten Sprechweise können wir also sagen, daß die Menge der „Häufungspunkte" des dem Punkte ∞ zugehörigen Häufungsbereiches von $f(w)$ aus einer beliebig vorgegebenen abgeschlossenen Menge besteht, während die Menge der „Nebenpunkte" aus allen übrigen Punkten der Ebene besteht.

---

[1]) Borel, Sur l'indetermination des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier C. R. Bd. 155. 1912. S. 201.

[2]) Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. LXXIII.

IV. Die Abbildung der Riemannschen Fläche auf den Einheitskreis.

1. Wir nehmen nun an, daß die vorgelegte einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche über der z-Ebene konform auf den Einheitskreis in der w-Ebene abgebildet werden kann. Es sei $z = f(w)$ die Abbildungsfunktion. Ist dann P ein Punkt des Einheitskreises, so können wir bezüglich $f(w)$ dem Punkte P drei verschiedene Bereiche zuordnen:

a) Den Wertebereich, d. h. die Gesamtheit aller Werte, die $f(w)$ in jeder noch so kleinen Umgebung[1]) des Punktes P annimmt.

b) Den Häufungsbereich,[2]) d. h. die Gesamtheit aller Werte, denen $f(w)$ in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes P beliebig nahe kommt. Ersichtlich ist der Häufungsbereich des Punktes P gleich der Vereinigungsmenge der Häufungsbereiche aller im Punkte P endenden Einschnitte des Einheitskreises bezüglich $f(w)$.

c) Den Konvergenzbereich, d. h. die Gesamtheit aller Konvergenzwerte, die den im Punkte P endenden Einschnitten des Einheitskreises bezüglich $f(w)$ zukommen. Zu jedem Werte des Konvergenzbereiches gibt es einen im Punkte P endenden Einschnitt des Einheitskreises, längs dessen $f(w)$ gegen diesen Wert konvergiert.

2. Der Wertebereich ist ersichtlich leer, wenn die Riemannsche Fläche jede Stelle der z-Ebene nur endlich oft überdeckt — die Anzahl der Überdeckungen braucht nicht beschränkt zu sein —. Um den Wertebereich zu erhalten, genügt es, eine Folge von Umgebungen U_i des Punktes P herzunehmen, so daß U_{i+1} in U_i enthalten ist und U_i für $i = \infty$ gegen P konvergiert, d. h. wie klein ich auch ρ nehme, sind für genügend große i alle Punkte von U_i von P um weniger als ρ entfernt. Die Werte, die $f(w)$ in U_i annimmt, bilden ein Gebiet V_i. V_{i+1} ist in V_i enthalten und der Wertebereich ergibt sich als Durchschnitt der V_i. Der Wertebereich braucht nicht zusammenhängend zu sein. Bezeichnen wir[3]) eine Menge, die der Durchschnitt einer Folge von Gebietsmengen ist, als „Gebietsdurchschnitt", so können wir sagen: Jeder Wertebereich ist ein Gebietsdurchschnitt und ist als solcher entweder leer, abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

In $p\left(\frac{1}{(w-1)^3}\right)$, $\sin\left(\frac{1}{(w-1)^3}\right)$, $e^{\frac{1}{(w-1)^3}}$ haben wir Funktionen vor uns, bezüglich deren der Wertebereich des Einheitskreises im

[1]) Wir verstehen hier unter Umgebung nur jenen Teil einer gewöhnlichen Umgebung, der im Innern des Einheitskreises liegt.

[2]) Entsprechend der domaine d'indetermination von Painlévé. C. R. CXXXI. S. 489. 1900.

[3]) Schönflies, Entwicklung der Mengenlehre und ihre Anwendungen, I, 2. Aufl., B. G. Teubner, 1913, S. 350, bezeichnet diese Mengen als Borelsche Mengen.

Punkte 1 die ganze Ebene, die ganze Ebene mit Ausnahme der Werte ∞, bezw. 0 und ∞ ist. Ist N irgend eine abgeschlossene, nirgends zusammenhängende Menge der funktionentheoretischen Ebene, die aus mehr als zwei Punkten besteht, stellen wir dann für die z-Ebene, aus der die Menge N entfernt ist, die zugehörige unverzweigte universelle Überlagerungsfläche[1]) her und bilden diese mittels $z = f(w)$ konform auf den Einheitskreis ab, so besitzt jeder Punkt des Einheitskreises der w-Ebene als Wertebereich bezüglich $f(w)$ die ganze Ebene, mit Ausnahme der Menge N.

3. Ob jeder Gebietsdurchschnitt Wertebereich sein kann, vermochte ich nicht festzustellen, doch läßt sich dafür stellvertretend sagen: Zu jedem Gebietsdurchschnitt M läßt sich eine ihn enthaltende Menge L finden, die sich von ihm nur um eine Nullmenge unterscheidet, so daß sich eine im Einheitskreis meromorphe Funktion $f(w)$ herstellen läßt, bezüglich deren L Wertebereich eines Punktes des Einheitskreises ist. Gehört der Punkt ∞ der Menge M nicht an, so läßt sich L so wählen, daß er ihr auch nicht angehört, und $f(w)$ läßt sich als eine im Einheitskreis ganze Funktion herstellen.

Es sei M als Durchschnitt der Folge der Gebietsmengen G_i gegeben. Wir können annehmen, daß die Punktmenge G_{i+1} in G_i enthalten ist. Ist dies nicht von vornherein der Fall, so ersetzen wir G_{i+1} durch den Durchschnitt von $G_1, G_2, \ldots G_{i+1}$. Die Menge G_i zerfällt in endlich oder abzählbar unendlich viele Teilgebiete G_{ij}, die teilerfremd sind. Ist G_{ij} nicht schon einfach zusammenhängend, so gehen wir von ihm zu einer die Ebene teilweise mehrfach bedeckenden Menge G_{ij}^* über, die eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche darstellt, deren Projektion die Menge G_{ij} ist. Zu diesem Zwecke schneiden wir mit Hilfe der Querschnitte von G_{ij} : Q_h das Gebiet zu einem einfach zusammenhängenden auf. Hiebei achten wir darauf, daß die Q_h keinen Häufungspunkt in G_{ij} besitzen. Es ist dies stets möglich. Bilden wir z. B. die zugehörige unverzweigte universelle Überlagerungsfläche auf den Einheitskreis ab — dies können wir stets tun, wenn G_{ij} zumindest drei Punkte der Ebene nicht enthält. Suchen wir dann einen Fundamentalbereich, den wir so normieren können, daß er von lauter Kreisen begrenzt wird, die zum Einheitskreis orthogonal sind, so liegen die Häufungspunkte dieser Kreise bezw. aus Kreisstücken zusammengesetzten Berandungsteile, deren Endpunkte auf dem Einheitskreis liegen, auf dem Einheitskreis. Das diesem System von Kreisen entsprechende System von Querschnitten erfüllt dann die oben angegebenen Bedingungen. Damit die Punkte der Querschnitte nicht der Menge G_{ij}^* entzogen werden, führen wir zwischen den beiden Endpunkten von Q_h (in dem sonst unzerschnittenen Gebiete G_{ij}) einen zweiten Querschnitt Q_h', der mit Q_h sonst keinen Punkt ge-

[1]) Weyl, a. a. O., S. 50.

mein hat, und zwar so, daß das zwischen Q_h und Q'_h liegende Gebiet γ_h vollständig G_{ij} angehört. Wird γ_h vom linken Ufer von Q_h begrenzt, so verschmelze ich γ_h längs Q_h mit dem an das rechte Ufer von Q_h reichenden Teile von G_{ij}. Denken wir dies bei jedem Querschnitt Q_h getan, so erhält man eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche G^*_{ij}, deren Projektion die Menge G_{ij} bildet. Eine solche erhalten wir übrigens auch, wenn wir z. B. bei obigem Fundamentalbereich jeden Begrenzungskreis, der den Einheitskreis senkrecht schneidet, durch einen Kreis ersetzen, der den Einheitskreis in denselben Punkten, aber unter einem Winkel von 45^0 schneidet und das entsprechende Gebiet der universellen Überlagerungsfläche aufsuchen.

Die Mengen G^*_{ij} ordne ich jetzt in eine einfach unendliche Reihe: G_k. Ist H_k die Vereinigungsmenge der Projektionen von $\overline{G}_k$, $\overline{G}_{k+1}$, $\overline{G}_{k+2}, \ldots,$ so ist M gleich dem Durchschnitt der H_k. Denn H_k enthält ersichtlich die G_i, wenn i nur genügend groß gewählt wird und daher auch M. Ist aber P ein Punkt, der M nicht angehört, so ist P nur in endlich vielen G_i, daher nur in endlich vielen G_{ij} enthalten und tritt infolgedessen auch nur in endlich vielen H_k auf.

Die $\overline{G}_k$ verbinde ich in der angegebenen Reihenfolge durch Streifen S_k zu einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche. Um allen Schwierigkeiten zu entgehen, machen wir dies folgendermaßen: Wir machen in $\overline{G}_1$ einen Einschnitt $E_{1,2}$, in die übrigen $\overline{G}_k$ zwei Einschnitte $E_{k,1}$ und $E_{k,2}$; an das eine Ufer jedes solchen Einschnittes stückeln wir ein Gebiet so an, daß die derart modifizierte Fläche wiederum eine einfach zusammenhängende Fläche ist, die die gleiche Projektion wie $\overline{G}_k$ besitzt — wir haben möglicherweise dabei darauf zu achten, daß auch die Endpunkte des Einschnittes von dem angestückelten Gebiet überdeckt werden — und verbinden dann das freie Ufer von $E_{k,2}$ mit dem freien Ufer von $E_{k+1,1}$ durch einen Streifen S_k, S_k ist — möglicherweise auf einer zweiblättrigen Fläche — ein zusammenhängendes Gebiet, zu dem noch auf den beiden Einschnittufern liegende Randteile gefügt sind, und zwar derart, daß $\overline{G}_{k-1} + S_k + \overline{G}_k$ eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche darstellt. Die Streifen S_k unterwerfen wir noch folgenden Bedingungen: Das Flächenmaß von S_k sei $\leq \frac{1}{2^k}$. Ferner möge zu jedem S_k ein Quadrat q_k von der Seitenlänge l_k existieren, so daß jede Parallele zur einen Seitenrichtung u_k eine Strecke mit S_k im Quadrat gemein hat, von deren Endpunkten der eine dem rechten, der andere dem linken Ufer von S_k angehört, während die beiden Quadratseiten der anderen Richtung v_k zu S_k teilerfremd sind.

Die so gewonnene Riemannsche Fläche bilden wir, was offenkundig möglich ist, mittels $z = f(w)$ konform auf den Einheitskreis der w-Ebene ab. Führe ich in der Riemannschen Fläche einen Querschnitt E_k, der in S_k gelegen ist, so erhalte ich zwei Teilgebiete, deren eines T_k die Menge $\overline{G}_k$ nicht mehr enthält. Die Gebiete $T_1, T_2, \ldots T_k \ldots$ bilden eine Folge von Gebieten, so daß T_{k+1} in T_k enthalten ist. Bei der Abbildung gehen die T_k in die Folge ineinandergeschachtelter Gebiete $\overline{T}_k$ über. Ich behaupte, daß die $\overline{T}_k$ gegen einen Punkt des Einheitskreises konvergieren, d. h. es gibt einen Punkt P des Einheitskreises, so daß, wie klein ich auch ρ wähle, alle Punkte von $\overline{T}_k$ von P um weniger als ρ entfernt sind. Zuerst zeigen wir, daß der Durchschnitt der T_k gleich Null ist. Nehmen wir nämlich einen inneren Punkt R des Einheitskreises, so ist er das Bild eines Punktes, der in einem $\overline{G}_k$ liegt, bezw. einem S_{k-1} angehört. Wähle ich K größer als dieses k, so ist R in $\overline{T}_K$ nicht mehr enthalten. Daraus folgt einmal

$$\lim_{k=\infty} J(\overline{T}_k) = 0.$$

Es könnte noch sein, daß die $\overline{T}_k$ gegen eine Strecke Σ des Einheitskreises konvergierten. Gegen diese Strecke würden auch die Bilder der Querschnitte E_k konvergieren, und zwar so, daß die eine Folge der Endpunkte dieser Querschnitte gegen den einen Endpunkt, die andere Folge gegen den anderen Endpunkt der Strecke konvergiert. Jeder in T_k liegende Querschnitt der Fläche, der G_1 von $\overline{G}_n$ trennt $(n > k)$, hätte dann ein Bild, dessen Länge $> \frac{e}{2}$ ist, wofern k nur groß genug gewählt, wobei e die Entfernung der Endpunkte von Σ[1]) ist. Einen solchen Querschnitt F können wir aber durch jede Parallele zur Richtung u_{k+1} im Quadrate γ_{k+1} bilden. Nun ist die Länge des Bildes von F gegeben durch

$$\int_F |\varphi'(z)|\, du_{k+1},$$

wobei $\varphi(z)$ die Umkehrungsfunktion von $f(w)$ ist, und dies wäre $> \frac{e}{2}$. Anderseits haben wir

$$\Big(\iint\limits_{\gamma^*_{k+1}} |\varphi'(z)|\, du_{k+1}\, dv_{k+1}\Big)^2 \leq \iint\limits_{\gamma^*_{k+1}} |\varphi'(z)|^2 du_{k+1}\, dv_{k+1} \cdot \iint\limits_{\gamma^*_{k+1}} du_{k+1}\, dv_{k+1}.$$

[1]) Daß Σ nicht mit dem ganzen Einheitskreis zusammenfallen kann, folgt schon daraus, daß die Berandung von $\overline{G}_1 + S_1$, so weit sie der Berandung der Riemannschen Fläche angehört, auf ein endliches Stück des Einheitskreises abgebildet wird.

$\iint\limits_{\gamma^*_{k+1}} |\varphi'(z)|^2 du_{k+1} dv_{k+1}$ ist der Inhalt des Bildes des Teiles γ^*_{k+1} von S_{k+1} in γ_{k+1}, also da dieses in $\overline{T}_k$ enthalten ist, kleiner als $J(\overline{T}_k)$; daher würde folgen

$$\frac{c^2}{4} \cdot l^2_{k+1} \leq J(\overline{T}_k) \cdot J(\gamma^*_{k+1}) < J(\overline{T}_k) \cdot l^2_{k+1}.$$

Da $J(\overline{T}_k)$ gegen Null geht, sind wir zu einem Widerspruch gekommen. Die $\overline{T}_k$ konvergieren also tatsächlich gegen einen Punkt P des Einheitskreises.

Dieser Punkt P besitzt ersichtlich als Wertebereich bezüglich $f(w)$ die äußere Grenzmenge der Mengen, die aus den Projektionen von S_k und $\overline{G}_k$ besteht. Nun ist die äußere Grenzmenge der Projektionen der $\overline{G}_k$ gleich M, während die äußere Grenzmenge der Projektionen der S_k infolge unserer Voraussetzungen eine Nullmenge ist; denn sie ist in der Vereinigungsmenge der Projektionen der $S_k, S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots$ enthalten und deren Maß ist

$$\leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Es folgt übrigens, daß *jeder Durchschnitt einer Folge zusammenhängender Gebiete* $G_i : G_i > G_{i+1}$ *Wertebereich einer Funktion sein kann.* Wir können die S_k dann so wählen, daß ihre Projektion in der Projektion von G_k liegt.

4. Richten wir es so ein, daß die Begrenzung der Riemannschen Fläche an keiner Stelle von einer analytischen Kurve gebildet wird — daß dies für unseren Fall immer möglich ist, bedarf einer besonderen Überlegung, die ich hier nicht anführe —, so besitzt $f(w)$ den Einheitskreis als natürliche Grenze.

Gehört der Punkt ∞ der Menge M nicht an, so können wir die Mengen G_i so wählen, daß sie den Punkt ∞ nicht enthalten und da die S_k den Punkt ∞ nicht enthalten, läßt die Riemannsche Fläche den Punkt ∞ unbedeckt, d. h. die Funktion $f(w)$ ist im Einheitskreis ganz.

5. Da es zu jeder meßbaren Menge[1] M einen Gebietsdurchschnitt gibt, der M enthält und den gleichen Inhalt besitzt, so folgt der Satz: *Es gibt stets eine im Einheitskreis meromorphe Funktion* $f(w)$, *bezüglich der der Wertebereich des Punktes 1 eine beliebige meßbare Menge*

[1]) Eine Menge, die sich ins Unendliche erstreckt, nennen wir meßbar, wenn der Durchschnitt mit dem Kreise $< R$ für jedes R meßbar ist oder, was gleichbedeutend ist, wenn das stereographische Bild auf der Kugel meßbar ist.

enthält, von der er sich nur um eine Nullmenge unterscheidet. So gibt es Funktionen, deren Wertebereich eine in der ganzen Ebene überall dichte Nullmenge ist. Ferner können wir noch sagen:

Besteht ein Gebietsdurchschnitt aus endlich vielen zusammenhängenden Teilmengen, so ist er Wertebereich eines Punktes des Einheitskreises bezüglich einer im Einheitskreise meromorphen Funktion; denn in diesem Falle lassen sich die S_k leicht so herstellen, daß ihre äußere Grenzmenge leer ist.

6. Um den Häufungsbereich eines Punktes zu erhalten, nehmen wir eine Folge von Umgebungen[1]) U_i des Punktes P her, so daß U_{i+1} in U_i enthalten ist und U_i für $i = \infty$ gegen P konvergiert, wir machen das Wertegebiet, das $f(w)$ in U_i annimmt, abgeschlossen und suchen den Durchschnitt dieser ineinandergeschachtelten abgeschlossenen zusammenhängenden Mengen V_i. Dies ist der Häufungsbereich. Daraus folgt: Der Häufungsbereich ist eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge, die den Wertebereich enthält.

7. Der Häufungsbereich enthält stets mindestens einen Punkt; er kann auch die ganze Ebene umfassen, wie z. B. der Punkt 1 bezüglich der Funktion $e^{\frac{1}{(w-1)^2}}$. Wir zeigen leicht den Satz: Zu jeder abgeschlossenen, zusammenhängenden Menge M gibt es eine im Einheitskreis meromorphe Funktion $f(w)$, bezüglich der M Häufungsbereich eines Punktes des Einheitskreises ist, — der übrigens eine unmittelbare Folge der Sätze Ende 3 und 5 ist. Für $f(w)$ läßt sich übrigens stets eine im Einheitskreise reguläre Funktion finden.

Da der Fall der ganzen Ebene bereits durch das obige Beispiel erledigt ist, können wir annehmen, daß M nicht die ganze Ebene ist. Wir bezeichnen dann mit G_k jenes zusammenhängende Gebiet der z-Ebene, das aus allen Punkten der Ebene besteht, die von M auf der Kugel, auf die wir die z-Ebene stereographisch projizieren, einen längs der größten Kreise gemessenen Abstand $< \frac{\rho}{2^k}$ besitzen. Hiebei ist ρ eine feste Zahl, die so gewählt ist, daß die Komplementärmenge von M auf der Kugel einen Kreis vom Radius ρ enthält. Aus G_k bilde ich G_k^*, indem ich alle Komplementärmengen hinzufüge außer jenen zusammenhängenden Mengen, deren Inhalt auf der Kugel $> \frac{\rho^2 \pi}{4^k}$. Die Menge M ist der Durchschnitt der G_k^*. G_k^*, das von endlichem Zusammenhang ist, verwandle ich durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\overline{G}_k$ und daraus stelle ich mir, wie oben, durch Strei-

---

[1]) Siehe die Bemerkung der Fußnote S. 15.

fen S_k eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche her. Die S_k wähle ich dabei so, was sich hier durchführen läßt, daß die Projektion von S_k in G^*_{k+1} enthalten ist. Die Folge der T_k ist wieder so beschaffen, daß die Bilder $\overline{T}_k$ gegen einen Punkt P des Einheitskreises konvergieren, und zwar kann man sie als eine Folge konvergierender Umgebungen betrachten, da die Endpunkte der sie bestimmenden Querschnitte von P offenkundig verschieden sind — zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegt ja beiderseits ein Stück der Berandung der Riemannschen Fläche. Mache ich aber die Werte, die $f(w)$ in $\overline{T}_k$ annimmt, abgeschlossen, so erhalte ich eine Menge D_k von Punkten, die von M auf der Kugel einen Abstand $\leq \frac{\varrho}{2^k}$ haben. Der Durchschnitt der D_k ist aber M.

8. Bei unserem eben konstruierten Beispiel fällt der Wertebereich mit dem Häufungsbereich zusammen. Dies ist durchaus nicht nötig. Bei der Abbildung des von einer Jordankurve umschlossenen Gebietes der schlichten Ebene auf den Einheitskreis, besteht der Häufungsbereich aus je einem Punkte, während der Wertebereich stets leer ist. Wählen wir die im Einheitskreis meromorphe Funktion $f(w)$ so, daß der Wertebereich eine in der Ebene überall dichte Nullmenge ist, so ist der Häufungsbereich gleich der ganzen Ebene.

Um übrigens $f(w)$ oben als ganze Funktion zu erhalten, entfernen wir einfach den Punkt ∞ aus G_k durch einen Einschnitt und konstruieren von den so modifizierten Mengen G^*_k weiter. Dann kommen wir zu einer Riemannschen Fläche, die den Punkt ∞ unbedeckt läßt, d. h. die zugehörige Funktion $f(w)$ ist holomorph.

9. Nach Carathéodory[1]) teilen wir den Häufungsbereich in zwei Teile: Die Menge der Hauptpunkte, d. h. die Menge jener Punkte, die dem Häufungsbereich[2]) jedes in P endenden Einschnittes des Einheitskreises bezüglich $f(w)$ angehören, d. h. die $f(w)$ auf jedem in P endenden Wege approximiert. Die übrigen Punkte bezeichnen wir als Nebenpunkte. Die Menge der Hauptpunkte ist eine abgeschlossene Menge, dies folgt unmittelbar aus der Definition. Zu jeder abgeschlossenen Menge M gibt es eine im Einheitskreis meromorphe Funktion $f(w)$, bezüglich der $f(w)$ Menge der Hauptpunkte eines Punktes des Einheitskreises ist. Ist $F(w)$ die am Ende des dritten Kapitels für M hergestellte, in der im Unendlichen punktierten Ebene meromorphe Funktion, so ist $F\left(\frac{1}{(1-w)^3}\right)$ eine durch unseren Satz geforderte Funktion. Nicht jede beliebige abgeschlossene Teilmenge des Häufungsbereiches M kann Menge

[1]) Carathéodory, „Über die Begrenzung usf.". Seine Definition ist allerdings dem speziellen Falle angepaßt und lautet anders.

[2]) Die Definition des Häufungsbereiches eines Einschnittes ist die auf S. 6 gegebene.

der Hauptpunkte sein. Doch läßt sich sagen: Ist M eine beliebige abgeschlossene zusammenhängende Menge, N eine beliebige abgeschlossene Teilmenge derselben, so läßt sich eine im Einheitskreis ganze Funktion herstellen, bezüglich der M Häufungsbereich eines Punktes des Einheitskreises ist, während N in der Menge der Hauptpunkte enthalten ist. Besteht z. B. M aus den beiden Kreisen mit den Radien 1 um die Punkte $+2$ bezw. -2, verbunden durch die Strecke $[+1, -1]$, N aus den beiden Punkten $+2$ und -2, so enthält die Menge der Hauptpunkte mit $+2$ und -2 stets die Strecke $[+1, -1]$. Beim Beweise gehen wir so vor, wir wählen, indem wir uns, wie oben, die Mengen G_k^* bilden, eine abzählbare Punktmenge $P_1, P_2, \ldots$, so daß P_k in G_{k+1}^* liegt und N genau die Häufungsmenge der P_k ist, und wählen, was wir stets tun können, die S_k so, daß S_k in der Nachbarschaft $\frac{1}{2^k}$ von P_k liegt. Die Riemannsche Fläche, die wir so konstruieren, liefert uns bei ihrer Abbildung auf den Einheitskreis eine Funktion $f(w)$ von den gewünschten Eigenschaften.

Wähle ich für G_k^* die längs der positiven reellen Achse aufgeschlitzte Ebene, so sehe ich mit Hilfe der angegebenen Konstruktion, daß ich auch eine im Einheitskreis ganze Funktion finden kann, bezüglich der eine beliebige abgeschlossene Menge Menge der Hauptpunkte des Häufungsbereiches eines Punktes ist.

Wenn ich zur Funktion $f(w)$ eine Funktion $\varphi(w)$ hinzufüge, die auf dem Einheitskreis stetig ist, so erleiden der Häufungsbereich und die Menge der Hauptpunkte für jeden Punkt P des Einheitskreises ein und dieselbe, durch $\varphi(P)$ gegebene Translation. Bei unserer Konstruktion können wir es einrichten, daß die Berandung der Riemannschen Fläche stückweise analytisch ist. Dann ist $f(w)$ am Einheitskreis in einer überall dichten Intervallmenge analytisch fortsetzbar. Nehme ich nun für $\varphi(w)$ eine auf dem Einheitskreis stetige Funktion, die im betrachteten Punkte P den Wert Null besitzt und den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, so ist $f(w) + \varphi(w)$ eine Funktion, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat und denselben Häufungsbereich und dieselbe Menge der Hauptpunkte im Punkte P besitzt wie $f(w)$.

10. Im vorhergehenden haben wir zu wiederholten Malen von folgender Tatsache Gebrauch gemacht: Läßt sich von der Riemannschen Fläche durch einen Querschnitt Q ein Gebiet abgrenzen, das die z-Ebene schlicht bedeckt und dessen Begrenzung nur teilweise von Q geliefert wird, so gilt für den die andere Begrenzung bildenden Teil der Berandung der Riemannschen Fläche bei der konformen Abbildung durch die Grenzkreisuniformisierende $f(w)$ die durch Caratheodory und Koebe entwickelte Theorie der Randzuordnung. Zuerst ist er-

sichtlich, daß in diesem Falle die konforme Abbildung der Riemannschen Fläche auf die punktierte Ebene unmöglich ist. Unsere Behauptung wird sofort bewiesen, wenn wir zuerst unser abgetrenntes Gebiet auf den Einheitskreis der ζ-Ebene abbilden und dann die Abbildung des Einheitskreises der ζ-Ebene auf das Bild des abgetrennten Gebietes in der w-Ebene, die ja hiedurch mitgeteilt ist, betrachten.

11. Zum Schlusse dieses Abschnittes erwähne ich noch, daß jede abgeschlossene Menge M, die die Berandung eines einfach zusammenhängenden — möglicherweise den Punkt ∞ enthaltenden — Gebietes G darstellt, Häufungsbereich eines Punktes bei der konformen Abbildung eines einfach zusammenhängenden schlichten Bereiches auf den Einheitskreis sein kann [Primende in der Bezeichnungsweise von Carathéodory, Randelement in der von Koebe], wie umgekehrt die oben angegebene Eigenschaft jedem solchen Häufungsbereiche zukommt. Die Menge der Hauptpunkte ist dabei eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge, die folgende notwendige und hinreichende Eigenschaft besitzt: Sie ist mit dem Querschnitt Q Begrenzung eines durch Q bestimmten Teilgebietes von G.[1]) Ich verzichte darauf, die gedanklich einfachen Beweise dieser Sätze hier ganz ausführlich darzustellen. Es sei nur folgendes angeführt: Die Werte, die $f(w)$ für $|w-P|<\frac{1}{2^k}$ im Einheitskreise annimmt, mache ich abgeschlossen. Das einfach zusammenhängende Gebiet, das durch diese abgeschlossene Menge bestimmt wird, in dem $f(0)$ liegt, bezeichne ich mit G_k. Die Vereinigungsmenge der G_k ist dann jene einfach zusammenhängende Menge G, deren Berandung der Häufungsbereich des Punktes P ist. Daß die Menge der Hauptpunkte ein Kontinuum ist, hat schon Carathéodory bewiesen. Es sei $\overline{T_k}$ das Gebiet des Einheitskreises für das $|w-P|<\rho_k<\frac{1}{2^k}$. ρ_k wähle ich so, daß der Querschnitt Q_k, der dem Kreisstück $|w-P|=\rho_k$ in der z-Ebene entspricht, eine Länge $<\frac{1}{2^k}$ besitzt. Dies ist stets möglich, wie wieder aus der Ungleichung

$$\left(\iint|f'(w)|\,\rho\,d\rho\,d\varphi\right)^2\leq\iint|f'(w)|^2\,\rho\,d\rho\,d\varphi\cdot\iint\rho\,d\rho\,d\varphi$$

folgt. Die Q_k besitzen offenkundig eine in der Menge der Hauptpunkte enthaltene Häufungsmenge. Ich betrachte nun die Gebiete R_k, die den Bereichen des Einheitskreises: $\rho_{k+1}<|w-P|<\rho_k$ in der z-Ebene entsprechen. Ich gebe mir sodann eine gegen Null kon-

[1]) Siehe diesbezüglich auch Caratheodory, a. a. O., Satz XIX, wobei aber zu beachten ist, daß das G dort nicht mit dem G hier übereinstimmt.

vergierende Folge von Zahlen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ vor. Zu jedem ε_n läßt sich ein k_n bestimmen, so daß, wenn ich aus R_k, $k > k_n$ alle Punkte weglasse, deren Abstand von der Menge der Hauptpunkte $> \varepsilon_n$ ist, die Restmenge Q_k und Q_{k+1} als Begrenzungsteile eines zusammenhängenden Gebietes besitzt. Sonst würde es ja in jedem R_k einen Q_k und Q_{k+1} trennenden Querschnitt geben, dessen Entfernung von der Menge der Hauptpunkte $\geq \varepsilon_n$ ist und dessen Länge mit $\frac{1}{k}$ gegen Null geht — ich kann ja diese Querschnitte auf der Berandung des Gebietes annehmen, das aus allen Punkten besteht, deren Abstand von der Menge der Hauptpunkte $< \varepsilon_n$ ist. Das lineare Maß dieser Berandung $\mathfrak{B}$ ist aber endlich, wie man unschwer nachweist[1] —. Die Häufungsmenge dieser Querschnitte müßte aber auch jeder Weg der z-Ebene approximieren, dessen Bild in der w-Ebene gegen P geht, da dieser Weg ja alle diese Querschnitte von einem bestimmten an durchsetzen müßte. Ich bezeichne jetzt mit R_k^* $(k_n < k \leq k_{n+1})$ jenes zusammenhängende Gebiet, das ich aus R_k durch Weglassung aller Punkte erhalte, deren Abstand von der Menge der Hauptpunkte $> \varepsilon_n$ ist, das Q_k und Q_{k+1} in seiner Berandung enthält. Jeder Weg, der in der w-Ebene gegen P geht und dessen Bild in der z-Ebene ganz in dem aus den R_k^* und den Q_k gebildeten Gebiet verläuft, besitzt als Häufungsbereich genau die Menge der Hauptpunkte — daher ist diese ein Kontinuum. Ich wähle nun zwei solche Wege, die von einem Punkte des Einheitskreises ausgehen und sonst keinen Punkt gemein haben. Das Bild des von diesen beiden Wegen eingeschlossenen Gebietes des Einheitskreises der w-Ebene in der z-Ebene ist ein Gebiet, dessen Berandung außer von dem aus den Bildern dieser beiden Wege bestehenden Querschnitte aus der Menge der Hauptpunkte besteht.

Die Umkehrung ist leicht konstruktiv erwiesen. Wir legen, was wir nach unseren Voraussetzungen tun können, in G **einen Weg W, der genau N approximiert.**[2] Diesen Jordanweg $z = \varphi(t)$ umkleiden wir durch die von demselben Punkt $t = 0$ ausgehenden, in G liegenden rektifizierbaren Jordankurven $z = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ mit einem Streifen, wobei wir darauf achten, daß $|\varphi(t) - \psi(t)|$ und $|\chi(t) - \varphi(t)|$ mit $1 - t$ gegen Null gehen und daß $|\chi(t) - \psi(t)|$ für $0 < t < 1$ von Null verschieden ist. Ersichtlich ist dann N ein, und zwar nur aus Hauptpunkten bestehendes Primende des zwischen den Kurven $z = \psi(t)$ und $z = \chi(t)$ liegenden Gebietes S. Zu S fügen wir dann die Punkte von $G - S$ hinzu,

[1] Man ersetze die Kreise um die Punkte von N mit dem Radius ε_n durch ihnen eingeschriebene Quadrate, deren Seiten parallel der x- und y-Achse sind. Die Berandung $\mathfrak{B}^*$ der so erhaltenen Menge ist endlich, da sie mit jeder Parallelen zur x- bezw. y-Achse nur endlich viel Punkte bezw. Strecken gemein hat. Nun ist $\mathfrak{B} < \sqrt{2}\,\mathfrak{B}^*$.

[2] Die Möglichkeit eines solchen Jordanweges ist ersichtlich ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingung für die Menge der Hauptpunkte.

deren Abstand von $M < \frac{1}{2^{2k}}, > \frac{1}{2^{2k+1}}$ ist, wobei wir durch endlich viele rektifizierbare Querschnitte in der Menge dieser Punkte Σ_k den einfachen Zusammenhang wiederherstellen und durch Einschnitte es erreichen, daß die einzelnen Stücke σ der Berandung von S, die auf diese Art dem Gebiete S zugefügt werden, eine Länge $< \frac{1}{2^k}$ besitzen. Das einfach zusammenhängende Gebiet, das wir so nach Durchführung dieses Verfahrens für jedes k erhalten, bezeichnen wir mit $\overline{S}$. Die Berandung von $\overline{S}$ wird von einem rektifizierbaren Querschnitt von G gebildet. Sei Q_k ein System von Querschnitten von S, so daß Q_k die Querschnitte Q_{k-1} und Q_{k+1} trennt und daß alle Punkte von Q_k eine Entfernung von $M < \frac{1}{2^{2k-1}}, > \frac{1}{2^k}$ besitzen, so ist dies auch ein System von Querschnitten von $\overline{S}$. Nach der Theorie von Carathéodory und Koebe ist leicht zu zeigen, daß durch die Q_k ein Primende von $\overline{S}$ bestimmt wird, das durch die Menge M gebildet wird. Von vornherein ist klar, daß die Menge der Hauptpunkte dieses Primendes in N enthalten ist. Bezeichnet T_k bezw. $\overline{T_k}$ die durch Q_k bestimmten Gebiete von S bezw. $\overline{S}$ und besitzt ein Punkt von N von allen Q_k und Q_{k+n} verbindenden Wegen von $T_k - T_{k+n}$ einen Abstand, der höchstens gleich $\rho_{k,n}$ ist, so besitzt derselbe Punkt von allen solchen Wegen in $\overline{T}_k - \overline{T}_{k+n}$ infolge unserer Annahme über die σ einen Abstand $\overline{\rho}_{k,n} < \rho_{k,n} + \frac{1}{2^k}$. Da $\lim\limits_{n=\infty} \rho_{k,n} = 0$, so folgt, daß jeder Punkt von N Hauptpunkt des durch M gebildeten Primendes von $\overline{S}$ ist.

V. Der Konvergenzbereich. Verallgemeinerung des Picardschen Theorems. Ein Zerlegungssatz.

1. Der Konvergenzbereich eines Punktes kann leer sein, so der des Punktes 1 bezüglich $p\left(\frac{1}{1-w}\right)$, so der jedes Punktes des Einheitskreises bezüglich der Grenzkreisuniformisierenden jeder zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche von endlichem Geschlecht. Die Funktionen $\sin\left(\frac{1}{(1-w)^3}\right)$, $e^{\frac{1}{(1-w)^3}}$, $e^{e^{\frac{1}{(1-w)^3}}}$ besitzen für den Punkt 1 als Konvergenzbereich den Punkt ∞ bezw. die Punkte $0, \infty$; $0, 1, \infty$. Ist $F(w)$ die von Sire angegebene Funktion, so ist $F\left(\frac{1}{(1-w)^3}\right)$ eine Funktion, bezüglich der der Konvergenzbereich des Punktes 1 die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

2. Es gilt nun folgender Satz, der eine bedeutsame Verallgemeinerung des Picardschen Theorems darstellt:

Münden in einen Punkt P zwei von P_0 ausgehende Jordanwege W_1 und W_2 ein, die sonst keinen Punkt gemein haben, und ist $f(w)$ eine in dem durch W_1 und W_2 bestimmten Gebiete G, sowie auf W_1 und W_2 mit Ausnahme von P eindeutige meromorphe Funktion, die längs W_1 und W_2 gegen zwei verschiedene Werte konvergiert, so nimmt $f(w)$ in G jeden Wert, mit Ausnahme von höchstens zwei unendlich oft an.

Wir definieren Wertebereich und Häufungsbereich eines Punktes für ein Gebiet, ob dies in der schlichten Ebene oder auf einer Riemannschen Fläche liegt, wie oben für den Einheitskreis. Wir nehmen nun zuerst an, der Punkt P besitze bezüglich der Funktion $z = f(w)$ für das Gebiet G einen Wertebereich $\mathfrak{W}$, der ein Gebiet Γ der z-Ebene unbedeckt läßt; also nimmt $f(w)$ jeden Wert dieses Gebietes in G höchstens endlich oft an.

Der einfache Grundgedanke des folgenden Beweises ist der: Ich grenze mir durch einen mit Hilfe der Riemannschen Fläche über der z-Ebene konstruierten, stückweise analytischen Querschnitt des Gebietes G, dessen Endpunkte mit P zusammenfallen, einen einfach zusammenhängenden Teilbereich ab, bei dessen Abbildung auf den Einheitskreis dem Querschnitt γ nur ein Teilbogen von γ entspräche, im Widerspruch zu einem sehr bekannten Schwarzschen Satze.

Wir können, indem wir möglicherweise w einer linearen Transformation unterwerfen, annehmen, daß der Bereich G in der w-Ebene beschränkt sei. Ferner können wir es so einrichten, daß der Weg $W_1 + W_2$ durch keinen der höchstens abzählbar vielen Punkte der w-Ebene geht, denen auf der Riemannschen Fläche der Funktion $f(w)$ Verzweigungspunkte entsprechen. Die Werte a und b können wir beide als endlich voraussetzen. Es sei nun ρ so gewählt, daß für $|w - P| < \rho$ auf W_1, bezw. W_2 $|z - a|$, bezw. $|z - b| < \sigma$. Sind hiebei P_1 und P_2 auf dem Kreise $|w - P| = \rho$ so gewählt, daß für W_1 zwischen P und P_1, für W_2 zwischen P und P_2 $|w - P| < \rho$, so läßt sich $\rho_1 \neq 0$ so bestimmen, daß für $W_1 + W_2$ zwischen P_1 und P_2 $|w - P| > \rho_1$. Bezeichnen wir diesen letzten Teil mit $\overline{W}$. Da $\overline{W}$ im Regularitätsgebiete der Funktion $f(w)$ liegt, so läßt sich zu jedem seiner Punkte p ein $\rho_p < \frac{\rho_1}{3}$ bestimmen, so daß für $|w - p| < \rho_p$ $f(w)$ regulär ist. Die diesem Funktionselement entsprechende Umkehrungsfunktion $w = \varphi(z)$ ist dann für $|z - f(w_p)| < \sigma_p$ regulär. Die σ_p haben nun für $\overline{W}$ eine von Null verschiedene untere Grenze $\overline{\sigma}$. Ist daher für einen Querschnitt des dem Gebiete G entsprechenden Teiles der $f(w)$ zugehörigen Riemannschen Fläche $|z - \pi| = \sigma_0 \leq \frac{\overline{\sigma}}{3}$ und endet der entsprechende Querschnitt des Gebietes G in der w-Ebene in einem Punkte p von $\overline{W}$, so liegt der Querschnitt von G ganz in der Umgebung $|w - w_p| < \rho_p$ des Punktes p, daher ist für ihn sicher $|w - P| > 2\frac{\rho_1}{3}$.

Es sei dann Q ein Punkt des Häufungsbereiches H des Punktes P in bezug auf das Gebiet G, der entweder im Gebiete Γ oder auf dessen Berandung liegt — $\mathfrak{W}$ kann leer sein, dann besteht Γ aus der ganzen Ebene — und von a und b verschieden ist. Das σ der vorhergehenden Betrachtung wählen wir nun $< \frac{|a - Q|}{3}$ und $< \frac{|b - Q|}{3}$.[1] Wir schlagen dann um Q einen Kreis mit dem Radius σ_1, wobei $\sigma_1 < \sigma$, $< \frac{\sigma}{3}$ so gewählt ist, daß der Kreis Γ durchsetzt und durch die Projektion keines der höchstens abzählbar vielen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche für $z = f(w)$ geht. Die Punkte des dem Gebiete G entsprechenden Teiles T dieser Fläche, für die $|z - Q| = \sigma$, bilden teils geschlossene Wege, teils Querschnitte. Und zwar können nur endlich viel geschlossene Wege auftreten, denn die Projektion eines solchen geschlossenen Weges wäre der Vollkreis; diesem gehört auch ein Punkt von Γ an, über den daher nur endlich viele Punkte der Riemannschen Fläche T liegen. Da T einfach zusammenhängend ist, ist der eine der beiden durch einen solchen geschlossenen Weg bestimmten Teile von T nur von diesem Weg begrenzt und es entspricht ihm ein einfach zusammenhängendes, ganz in G gelegenes Gebiet. Für alle diese Gebiete ist $|w - P| > \rho_2 \neq 0$. Auf unserem Kreise muß es nun Punkte geben, über denen Punkte von T liegen, für die $|w - P| < \rho_2$, $< \frac{\rho_1}{3}$, da sowohl innerhalb als außerhalb des Kreises Punkte des Häufungsbereiches H liegen, der Häufungsbereich aber als Durchschnitt der Kontinua erhalten wird, die entstehen, wenn man den Wertebereich abgeschlossen macht, der dem Teile $|w - P| < \frac{1}{n}$ von G entspricht, auf dessen Berandung P liegt. Die zusammenhängende Menge der Riemannschen Fläche, für die $|z - Q| = \sigma$ und die einen Punkt enthält, für den $|w - P| < \rho_2$, $< \frac{\rho_1}{3}$, ist ein Querschnitt q. Der entsprechende Querschnitt der w-Ebene hat seine Endpunkte in P; denn auf $\overline{W}$ kann er keinen Endpunkt haben, da sonst nach unserer früheren Betrachtung für ihn $|w - P| > \frac{2\rho_1}{3}$ sein müßte, aber auch nicht auf $W_1 + W_2 - \overline{W}$, denn da müßte entweder $|z - a|$ oder $|z - b| < \sigma$ sein, während für die Projektion unseres Querschnittes beide Größen $> \sigma$ sind.

---

[1]) Wir können stets einen Punkt Q finden, der von a und b verschieden ist, da H ein Kontinuum ist, in dem a und b enthalten sind.

Es sei nun $\overline{T}$ jener Teil der Riemannschen Fläche T, der zwar von q, nicht aber von $W_1 + W_2$ begrenzt wird. Es wird dann das Bildgebiet von $\overline{T}$ in der w-Ebene $\overline{T}^*$ von dem Bilde von q zusammen mit dem Punkte P begrenzt. Bilde ich die einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\overline{T}$ auf den Einheitskreis der Ebene ab, so wird, wie ich gleich zeigen werde, dem Rande q nur ein Bogen $\varkappa$ des Einheitskreises entsprechen, der kleiner als 2π ist. Dadurch ist aber auch gleichzeitig eine konforme Abbildung des Gebietes $\overline{T}^*$ auf den Einheitskreis geliefert: $w = \chi(\zeta)$. Jedem Einschnitte des Einheitskreises, der in dem zu $\varkappa$ komplementären Bogen $\overline{\varkappa}$ endet, müßte dabei ein Einschnitt von $\overline{T}^*$ entsprechen, der in P endet, d. h., wenn ζ auf irgend einem Wege gegen einen Punkt von $\overline{\varkappa}$ konvergiert, müßte w gegen den Wert w_P gehen. Das ist aber nach einem bekannten Schwarzschen Satze unmöglich. Damit sind wir aber zu einem Widerspruch gekommen, so daß die Voraussetzung, W bedecke ein Gebiet Γ nicht, unrichtig ist.

Um zu zeigen, daß der Bogen $\varkappa$ des Einheitskreises kleiner als 2π ist, gehen wir so vor.[1]) Wir bilden eine Riemannsche Fläche $\overline{\overline{T}}$ über der z-Ebene, die zu $\overline{T}$ bezüglich des Kreises $|z - Q| = \sigma$ spiegelbildlich ist. Wir können uns dies etwa so denken, daß wir $\overline{T}$ mit abzählbar vielen kreisförmigen Umgebungen — die entweder schlicht sind oder Stücke von Windungsflächen, deren Begrenzung sich als Kreis mit dem Windungspunkt als Mittelpunkt projiziert — überdecken, zu jeder dieser Umgebungen die spiegelbildliche bezüglich des Kreises aufsuchen und diese dann entsprechend zusammenfügen. Diese Fläche $\overline{\overline{T}}$ wird nun auch von q begrenzt — man erkennt dies einfach, wenn man $\overline{T}$ über q ein Stück fortsetzt und zur modifizierten Fläche die spiegelbildliche sucht[2]) —, und zwar so, daß einem Einschnitte von $\overline{T}$, der in einem Punkte von q endet, durch die Spiegelung ein Einschnitt von $\overline{\overline{T}}$ entspricht, der in demselben Punkte von q endet. Wir können $\overline{T}$ und $\overline{\overline{T}}$ längs q zu einer ersichtlich einfach zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{T}$ vereinen. $\mathfrak{T}$ läßt sich nicht auf die punktierte Ebene abbilden, denn dem Kreise, auf dem q liegt, gehört ja auch ein Bogen an, der ganz in Γ liegt, über dessen Punkten nur endlich viel Punkte von $\overline{T}$ und daher auch von $\mathfrak{T}$ liegen, da ja auch q den Kreis nur endlich oft bedecken kann. Daher läßt sich $\mathfrak{T}$ auf den Einheitskreis abbilden. Der spiegelbildlichen Zuordnung der Punkte von $\overline{T}$ und $\overline{\overline{T}}$ entspricht eine lineare Transformation zweiter Art dieses Einheitskreises in sich, d. h. eine Spiegelung an einem zum Einheitskreise orthogonalen Kreise K, dessen Punkte dabei invariant bleiben und daher dem

[1]) Vgl. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konf. Abb. Crelle 145, S. 207.

[2]) Man sagt, eine Riemannsche Fläche werde von einer Kurve begrenzt, wenn sie auf einer anderen Riemannschen Fläche liegt und auf dieser von der Kurve berandet wird.

Querschnitt q von $\mathfrak{T}$ entsprechen muß. Hiebei entspricht dem einen Kreiszweieck die Riemannsche Fläche $\overline{T}$ und wenn wir dieses Zweieck auf den Einheitskreis abbilden, so haben wir hiemit eine konforme Abbildung von $\overline{T}$ auf den Einheitskreis, wobei ersichtlich dem Querschnitt q ein Bogen entspricht, der kleiner als 2π ist.

Den Fall, daß der Wertebereich W drei Punkte c, d, e nicht enthält, führen wir auf den eben besprochenen Fall so zurück: $f(w)$ nimmt in G die Werte c, d, e nur endlich oft an, daher kann ich einen von P ausgehenden und in P endenden Jordan-Querschnitt W^* finden, daß keiner dieser Punkte weder auf W^*, noch in dem durch W bestimmten endlichen Gebiete G^* der w-Ebene liegt und daß obendrein, wenn w längs W^* geht, $f(w)$ in der einen Richtung gegen a, in der anderen Richtung gegen b konvergiert. Es sei nun $\zeta = m(\xi)$ die Uniformisierungstranszendente, die die zu der in den Punkten c, d, e punktierten ξ-Ebene gehörige universelle, unverzweigte Überlagerungsfläche auf den Einheitskreis der ζ-Ebene abbildet. Dann ist $\zeta = m(f(w))$ in G^* eindeutig und meromorph, sobald ich einem bestimmten Punkte w einen Wert ζ der Funktion $m(f(w))$ zugeordnet habe. Nun ist $m(\xi)$ als Funktion von ξ stetig in dem Sinne, daß, falls ξ längs eines bestimmten Weges gegen einen bestimmten Wert konvergiert, und sei es auch gegen einen der Werte c, d, e, dann auch $m(\xi)$ längs dieses Weges gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Dabei konvergiert $m(\xi)$ gegen zwei verschiedene Werte, wenn ξ gegen zwei verschiedene Werte geht. Daher gelten für $m(f(w))$ die Voraussetzungen, die wir soeben für unmöglich erkannten, denn der Wertebereich von P in bezug auf $m(f(w))$ wäre auf eine Punktmenge im Einheitskreise beschränkt.

3. Damit ist also unser Satz in seiner Gänze bewiesen. Er ist übrigens in gewisser Hinsicht ein Spezialfall folgenden Satzes: *Ist W ein geschlossener Jordanweg durch den Punkt P, $f(w)$ eine in dem durch W bestimmten Gebiete G sowie auf W mit Ausnahme des Punktes P überall meromorphe eindeutige Funktion, und gehört irgend ein Punkt eines der durch den Häufungsbereich des Weges W im Punkte P bestimmten Gebiete g dem Häufungsbereich von G im Punkte P bezüglich $f(w)$ an, so nimmt $f(w)$ jeden Wert von g mit Ausnahme von höchstens zweien in G unendlich oft an*, d. h. der Wertebereich von P umfaßt alle Punkte mit Ausnahme von höchstens zwei.

Besteht z. B. W aus den Halbstrahlen $\mathfrak{R}(w) = a$, bezw. $= b$, $\mathfrak{J}(w) > 0$[1]), verbunden durch das Stück der reellen Achse zwischen a und b, so ist der Häufungsbereich von W im Punkte ∞ bezüglich e^w gebildet durch die beiden Kreise $|z| = e^a$, $|z| = e^b$ und e^w nimmt in dem durch W bestimmten konvexen Gebiete jeden Wert des durch die beiden Kreise bestimmten Kreisringes unendlich oft an.

[1]) $\mathfrak{R}(w)$ und $\mathfrak{J}(w)$ bezeichnen den Real- bezw. Imaginärteil von w.

Der Beweis dieses Satzes verläuft genau so wie oben. Wir weisen wieder mit Hilfe der zu $f(w)$ bezw. $m(f(w))$ gehörigen Riemannschen Fläche nach, daß es im gegenteiligen Falle einen von P ausgehenden, im endenden Querschnitt des Gebietes G, so daß bei der konformen Abbildung des von diesem Querschnitt bestimmten Gebietes auf den Einheitskreis dem Querschnitte nur ein Teilbogen des Einheitskreises entspräche und dies ist nicht möglich. An Stelle der beiden Punkte a und b tritt der Häufungsbereich α des Weges W. Wir wählen daher P_1 und P_2 rechts und links von P auf W so, daß für alle Werte von w auf W zwischen P_1 und P, sowie zwischen P und P_2 die entsprechenden Werte $z = f(w)$ von α um weniger als σ entfernt sind, wobei wir σ kleiner annehmen als $\frac{1}{3} N$. Hiebei ist N der Abstand eines Punktes Q von α, der dem Häufungsbereich des Punktes P für das Gebiet G angehört und in g im Innern oder auf der Berandung eines Gebietes Γ liegt, von dem wir voraussetzen, daß keiner seiner Punkte dem Wertebereich von P für G angehört.

Nimmt $f(w)$ die Werte c, d, e in g im Gebiete G nur endlich oft an, so können wir zuerst wieder den Weg W so abändern zu W^*, daß α ebenfalls der Häufungsbereich von W^* im Punkte P ist und daß $f(w)$ auf W^* und in dem durch W^* bestimmten Gebiete G^* die Werte c, d, e überhaupt nicht annimmt. Verbinde ich c, d, e innerhalb g durch einen Weg, so kann ich, da dieser Weg von α einen Abstand größer Null hat, die Punkte P_1^* und P_2^* auf W^* so wählen, daß der W^* zwischen P_1^* und P, bezw. P und P_2^* entsprechende Weg in der z-Ebene mit jenem Weg nichts gemein hat. Daher verläuft der durch $\zeta = m(f(w))$ dem Wege W^* entsprechende Weg vollkommen in einem passend bestimmten Fundamentalbereich der Umkehrungsfunktion $z = M(\zeta)$ von $\zeta = m(z)$, in dem daher auch der W^* im Punkte P entsprechende Häufungsbereich β der ζ-Ebene liegt. Dem einfach zusammenhängenden Gebiete g entspricht hiebei das durch β bestimmte Gebiet der ζ-Ebene $\overline{g}$, das den Punkt ∞ enthält; $\overline{g}$ enthält den Rand des Einheitskreises in seinem Innern. Da Q in g dem Häufungsbereich von G im Punkte P angehört und da W^* so gewählt werden kann, daß G^* denselben Häufungsbereich besitzt wie G, so kann ich in G^* eine gegen P konvergierende Folge von Punkten, $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, wählen, deren entsprechende Punkte in der z-Ebene in g liegen und gegen Q konvergieren. Die entsprechenden Punkte der ζ-Ebene liegen alle in $\overline{g}$ und besitzen mindestens einen Häufungspunkt, der ersichtlich nicht auf β, daher also in $\overline{g}$ liegt und damit sind alle Grundlagen gewonnen, um so wie früher weiterzuschließen.

4. Zerfällt daher der Häufungsbereich von W im Punkte P in zwei teilerfremde Teile H_1, H_2, — die dem Teile von W einerseits und anderseits von P entsprechen —, so nimmt $f(w)$ jeden Wert des durch diese beiden Konti-

nua bestimmten Gebietes g mit Ausnahme von höchstens zwei in G unendlich oft an; denn der Häufungsbereich von G ist ein die beiden erwähnten Kontinua enthaltendes Kontinuum und enthält daher auch sicher Punkte von g.

Wenn H_1 in einen Punkt entartet, so wird auch dieser Wert unendlich oft angenommen, falls das von H_2 bestimmte Gebiet, das H_1 enthält, schon zwei Ausnahmswerte besitzt; denn wäre dies auch Ausnahmswert, so würde bei der Abbildung des modifizierten Gebietes G^* durch $\zeta = m\big(f(w)\big)$ H_1 in einen Punkt des Einheitskreises übergehen, während H_2 einer Menge $\overline{H}_2$ entsprechen möchte, die ganz im Innern eines entsprechenden Fundamentalbereiches der Umkehrungsfunktion von $\zeta = m(z)$ liegt und daher vom Einheitskreis eine endliche Entfernung besitzt.

Wird auch H_2 zu einem Punkte, so haben wir den zuerst behandelten Fall.

5. Als Beispiel führe ich noch folgendes an: Es sei $f(w) = e^{e^w}$, W sei die imaginäre Achse, P der unendlich ferne Punkt, G jener Teil der w-Ebene, für den der Realteil positiv ist. Dann ist der Häufungsbereich von W im Punkte ∞ gegeben durch die Kurve

$$z = e^{\cos\varphi + i\sin\varphi}\;(0 \leq \varphi < 2\pi)$$

und $f(w)$ nimmt in G alle außerhalb dieser Kurve gelegenen Werte unendlich oft an mit Ausnahme der Werte 0 und ∞, übrigens auch alle innerhalb und auf dieser Kurve gelegenen Werte.

6. Im Hinblick auf dieses Beispiel sei übrigens noch folgende Verschärfung obiger Sätze bewiesen: Wenn $f(w)$ in G zwei Werte von g ausläßt (bezw. endlich oft annimmt), die übrigen hingegen unendlich oft annimmt, so nimmt sie überhaupt jeden Wert, mit Ausnahme jener zwei, in G unendlich oft an.

Wir können die beiden ausgelassenen Punkte a und b in g durch einen Weg V verbinden. Wir modifizieren dann W so, daß die Häufungsbereiche von W^* und des von W^* bestimmten Gebietes in P dieselben sind wie die von W und G und daß $f(w)$ die Werte a, b in G^* und auf W^* überhaupt nicht annimmt. Gibt es dann noch einen Wert c außer g, z. B. auf dem Rande von g, dann bilde ich die zu der in a, b, c punktierten Ebene gehörige universelle Überlagerungsfläche auf den Einheitskreis der ζ-Ebene konform ab durch $z = M(\zeta)$. Auf W^* bestimme ich nun zwei Punkte P_1 und P_2 beiderseits von P, so daß die Werte, die $f(w)$ auf W^* zwischen P_1 und P bezw. zwischen P und P_2 annimmt, von V einen von Null verschiedenen Abstand besitzen. Dies ist möglich, da V in g liegt. Ich betrachte dann $\zeta = m\big(f(w)\big)$, wo m die Umkehrungsfunktion von M ist. Hiebei lege ich den entsprechenden Zweig dadurch fest, daß wir einem Punkte von W den entsprechenden Punkt in einem bestimmten Fundamentalbereich der ζ-Ebene bezüglich $M(\zeta)$ zuordnen. Gehört der Punkt π_1, der dem Punkte P_1 entspricht, einem bestimmten Fundamentalbereich an — zu dessen Herstellung denken wir uns die z-Ebene zwischen a und b sowie zwischen b und c zerschnitten —, so liegen die den Punkten von W^* zwischen P_1 und P entsprechenden Punkte sämtlich in der Gruppe von Fundamentalbereichen, die denselben Punkt γ_1 als dem Punkt c entsprechenden Punkt auf dem Einheitskreis liegen haben wie der Fundamentalbereich, in dem π_1 liegt. Dieser Teil des Bildes von W^* hat als einzigen Punkt auf dem Einheitskreis, von dem er möglicherweise die Entfernung Null besitzt, den Punkt γ_1. Ebenso ergibt sich ein Punkt γ_2 für den Teil von W^* zwischen P und P_2. Daher kann der Häufungsbereich von W^* bezüglich $\zeta = m\big(f(w)\big)$ mit dem Einheitskreis höchstens die Punkte γ_1 und γ_2 gemein haben.

Wir wählen sodann in G^* eine gegen P konvergierende Punktfolge, deren entsprechende Punkte in der z-Ebene gegen a gehen. Die entsprechenden Punkte in der ζ-Ebene haben ihre Häufungsmenge auf dem Einheitskreis. Diese Häufungsmenge gehört dem Häufungsbereich von G^* bezüglich $\zeta = m\big(f(w)\big)$ an. Enthält sie daher einen von γ_1 und γ_2 — die auch gleich sein können — verschiedenen Punkt, so sind wir damit nach unseren früheren Schlüssen zu einem Widerspruch gekommen.

Im anderen Falle, wenn γ_1 Häufungspunkt unserer Punktmenge $\mathfrak{M}$ und von W^* ist,[1]) werfen wir durch eine lineare Transformation des Einheitskreises in der oberen ζ-Halbebene den Punkt γ_1 ins Unendliche. Dann liegt für das Bild von W^* zwischen P_1 und P — wenn $\gamma_1 = \gamma_2$, auch für das Bild von W^* zwischen P_2 und P — da diese Teile von W^* von dem Wege V endliche Entfernung besitzen, der Imaginärteil von ζ über einer bestimmten, von Null verschiedenen Größe ρ_1 und infolgedessen für das ganze Bild von W^*, das außerhalb eines genügend großen Kreises $|\zeta| = \rho$ liegt, der das Bild des übrigen Teiles von W^* enthält. Es gäbe nun Punkten dieser Punktmenge $\mathfrak{M}$ entsprechende Punkte außerhalb dieses Kreises, die, da $\mathfrak{M}$ gegen a konvergiert, beliebig nahe an der reellen Achse liegen müßten. Die Projektion der zu $\zeta = m\big(f(w)\big)$ in G^* gehörenden Riemannschen Fläche über der ζ-Ebene, besitzt daher außerhalb des Kreises $|\zeta| = 2\rho$ liegende Teile, die zwischen dem Bilde von W^* und der reellen Achse liegen, und zwar von dieser um weniger als ρ entfernt. Ihre Grenzpunkte gegen die reelle Achse zu gehören dem Häufungsbereich von G^* an, nehmen wir nämlich auf der Riemannschen Fläche eine Folge von Punkten, deren Projektionen gegen einen solchen Grenzpunkt konvergiert, so konvergieren die entsprechenden Punkte in der w-Ebene gegen P, da sie gegen keinen inneren Punkt (infolge der Gebietsstetigkeit), aber auch gegen keinen sonstigen Punkt von W^* konvergieren können.

[1]) Ist letzteres nicht der Fall, sind wir auch schon fertig.

Damit sind wir nach dem früher Gesagten wieder zu einem Widerspruch gekommen.[1])

7. Von den Folgerungen will ich nur dies anführen:

Wenn eine im Einheitskreis meromorphe Funktion im Einheitskreis in der Umgebung eines Randpunktes P mindestens drei Werte nicht annimmt, so kann $f(w)$ auf den in P endenden Einschnitten des Einheitskreises höchstens gegen einen Wert konvergieren, d. h., der Konvergenzbereich von P ist leer oder besteht aus einem Punkt.

Nimmt eine in dem von der Jordankurve W begrenzten Gebiete G und auf W mit Ausnahme von P überall meromorphe Funktion die Werte keines Gebietes unendlich oft an, d. h. besitzt der Wertebereich des Punktes P für das Gebiet G keinen inneren Punkt, so ist der Häufungsbereich des Punktes P für das Gebiet G gleich dem Häufungsbereich des Weges W im Punkte P.

8. Der eingangs bewiesene Satz weist auf eine gewisse Analogie des Verhaltens der eindeutigen, nur in einem Punkte wesentlich singulären Funktionen mit dem jener in G eindeutigen meromorphen Funktionen hin, die, wenn man längs der im Regularitätsgebiete verlaufenden Wege W_1 und W_2 gegen den Randpunkt P geht, gegen zwei verschiedene Werte konvergieren, wobei G ein einfach zusammenhängendes, von W_1 und W_2 begrenztes Gebiet ist. In dieser Hinsicht sei auch auf die schönen Sätze von Phragmen und E. Lindelöf[2]) hingewiesen. In Verbindung damit sei folgender Zerlegungssatz angeführt:

Es sei P ein singulärer Punkt der Funktion $f(w)$. Gibt es dann zwei rektifizierbare Jordanwege W_1, W_2, die beide von P ausgehen und in P enden und keinen weiteren Punkt miteinander gemein haben, liegt

[1]) All diese Sätze gelten übrigens auch in entsprechender Fassung, wenn die Werte c, d, e nicht Ausnahmswerte sind, sondern solche Werte, daß die über ihnen liegenden Stellen — von endlich vielen abgesehen — Windungsstellen von einer Ordnung sind, die durch m_c, m_d, m_e teilbar ist, wobei $\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_e}<1$. Hiebei rechnen wir eine Stelle, über nur endlich viel Stellen der Fläche liegen, gleich einer Windungsstelle von der Ordnung ∞. Nennen wir eine solche Fläche ausnahmsverzweigt in c, d, e, so können wir sagen, daß die zu $f(w)$ gehörige Riemannsche Fläche nicht in drei Punkten c, d, e des Gebietes g ausnahmsverzweigt sein kann und falls sie in zwei Punkten c, d in der oben angegebenen Art verzweigt ist, überdeckt sie die ganze Ebene, ohne in bezug auf c, d und einen weiteren Punkt e ausnahmsverzweigt zu sein, unendlich oft. Vorausgesetzt, daß in g ein Punkt des Häufungsbereiches von G liegt.

[2]) Phragmen, Sur une extension d'une theoreme classique de la theorie des fonctions. Acta math., Bd. 28, S. 351 ff. 1904.

Phragmen et Lindelöf, Sur une extension d'une principe classique de l'Analyse. Acta math., Bd. 31, S. 381 ff. 1908.

ferner das von den beiden Wegen eingeschlossene Gebiet G ganz im endlichen, ist weiters ein Zweig von $f(w)$ in G und auf W_1 und W_2 regulär und geht $f(w)(w-P)$ mit $(w-P)$ in G gleichmäßig gegen Null, ist obendrein $f(w)$ über W_1 und W_2 absolut integrabel, so haben wir

$$f(w)=f_1(w)+f_2(w),$$

wobei ein Zweig von $f_1(w)$ in dem G enthaltenden Innengebiet G_1 von W_1, ein Zweig von $f_2(w)$ in dem G enthaltenden Außengebiet G_2 von W_2 holomorph ist.

Denn dann gilt für jeden Wert von G für den betrachteten Zweig von $f(w)$

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W_1-W_2}\frac{f(\xi)}{\xi-w}\,d\xi.$$

Setze ich

$$f_1(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W_1}\frac{f(\xi)}{\xi-w}\,d\xi,\quad f_2(w)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W_2}\frac{f(\xi)}{\xi-w}\,d\xi,$$

so habe ich bereits die gewünschte Zerlegung.

Ist der betreffende Zweig von $f(w)$ in dem ganzen durch W_1 umschlossenen Gebiete eindeutig und meromorph, so ist $f_2(w)$ eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion, die als einzigen wesentlich singulären Punkt höchstens den Punkt P besitzt.

$f_1(w)$ übernimmt in gewissem Sinne die Sonderheiten des einen durch das Bild von W_1 abgegrenzten Teiles der Riemannschen Fläche von $f(w)$, $f_2(w)$ die des einen durch das Bild von W_2 bestimmten Teiles. In diesem Bezug können wir weiter sagen: Enthalten die beiden an P reichenden Zipfel von G je das Stück eines von Null verschiedenen Flächenwinkels mit dem Scheitel in P, für das $|w-P|<\rho$, so bleibt $f_1(w)(w-P)$ in G_1, $f_2(w)(w-P)$ in G_2 beschränkt. Seien etwa die vier Strahlen der beiden Flächenwinkel gegeben durch $0<\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4<2\pi$, wobei φ_1, φ_2 den einen, φ_3, φ_4 den anderen Winkel bestimmen. Es läßt sich dann zu dem Winkel $\varphi_1'\,\varphi_4'$ $[\varphi_1<\varphi_1'<\varphi_2,\ \varphi_3<\varphi_4'<\varphi_4]$ eine Größe $\rho_1<\rho$ und eine Größe $\delta_1\neq 0$ bestimmen, so daß für alle Punkte des Winkels, für die $|w-P|<\rho_1$, die Entfernung vom Weg $W_1>\delta_1\,|w-P|$ ist. Daher ist für diese Punkte

$$|f_1(w)|<\frac{1}{2\pi}\int\frac{|f(\xi)|\,|d\xi|}{|\xi-w|}<\frac{1}{2\pi\delta_1}\cdot\frac{1}{|w-P|}\int|f(\xi)|\,|d\xi|<\frac{\mathfrak{M}_1}{|w-P|}.$$

Für die Punkte von G, die außerhalb jenes Winkels liegen, ist, wenn $|w-P|<\rho$, die Entfernung vom Wege $W_2>\delta_2\,|w-P|$, wobei ρ_2 und $\delta_2 \neq 0$ passend bestimmte Größen sind. Daraus folgt für diese Punkte

$$|f_2(w)| < \frac{\mathfrak{M}_2}{|w-P|}.$$

Nun ist in diesen Punkten

$$|f_1(w)| < |f(w)| + |f_2(w)| < \frac{\varepsilon}{|w-P|} + \frac{\mathfrak{M}_2}{|w-P|}$$

und daher ist für alle Punkte von G_1 $f_1(w)(w-P)$ gleichmäßig beschränkt, denn $f_1(w)$ ist ja auf W_1 selbst, mit Ausnahme des Punktes P, als Differenz zweier dort regulärer Funktionen $f(w)$ und $f_2(w)$ regulär. Ebenso verläuft der Beweis für $f_2(w)(w-P)$ in G_2.

Ist daher $f(w)$ in G_1 eindeutig und meromorph, so kann man daher nach der Zerlegungsformel $f(w) = f_1(w) + f_2(w)$ das Wachstum von $f(w)$ in der Umgebung von P in G_1 nach dem Wachstum der den Punkt P als einzigen singulären Punkt besitzenden Funktion $f_2(w)$ in P beurteilen, denn in G_1 bleibt $f_1(w)(w-P)$, außerhalb $f_2(w)(w-P)$ beschränkt.

VI. Verallgemeinerungen eines Schwarzschen Lemmas. Folgerungen.

1. Koebe[1]) hat folgende Verallgemeinerung eines bekannten Schwarzschen Satzes gegeben:

Es sei $F(z)$ eine oberhalb der Achse des Reellen längs eines Stückes $[a, b]$ derselben regulär erklärte analytische Funktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben mögen und für die es möglich ist, in beliebiger Nähe der Achse des Reellen längs des ganzen Stückes $[a, b]$ immer noch eine Linie λ anzugeben, auf der sich die Funktionswerte von einer von λ unabhängigen Konstanten gleichmäßig um eine beliebig kleine Größe unterscheiden. Alsdann ist die Funktion eine Konstante.

Besonders elegant ist sein Beweis in der schon öfter angeführten Arbeit Crelle 145. Diesen Satz können wir nun so erweitern:

Es sei $F(z)$ eine oberhalb der Achse des Reellen längs eines Stückes $[a, b]$ derselben im Gebiete G erklärte eindeutige meromorphe Funktion, die drei Werte ausläßt; gibt es dann eine Folge von Linien λ_n in G, die gegen $[a, b]$ in seiner ganzen Ausdehnung konvergieren, so daß die Funktionswerte auf λ_n sich von einer Konstanten k_n um Funktionen ε_n unter-

[1]) Koebe, Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Gött. Nachr. 1913. S. 286.

scheiden, deren absoluter Betrag mit $\frac{1}{n}$ gleichmäßig gegen Null geht, bezw. ihrem absoluten Betrage nach über g_n liegen, wobei g_n mit n gegen Unendlich geht, dann ist $f(w)$ eine Konstante.

Sind c, d, e die drei ausgelassenen Werte, so bilde ich wieder die universelle Überlagerungsfläche, die zu der in c, d, e punktierten z-Ebene gehört, mittels $\zeta = m(z)$ auf den Einheitskreis der ζ-Ebene ab. $\zeta = m\left(f(w)\right)$ ist dann in dem einfach zusammenhängend vorausgesetzten Gebiete G eindeutig, sobald einem bestimmten w-Wert ein bestimmter Wert von ζ zugeordnet ist, und regulär. Die Werte von $m\left(f(w)\right)$ auf λ_n unterscheiden sich dann von einer Konstanten $\varkappa_n$ um weniger als η_n, wobei $|\varkappa_n| < 1$ und η_n mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht. Ich kann daher eine Folge von n wählen, so daß die $\varkappa_n$ gegen einen bestimmten Wert $\varkappa$ konvergieren und auf diesen λ_{n_i} unterscheiden sich dann die Werte von $m\left(f(w)\right)$ von $\varkappa$ um weniger als $\bar{\eta}_{n_i}$, wobei $|\bar{\eta}_{n_i}|$ mit $\frac{1}{n_i}$ gleichmäßig gegen Null geht. Daher muß nach dem vorigen $\left(f(w)\right)$ und infolgedessen $f(w)$ eine Konstante sein.

Denselben Schluß können wir natürlich ziehen, wenn der dem Gebiete G entsprechende Teil der zu $z = f(w)$ gehörigen Riemannschen Fläche über der z-Ebene ausnahmsverzweigt ist;[1]) der Beweis erfolgt dann mit Hilfe der Schwarzschen Dreiecksfunktionen. Die Verallgemeinerung, die sich aus diesen Sätzen ergibt, indem man die Strecke $[a, b]$ durch das Stück einer analytischen Linie oder einer Jordankurve ersetzt, ist unmittelbar klar.

2. Eine unmittelbare Folge des eben bewiesenen Satzes ist folgendes:

Bedeckt eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche über der z-Ebene drei Punkte derselben nur endlich oft, bezw. ist sie ausnahmsverzweigt und konvergiert die Projektion eines Einschnittes gegen einen Punkt, so wird, wenn $z = f(w)$ die Fläche auf den Einheitskreis der w-Ebene abbildet, der dem Einschnitt entsprechende Weg gegen einen Punkt des Einheitskreises konvergieren.

Ferner:

Entspricht bei der Abbildung des einen der durch einen Querschnitt bestimmten Teile einer solchen Riemannschen Fläche auf den Einheitskreis

[1]) Siehe die Fußnote S. 33.

dem Querschnitt der ganze Kreis, mit Ausnahme eines Punktes, so ist bei der Abbildung der Riemannschen Fläche auf den Einheitskreis das Bild des Querschnittes ein Querschnitt des Einheitskreises, der beiderseits gegen denselben Punkt des Einheitskreises konvergiert.

3. Diese beiden Sätze entsprechen den Sätzen 1 und 2 der Koebeschen Abhandlung, Crelle 145. Auch Satz 3 läßt sich nach den Betrachtungen des vorigen Abschnittes verallgemeinern.

Der Konvergenzbereich eines Punktes des Einheitskreises bezüglich der Grenzkreisuniformisierenden $z = \varphi(w)$ unserer eben betrachteten Riemannschen Flächen besteht höchstens aus einem Punkte. Konvergiert $\varphi(w)$ auf zwei in P endenden Einschnitten des Einheitskreises, so konvergiert $\varphi(w)$ auf jeden zwischen diesen beiden Einschnitten verlaufenden, in P endenden Einschnitt gegen denselben Wert, und zwar gleichmäßig.

4. Satz 4 ist für die Grenzkreisuniformisierenden der von uns jetzt betrachteten Art Riemannscher Flächen im allgemeinen nicht mehr wahr. Das zeigt schon das Beispiel der Schwarzschen Dreiecksfunktion mit den Exponenten $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, die die Abbildung eines Kreisdreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ auf die obere Halbebene vermittelt. Ist der Einheitskreis zu den drei Kreisen des Dreiecks orthogonal, so konvergiert die Funktion auf keinem Einschnitt des Einheitskreises. Dafür treten aber folgende zwei Sätze, deren erster von Fatou[1]) herrührt:

Läßt die Riemannsche Fläche ein Kontinuum der z-Ebene unbedeckt, so konvergiert die Uniformisierende $z = \varphi(w)$ in den Punkten des Einheitskreises fast überall, und zwar für jeden in einem solchen Punkt endenden Einschnitt des Einheitskreises, der diesen — im weiteren Sinne — nicht berührt.

Besitzt eine unserer oben betrachteten Riemannschen Flächen einen Ausnahmswert, so liegen die Punkte, zu denen es Einschnitte des Einheitskreises gibt, längs deren die Grenzkreisuniformisierende $z = \varphi(w)$ konvergiert, auf dem Einheitskreise überall dicht. Dieser Satz läßt sich natürlich, wie der Fatousche Satz, auf Funktionen ausdehnen, die auf der einen Seite einer analytischen Linie definiert sind.

[1]) Fatou, Sur les lignes singuliers des fonctions analytiques. Bull. de la société math. de France 1914.

Es werde z. B. der Wert ∞ von der Riemannschen Fläche nur endlich oft bedeckt. Es sei ferner $\alpha\beta$ ein Bogen des Einheitskreises, auf dem kein Punkt existiert, so daß längs eines in diesem Punkte endenden Einschnittes $\varphi(w)$ gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Ist nun γ ein innerer Punkt des Bogens $\alpha\beta$, so muß die Funktion $\varphi(w)$ in jeder Umgebung des Punktes γ im Einheitskreise jedem Wert beliebig nahe kommen. Da die Punkte im Einheitskreise, in denen $\varphi(w)$ den Wert unendlich annimmt, nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, kann ich durch einen Jordanquerschnitt, der beiderseits gegen einen Punkt konvergiert, den Einheitskreis so in zwei Teile zerlegen, daß die Begrenzung des einen Teiles den Bogen $\alpha\beta$ enthält und daß im Innern dieses Teiles keiner jener endlich vielen Pole von $\varphi(w)$ liegt. In diesem Teile T wähle ich nun eine gegen γ konvergierende Folge von Punkten $\pi_1, \pi_2, \ldots$, für die die entsprechenden z-Punkte $P_1, P_2, \ldots$ gegen unendlich konvergieren. Gehe ich von P_i gegen unendlich in der Richtung des Radiusvektors, so erhalte ich einen Einschnitt der dem Teile T des Einheitskreises entsprechenden Riemannschen Fläche, da ja der Punkt ∞ von ihr nicht überdeckt wird. Diesem Einschnitt entspricht ein Einschnitt E_i von T, der von π_i ausgeht und in einen Punkt der Berandung von T, außer $\alpha\beta$, endet (nach der Verallgemeinerung des ersten der Koebeschen Sätze). Aus den E_i kann ich daher eine Folge herausgreifen, die den Bogen $\alpha\gamma$ (oder $\gamma\beta$) approximiert, und da auf den E_i $\varphi(w)$ mit i gegen ∞ geht (denn $|\pi_i|$ ist die untere Grenze der absoluten Beträge), so widerspricht dies der obigen Verallgemeinerung des Schwarzschen Satzes.

5. Eine weitere Verallgemeinerung des Schwarzschen Satzes besteht im folgenden:

Ist $F(w)$ eine oberhalb der Achse des Reellen längs der Strecke $[a, b]$ meromorphe Funktion, die ein Kontinuum von Werten ausläßt, und sind die Punkte von $F(w)$, mit Ausnahme einer Nullmenge N, so beschaffen, daß $F(w)$ längs jedes in einen solchen Punkt endenden Weges, der die Achse des Reellen — im weiteren Sinne — nicht berührt,[1]) gegen Null geht, so ist $F(w)$ identisch Null.

Gibt es einen inneren Punkt der Strecke ab, in dessen Umgebung die Funktion beschränkt ist, so schlagen wir um diesen Punkt einen Halbkreis, der ganz in jener Umgebung liegt, und bilden dann das von diesem Halbkreis und der Achse des Reellen begrenzte Gebiet auf den Einheitskreis der ξ-Ebene ab, und zwar so, daß der Achse des Reellen die Werte $0 \leq \varphi \leq \pi$ entsprechen. Es sei dann $\psi(\xi)$ die Funktion, die durch Übertragung der Funktion $F(w)$ in die ξ-Ebene entsteht. Sie ist im Einheitskreis be-

---

[1]) D. h. $\underline{\lim} \dfrac{J(w-c)}{|w-c|} \neq 0$ für die Punkte von W, wenn W in dem Punkte c der reellen Achse endet.

schränkt. Die Funktion $\Psi(\xi) = \psi(\xi)\,\psi(-\xi)$ ist dann ebenfalls im Einheitskreis beschränkt und so beschaffen, daß sie, wenn ξ längs eines Radius gegen den Rand des Einheitskreises strebt, fast überall gegen Null geht. Nun ist für einen Punkt $\xi : |\xi| < \rho < 1$

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Psi(\rho e^{i\varphi})\, i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi}{\rho e^{i\varphi} - \xi},$$

wobei ich ρ durch jeden größeren Wert < 1 ersetzen kann; daher

$$2\pi\,\Psi(\xi) = \lim_{\rho=1}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Psi(\rho e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{\rho e^{i\varphi} - \xi} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\lim \Psi(\rho e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{e^{i\varphi} - \xi} = 0,$$

da ich infolge der Beschränktheit von Ψ Integral und Grenzübergang vertauschen kann. Daher ist auch $\psi(\xi)$ und infolgedessen $F(w)$ identisch Null.

Den allgemeinen Fall führen wir darauf zurück, indem wir aus dem Kontinuum, das von der Funktion $F(w)$ nicht angenommen wird, ein Teilkontinuum M herausgreifen, das den Punkt Null nicht enthält und das in der z-Ebene ein einziges Gebiet bestimmt. Dieses enthält ersichtlich den Punkt Null. Wir bilden es mittels $\zeta = k(z)$ auf den Einheitskreis der ζ-Ebene so ab, daß dem Punkte $z = 0$ der Punkt $\zeta = 0$ entspricht. Für die Funktion $k\big(F(w)\big)$ gilt dann die frühere Annahme.

Aus dem Beweise ergibt sich unmittelbar, daß es genügt, zu fordern, daß $F(w)$ auf den Wegen, die die reelle Achse senkrecht schneiden, fast überall gegen Null geht.

6. Unser Satz gibt eine Ergänzung des oben erwähnten Fatouschen Satzes. Dieser besagt: Wenn eine meromorphe Funktion, die längs einer Seite eines Stückes einer analytischen Linie erklärt ist, daselbst ein Kontinuum von Werten ausläßt, so konvergiert die Funktion in fast allen Punkten der analytischen Linie für jeden Weg, der die analytische Linie nicht berührt. Unser Satz gibt den Zusatz: Hiebei kann die Menge der Punkte, für die es (eventuell auch berührende) Wege gibt, längs deren die Funktion gegen ein und denselben Wert A konvergiert, in keinem Teile der analytischen Linie von der Länge l das Maß l besitzen.

Denn, gibt es einen Weg, der in P endet und längs dessen unsere Funktion gegen A konvergiert, so kann nach den Sätzen des V. Abschnittes auf keinem in P endenden Weg $F(w)$ gegen einen anderen Wert konvergieren. Transformieren wir die w-Ebene so, daß die analytische Linie in die reelle Achse übergeht und das anschließende Gebiet in der oberen Halbebene liegt, so erfüllt die übertragene Funktion $\Phi(w)$ nach dem Fatouschen Satze die Voraussetzungen der oben gegebenen Verallgemeinerung des Schwarzschen Satzes.

7. Vorstehendes Ergebnis ist nur eine kleine Teilantwort auf die Frage nach der Menge der Punkte, zu deren Konvergenzbereich ein bestimmter Wert gehört. Wir können uns leicht Funktionen konstruieren, für die ein bestimmter Wert zu dem Konvergenzbereich von nur endlich vielen Punkten bezw. von einer abzählbaren Punktmenge gehört. Machen wir z. B. in die im Nullpunkte punktierte Ebene n-Einschnitte, die keinen Punkt gemein haben, so liefert die Abbildung auf den Einheitskreis eine analytische Funktion, für die die Null nur zum Konvergenzbereich von n Stellen des Einheitskreises gehört. Machen wir abzählbar viele Einschnitte, die mit dem Tangentenwinkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{n}, \ldots$ gegenüber der positiven reellen Achse in den Nullpunkt münden und deren Länge mit $\frac{1}{n}$ gegen Null geht, so gehört dann die Null gerade zum Konvergenzbereich einer abgeschlossenen Menge abzählbar vieler Punkte des Einheitskreises, die einen Häufungspunkt besitzen. Schon Fatou[1]) hat ein Beispiel einer Funktion gegeben, für die die Null zum Konvergenzbereich einer perfekten, nirgends dichten Menge des Einheitskreises gehört. Ein solches Beispiel erhalten wir auch auf folgende Art: Wir beseitigen auf dem Radiusvektor $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$ (p, q teilerfremd; $0 < \varphi < 2\pi$) die Punkte $0 \leq r \leq \frac{1}{q}$. Bei der konformen Abbildung des übrigbleibenden Gebietes auf den Einheitskreis entsprechen den Strecken $\left(\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi, 0 < r \leq \frac{1}{q}\right)$ eine abzählbare Menge von Intervallen des Einheitskreises. Die perfekte, nirgends dichte Menge, die auf dem Einheitskreis durch diese Intervalle bestimmt wird, ist dann genau die Menge der Punkte, für die die Null Konvergenzwert ist. Machen wir in den vorhergehenden Beispielen die Einschnitte derart, daß sie in keinem Teil analytisch sind, so haben die entsprechenden Funktionen den Einheitskreis zur natürlichen Grenze. Die Umkehrungsfunktion der elliptischen Modulfunktion liefert uns das Beispiel einer Funktion, bei der die Null Konvergenzwert ist für eine abzählbare, überall dichte Menge des Einheitskreises. Wir geben weiter unten das Beispiel einer Funktion, bei der die Null Konvergenzwert ist für eine überall dichte Menge erster Kategorie, die durch die Vereinigung von abzählbar vielen perfekten, nirgends dichten Mengen vom Maße Null entsteht, doch wird dort die Null noch Konvergenzwert für Punkte außerhalb dieser Menge sein.

[1]) Fatou, a. a. O.

8. Über das Maß der Punkte, zu deren Konvergenzbereich ein bestimmter Wert gehört, gibt uns folgender Satz einen teilweisen Aufschluß:

Wenn eine einfach zusammenhängende Fläche die Umgebung des Nullpunktes höchstens n-mal bedeckt, so besitzt bei der Abbildung der Fläche auf den Einheitskreis die Menge der Punkte, für die die Null Konvergenzwert (Hauptpunkt) ist, das Maß Null.

Ich betrachte die Menge der Punkte der Riemannschen Fläche, für die $|z| = \rho$. Diese verteilen sich auf abzählbar viele Querschnitte bezw. geschlossene Wege der Fläche. Ihnen entsprechen durch $z = \varphi(w)$ im Einheitskreis Querschnitte, deren jeder nach dem Satze auf Seite 36 beiderseits gegen bestimmte Punkte des Einheitskreises konvergiert — diese Punkte besitzen die Null nicht zum Konvergenzwert — bezw. geschlossene Wege, deren Anzahl höchstens n beträgt. Wenn ich mit ρ gegen Null gehe, so konvergieren die geschlossenen Wege gegen die ν Punkte $w_1, \ldots w_\nu$ $(\nu = w)$, für die $\varphi(w)$ verschwindet, während die Querschnitte gegen den Einheitskreis konvergieren, d. h. wie klein ich ε wähle, so kann ich ρ so bestimmen, daß für die Punkte des Einheitskreises, für die $|\varphi(w)| \leq \rho$, eine der Ungleichungen gilt

$$|w - w_i| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots \nu), \qquad 1 - |w| < \varepsilon.$$

Wenn ich nun die Abbildung so normiere, daß keiner der Werte w_i mit dem Nullpunkt zusammenfällt, so kann ich ε so klein wählen, daß der Nullpunkt außerhalb der durch die vorstehenden Ungleichungen bestimmten Gebiete liegt. Ist nun G_ϱ das Gebiet des Einheitskreises, das durch die Querschnitte und jene geschlossenen Wege bestimmt ist, in dem der Nullpunkt liegt, so ist in diesem Gebiete $|\varphi(w)| > \rho$ und die Punkte des Einheitskreises Γ_ϱ, die der Berandung von G_ϱ angehören, können daher den Nullpunkt nicht als Konvergenzwert für $\varphi(w)$ besitzen. Die Menge Γ_ϱ wird nun aus dem Einheitskreis durch einen Teil obiger Querschnitte ausgeschnitten.

Die untere Unbestimmtheitsgrenze der Länge der gesamten Querschnitte für $\rho = 0$ ist Null. Bezeichne ich sie nämlich mit g, so habe ich, falls $\psi(z)$ die Umkehrungsfunktion von $\varphi(w)$ ist,

$$\iint\limits_{|z| \leq \varrho} |\psi'(z)|^2 \rho\, d\rho\, d\varphi \cdot \iint\limits_{|z| \leq \varrho} \rho\, d\rho\, d\varphi \geq \Big(\iint\limits_{|z| \leq \varrho} |\psi'(z)|\, \rho\, d\rho\, d\varphi\Big)^2 > g^2 \rho^2.$$

Nun ist $\iint\limits_{|z| \leq \varrho} \rho\, d\rho\, d\varphi \leq n \rho^2 \pi$ und $\iint\limits_{|z| \leq \varrho} |\psi'(z)|^2 \rho\, d\rho\, d\varphi$ geht mit ρ gegen Null. Daher kann ich eine Folge von ρ so wählen, daß für diese Folge die Länge der Querschnitte l_ϱ mit ρ gegen Null geht. Das Maß der Γ_ϱ für diese Folge ist nun

$$> 2\pi - \frac{\pi}{2} l_\varrho$$

und da die Punkte von Γ_ϱ den Wert Null nicht als Hauptpunkt bezüglich $\varphi(w)$ besitzen, so folgt, daß das Maß der Punkte, für die die Null Konvergenzwert bezw. Hauptpunkt bezüglich $\varphi(w)$ ist, gleich Null ist.

Es sei bemerkt, daß die Riemannsche Fläche Teile der Umgebung des Nullpunktes unendlich oft überdecken kann, falls nur die Beziehung gilt

$$\iint\limits_{|z| \leq \varrho} \rho\, d\rho\, d\varphi \leq k \rho^2,$$

wobei k eine Konstante und das Integral über jene Teile der Riemannschen Fläche erstreckt wird, für die $|z| \leq \rho$.

VII. Ausnahmsweisverzweigte Riemannsche Flächen. Beispiele.

1. Wir haben bisher als ausnahmsverzweigte Flächen jene bezeichnet, für die es drei Stellen c, d, e gibt, daß die über ihnen liegenden Stellen — von endlich vielen abgesehen — Windungsstellen von Ordnungen sind, die um eins vermehrt durch m_c, m_d, m_e teilbar sind, wobei $\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_e} < 1$. Hiebei rechnen wir eine Stelle, über der nur endlich viel Stellen der Fläche liegen, gleich einer Windungsstelle von der Ordnung ∞, also von einer Ordnung, die durch jedes m teilbar ist. Wir erweitern jetzt die Definition, indem wir auch alle Flächen als **ausnahmsverzweigt** bezeichnen, falls es vier bezw. fünf Stellen gibt c, d, e, f bezw. c, d, e, f, g, daß die über ihnen liegenden Stellen — von endlich vielen abgesehen — Windungsstellen von Ordnungen sind, die um eins vermehrt durch m_c, m_d, m_e, m_f bezw. m_c, m_d, m_e, m_f, m_g teilbar sind, wobei $\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_f} < 2$ bezw. $\frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_f} + \frac{1}{m_g} < 3$. Es kommen hiebei folgende Fälle in Betracht, die nicht schon unter der früheren Definition enthalten sind:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$n \geq 2.$$

Die Stelle der Schwarzschen Dreiecksfunktionen nehmen dann Funktionen ein, die wir auf folgende Art erhalten: Wir bilden uns reguläre, einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, deren Stellen, die über c, d, e, f bezw. c, d, e, f, g liegen, Windungsstellen von der Ordnung m_c, m_d, m_e, m_f bezw. m_c, m_d, m_e, m_f, m_g sind. Die Abbildung dieser Flächen erfolgt, wie aus der zugehörigen Substitutionsgruppe erhellt, auf den Einheitskreis. Wir haben uns nur von der Möglichkeit so verzweigter, einfach zusammenhängender regulärer Riemannscher Flächen zu überzeugen; da es hiebei auf die spezielle Lage der Punkte c, d, e, f, g nicht ankommt, so gehen wir so vor, daß wir ein Viereck bezw. ein Fünfeck, dessen Seiten von Kreisbögen gebildet werden, die auf zum Einheitskreis orthogonalen Kreisen liegen und deren Winkel $\frac{\pi}{m_c}, \frac{\pi}{m_d}, \frac{\pi}{m_e}, \frac{\pi}{m_f}$ bezw. $\frac{\pi}{m_c}, \frac{\pi}{m_d}, \frac{\pi}{m_e}, \frac{\pi}{m_f}, \frac{\pi}{m_g}$ sind — solche Vierecke bezw. Fünfecke innerhalb des Einheitskreises lassen sich infolge der Ungleichungen $\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_f}<2$ bezw. $\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_f}+\frac{1}{m_g}<3$ stets herstellen — auf die obere Halbebene der z-Ebene abbilden. Die zu $z=\Phi(w)$ gehörige Riemannsche Fläche über der z-Ebene ist regulär, einfach zusammenhängend und besitzt die gewünschte Verzweigung in den über den vier bezw. fünf Ecken des Kreisvielecks entsprechenden Stellen.

Man kann übrigens auch noch anders vorgehen. Nehmen wir z. B. ein Dreieck a, b, c her, dessen Seiten auf zum Einheitskreis orthogonalen Kreisen liegen und dessen Winkel eine Summe gleich $\frac{2\pi}{n}$ bilden. Wir betrachten nun die Nichteuklidischen Drehungen (Transformationen des Einheitskreises in sich) um 180^0 um die Nichteuklidischen Mittelpunkte der Seiten $(a, b), (b, c), (c, a)$. Ordnen wir die bei der Drehung zur Deckung gelangenden Punkte der Seiten einander zu, so können wir das Dreieck als geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte Null auffassen, auf der also eine einwertige Funktion $z=\Phi(w)$ existiert. Die dieser Funktion entsprechende reguläre Riemannsche Fläche über der z-Ebene ist einfach zusammenhängend und hat den Verzweigungstypus

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right).$$

2. Mit Hilfe der so konstruierten Funktionen bezw. ihrer Umkehrung $w=\Psi(z)$ beweisen wir die unseren früheren Sätzen über ausnahmsverzweigte Flächen entsprechenden Sätze; denn auf einer einfach zusammenhängenden ausnahmsverzweigten Riemannschen Fläche, deren sämtliche über $c, d, e, f, (g)$ liegenden Stellen Windungsstellen von Ordnungen sind, die um eins vermehrt Vielfache von m_c, m_d, m_e,

m_f, (m_g) sind, wobei $\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_e}+\frac{1}{m_f}<2$ $\left(\frac{1}{m_c}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_e}+\right.$ $\left.+\frac{1}{m_f}+\frac{1}{m_g}<3\right)$, ist die zu den Exponenten m_c, m_d, m_e, m_f, (m_g) und den Punkten c, d, e, f, (g) gehörige Funktion $\Psi(z)$ eindeutig.

Daraus folgt einmal:

Die irgend einer Umgebung eines isoliert wesentlich singulären Punktes der Funktion $z=f(w)$ entsprechende Riemannsche Fläche über der z-Ebene kann nicht ausnahmsverzweigt sein.

Ist $z=f(w)$ zwischen und auf den beiden P und Q verbindenden Wegen W_1 und W_2, mit Ausnahme von P, meromorph und liegt in dem vom Häufungsbereich von W_1+W_2 bestimmten Bereiche g ein Punkt des Häufungsbereiches des von W_1 und W_2 umschlossenen Gebietes, so kann die Riemannsche Fläche über der z-Ebene nicht derart 3- (4-, 5-)punktig ausnahmsverzweigt sein, daß 2 (3, 4) Punkte der Ausnahmsverzweigung in g liegen.

Die Sätze von VI behalten bei der neuen Definition der Ausnahmsverzweigung ihre Gültigkeit.

3. Im folgenden will ich noch zwei Beispiele anführen, die in mehrerer Hinsicht ziemlich lehrreich sind und trotz ihrer Einfachheit vielleicht geeignet sind, uns auf Möglichkeiten, die früher von Painlevé und seiner Schule (Zoretti, Boutroux) zu wenig beachtet wurden, aufmerksam zu machen.

Wir denken uns aus der Ebene die Radien, Vektoren

$$\left(\varphi=\frac{p}{2}\cdot 2\pi,\ 0\leq r\leq\frac{1}{q};\ p,\ q \text{ teilerfremd},\ 0<\varphi<2\pi\right)$$

herausgenommen, die so hergerichtete Ebene in unendlich vielen Exemplaren hergestellt. Die Ebenen bezeichnen wir mit den Nummern 1, 2, 3, ... n, und ebenso geben wir jedem der abzählbar vielen Einschnitte einer Ebene eine Nummer 1, 2, ... n, ... und zwar so, daß in den verschiedenen Ebenen die einander deckenden Einschnitte dieselbe Nummer tragen. Ich verbinde nun Blatt 1, Einschnitt 1 mit Blatt 2, Einschnitt 1 kreuzweise, sodann (1, 2) mit (3, 2), sodann (1, 3) mit (4, 3), (2, 2) mit (5, 2), (3, 1) mit (6, 1), (1, 4) mit (7, 4), (2, 3) mit (8, 3), (4, 1) mit (9, 1) und so fort, indem ich die Einschnitte in der Reihenfolge (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) ... nehme und der Folge nach das erste (i, k) der Reihe, das noch nicht verbunden ist, mit dem ersten (j, k) der Reihe verbinde, das dasselbe k besitzt und noch nicht verbunden ist. Bei jedem Schritt erhalten wir eine einfach zusammenhängende Fläche und daher ist auch die reguläre Riemannsche Fläche, die wir durch diesen Prozeß erhalten, einfach zusammenhängend. Da sie ausnahmsverzweigt ist (vom Typus 2, 2, 2, 2, 2), läßt sie sich auf den Einheitskreis konform abbilden. Das Bild eines Blattes ist dann ein Fundamentalbereich. Einem der Einschnitte $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$, $0 \leq r \leq \frac{1}{q}$ entspricht ein Querschnitt des Einheitskreises $P_1 Q P_2$, wobei P_1, P_2 auf dem Einheitskreis liegen, während Q dem Punkte $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi\, r = \frac{1}{q}$ entspricht. Der Übergang von dem einen Blatt zu dem anderen Blatt, die längs dieses Einschnittes zusammenhängen, liefert uns eine nichteuklidische Drehung des Einheitskreises um den Punkt Q um 180^0, wobei $P_1 Q$ in $P_2 Q$ übergeht. P_1, P_2 und Q liegen daher auf einem zum Einheitskreis orthogonalen Kreis und P_1 ist von P_2 verschieden. Ersetze ich jeden der Querschnitte $P_1 Q P_2$ durch den Orthogonalkreis $P_1 Q P_2$, so erhalte ich wieder einen Fundamentalbereich F. Die Begrenzung dieses Fundamentalbereiches hat mit dem Einheitskreise eine perfekte, nirgends dichte Punktmenge M gemein. Wenn sich ein Punkt im Fundamentalbereich einem Punkte von M nähert, nähert sich der entsprechende Punkt z in der dem neuen Fundamentalbereich entsprechend aufgeschnittenen z-Ebene B dem Punkte 0. Mit Hilfe der Ungleichung

$$\left(\iint |\psi'(z)|\, \rho\, d\rho\, d\varphi\right)^2 \leq \iint |\psi'(z)|^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi \iint \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

wobei $\psi(z) = w$ die Abbildungsfunktion ist, die B auf den Fundamentalbereich F abbildet und die Doppelintegrale über die Punkte $|z| \leq \rho$ von B erstreckt sind, weisen wir wieder nach, daß M das Maß 0 besitzt. Wir brauchen nur zu beachten, daß die Projektion der Punktmenge der w-Ebene, die den Punkten $|z| = \rho$ in B entspricht, vom Nullpunkte aus auf den Einheitskreis M enthält, falls der Nullpunkt, was wir ja annehmen können, innerer Punkt des Fundamentalbereiches ist. An den Fundamentalbereich schließt sich längs jedes der begrenzenden Kreise ein neuer Fundamentalbereich, den man durch eine nichteuklidische Drehung um 180^0 um einen Punkt Q des Fundamentalbereiches erhält. Daraus erkennt man, daß die Funktion $f(w)$, die als einzigen Konvergenzwert den Wert 0 besitzt, diesen Wert in einer überall dichten Menge erster Kategorie vom Maße 0, die aus der Vereinigung von abzählbar vielen perfekten, nirgends dichten Mengen besteht, als Konvergenzwert besitzt, und zwar endet das Bild jedes Einschnittes der Riemannschen Fläche, der nur endlich viel Blätter B der Riemannschen Fläche durchsetzt, in einem Punkte dieser Menge. Es gibt aber auch noch andere Punkte des Einheitskreises, für die die 0 Konvergenzwert von $f(w)$ ist. Der entsprechende Einschnitt auf der Riemannschen Fläche muß dann natürlich unendlich viele Blätter B durchsetzen. Einen solchen Punkt erhalten wir folgendermaßen:

Wir nehmen eine Folge von Punkten Q_i an: $\varphi_i = \frac{p_i}{q_i} \cdot 2\pi$; $r_i = \frac{1}{q_i}$, bei der die φ_i und r_i gegen 0 gehen, und nehmen dann einen Einschnitt der Riemannschen Fläche, der gegen $z = 0$ konvergiert und dessen Projektion mit jedem der den Punkten Q_i entsprechenden Berandungen von B einen Punkt gemein hat und nur mit diesen. Das Bild dieses Weges liefert den gewünschten Punkt. Wir erhalten diesen Punkt auch als Grenzpunkt der ineinandergeschachtelten Kreisbögen, die von den zu den vom Bilde unseres Weges durchschnittenen Orthogonalkreisen der Einteilung des Einheitskreises in Fundamentalbereiche ausgeschnitten werden. Welches Maß besitzt nun die Menge der Punkte, zu denen die 0 als Konvergenzwert gehört?

4. Nehmen wir sodann von dem Gebiete $|z| < 1$ alle Strecken weg: $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$, $1 - \frac{1}{q} \leq r < 1$ (p, q teilerfremd, $0 < \varphi < 2\pi$), stellen wir uns dieses Gebiet in unendlich vielen Exemplaren her und bilden wir uns daraus in der beim vorigen Beispiel erläuterten Art eine reguläre, einfach zusammenhängende Fläche her, so können wir diese wieder auf den Einheitskreis abbilden. Den Fundamentalbereich können wir wieder von Orthogonalkreisen des Einheitskreises begrenzt denken. Die Berandung des Fundamentalbereiches hat mit der Peripherie des Einheitskreises eine perfekte, nirgends dichte Punktmenge gemein, die wahrscheinlich ein von 0 verschiedenes Maß besitzt. Jedenfalls konvergiert nach dem Fatouschen Satze die Abbildungsfunktion fast überall auf den Einheitskreis für jeden in einen Punkt mündenden Einschnitt des Einheitskreises, der den Einheitskreis — im weiteren Sinne — nicht berührt. Dieses Beispiel zeigt, wie eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche beschaffen sein kann, die einen Teil der Ebene nicht bedeckt, ohne daß sich ein in einer Ebene liegendes Stück der Riemannschen Fläche angeben ließe, das durch einen Querschnitt q bestimmt und dessen Begrenzung nur teilweise von q gebildet wird.[1])

Nachtrag: Nach vollständiger Fertigstellung vorliegender Arbeit wurde mir von Herrn G. Mittag-Leffler mitgeteilt, daß einige der von mir enthaltenen Resultate bereits in zwei während des Krieges erschienenen Arbeiten von Felix Iversen: Recherches sur les fonctions inverses des fonctions meromorphes, Thése Helsingfors 1914; Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier, Öfversigt af Finska Vetenskaps-

[1]) Ein solches Beispiel gibt übrigens auch Zoretti (a. a. O., S. 112). Den Einheitskreis aber als „coupure pour une branche" zu bezeichnen, halte ich nicht für zweckmäßig, ebensowenig die Bezeichnung der reellen Achse als singulärer Linie der Funktion im zweiten Beispiel.

Societens Förhandlinger. Bd. LVIII, Afd. A. No. 25, 1916, enthalten sind. Die mir durch die freundliche Güte des Herrn Mittag-Leffler ermöglichte Einsichtnahme in diese Arbeiten hat mir gezeigt, daß der Satz von II, 5 (Jeder Ausnahmswert ist Konvergenzwert), und der nach den Angaben dieser Arbeiten zuerst von E. Lindelöf aufgestellte Satz V, 2 (Verallgemeinerung des Picardschen Satzes), in diesen Arbeiten enthalten ist. Obendrein sei erwähnt, daß sich die Sätze V, 3, und V, 7, aus den Sätzen der Abschnitte 7 und 12 der zweiten Arbeit von Iversen ablesen lassen, hingegen nicht so ihre Ausdehnung auf ausnahmsverzweigte Flächen.

Die Ableitung des Satzes II, 2, und der Sätze von V ist übrigens von mir in einer von jenen Arbeiten ganz verschiedenen Art vorgenommen worden und es beruht die von mir gegebene Ableitung von V, 2 auf Mitteln der Potenzreihentheorie.