

Zur Theorie der $2n$ -fach periodischen Functionen.

(1. Abhandlung.)

Von Wilhelm Wirtinger in Wien.

Aus einer Mittheilung von Hermite¹⁾ ist bekannt, dass Riemann bereits 1860 im Besitze des Satzes war, dass zwischen den Perioden einer eindeutigen $2n$ -fach periodischen Function, die sich im Endlichen wie eine rationale verhält, bilineare Relationen bestehen, denen zufolge diese Functionen mit Hilfe von Theta-Reihen ausgedrückt werden können.

Herr Weierstrass hat dann in mehreren Publicationen (Monatsberichte der Berliner Akademie 1869, 1876, Crelle's Journal Bd. 89, 1880) die Theorie der allgemeinen $2n$ -fach periodischen Functionen behandelt, jedoch nirgends einen expliciten Beweis der dort aufgestellten grundlegenden Sätze veröffentlicht.

Den Satz über die Periodenrelationen hat in der Fassung, welche ihm Herr Weierstrass gegeben hat, gleichfalls ohne Beweis Herr Hurwitz im 94. Bd. des Crelle'schen Journals (1883) mitgetheilt.

Die Herren Poincaré und Picard²⁾ haben ferner auf Grund des Weierstrass'schen Satzes von der Existenz einer algebraischen Relation zwischen $n + 1$ solchen Functionen einen Beweis der Bilinearrelationen geliefert, der aber auf gewisse Ausnahmefälle nicht Rücksicht nimmt.

Laurent hat endlich in seinem *Traité d'analyse* einen — jedoch nicht völlig befriedigenden — Beweis für den Satz von der algebraischen Relation gegeben und darauf gestützt den Beweis der Herren Poincaré und Picard reproduciert.

In ganz anderer Richtung bewegt sich die Arbeit des Herrn Appell (*Journal de mathématique pure et appliquée*, Serie IV, tome 7, 1891). Sie bezieht sich zwar zunächst auf zwei Variable, lässt sich aber auf beliebig viele Variable übertragen. Sie beruht im Wesentlichen auf dem Satze des Herrn Poincaré (*Acta Mathematica*, Bd. 2), dass jede Function, die im endlichen überall

¹⁾ In der bekannten Übersicht über die Theorie der elliptischen Functionen im Anhang zur 6. Ausgabe des *Traité élémentaire des calcul diffé. et integr.* von Lacroix. Paris 1861. — Deutsch von Natani. 1863.

²⁾ *Comptes rendus de l'academie des sciences*, Paris 1883, tome 97, p. 1284.

den Charakter einer rationalen hat, als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen dargestellt werden kann, und ferner auf dem Nachweis, dass es genügend allgemein ist, Zähler und Nenner einer solchen $2n$ -fach periodischen Function als Jacobi'sche Functionen im Sinne des Herrn Frobenius (Crelle 97) anzusetzen.

Im Zusammenhang mit den citierten Arbeiten des Herrn Frobenius gelangt man so zu einem Beweis der Weierstrass'schen Sätze.

Im Folgenden sollen nun zunächst auf anderem Wege die grundlegenden Sätze der Theorie dieser Functionen im Zusammenhange entwickelt werden und die Riemann'schen und Weierstrass'schen Sätze, soweit sie sich auf Perioden und algebraische Relationen zwischen den Functionen beziehen, bewiesen werden. Dabei werden die letzteren noch insofern näher präcisirt, als die l. c. offengelassenen Ausnahmefälle näher erörtert werden. Auch werden über die Darstellung durch Thetafunctionen genauere Angaben gemacht.

Die Bilinearrelationen und die algebraische Relation werden gleichzeitig aus der Construction einer gewissen Riemann'schen Fläche hergeleitet, so dass der Beweis wenigstens nach den Andeutungen zu schließen, die Weierstrass (Crelle 89) gibt, von dem seinigen verschieden sein dürfte.

In einem folgenden Aufsatz gedenke ich eine Reihe hier anschließender Fragen, sowie gewisse Anzahlbestimmungen, welche Herr Poincaré aus speciellen Fällen hergeleitet hat, mit den Hilfsmitteln Riemann's zu behandeln.

Die Sätze über Periodensysteme, wie sie Riemann (Crelle, Bd. 71) und Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie 1876, wieder abgedruckt in den Abhandlungen zur Functionenlehre) gegeben hat, werden als bekannt vorausgesetzt.

§. 1.

Es werde vorausgesetzt, ein System von $2n^2$ complexen Größen $\omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1 \dots n, \beta = 1 \dots 2n$) sei so beschaffen, dass es wenigstens eine eindeutige analytische Function von n Variablen u_α gibt, für welche die $\omega_{\alpha\beta}$ ein System primitiver Perioden sind, welche im Unendlichen überall den Charakter einer rationalen hat und nicht eine Function von weniger als n linearen Verbindungen der u_α ist.

Dann folgt nach den Untersuchungen von Weierstrass zunächst, dass aus den $\omega_{\alpha\beta}$ sich keine unendlich kleine Periode zusammensetzen lassen darf.

Spaltet man die $\omega_{\alpha\beta}$ in ihren reellen und imaginären Theil

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{2\alpha-1,\beta} + i \eta_{2\alpha,\beta}$$

so folgt hieraus, dass die Determinate

$$|\eta_{\lambda,\beta}| \quad (\lambda, \beta = 1, \dots, 2n)$$

von Null verschieden ist.

Denn betrachten wir die $2n$ Ausdrücke

$$\sum_{\beta=1}^{2n} c_{\beta} \eta_{\mu\beta} = \varepsilon_{\mu},$$

wo die c_{β} ganze Zahlen bedeuten, so sind dieselben die reellen und imaginären Theile eines Systems von Simultan-Perioden $\sum c_{\beta} \omega_{\alpha\beta}$.

Würde nun die Determinante verschwinden, so würde zwischen den Größen ε_{μ} eine oder mehrere Relationen der Gestalt

$$\sum_{\mu=1}^{2n} M_{\mu} \varepsilon_{\mu} = 0$$

bestehen, wo die M_{μ} von den c_{β} unabhängige reelle Größen sind, und nicht sämmtlich verschwinden.

Man kann nun bekanntlich ¹⁾ die ganzen Zahlen c_{β} so wählen, dass $2n-1$ der Größen ε_{μ} absolut kleiner werden, als beliebig vorgegebene Größen. Daher müsste, wenn eine solche Relation bestünde, auch die $2n^{\text{te}}$ der Größen ε_{μ} unter jede Grenze sinken. Dann wären aber die $\varepsilon_{2\alpha-1} + i \varepsilon_{2\alpha}$ ein System unendlich kleiner Perioden, was durch die Voraussetzungen ausgeschlossen ist.

Ferner folgt hieraus, dass nicht alle Determinanten der Matrix $\|\omega_{\alpha\beta}\|$ verschwinden können.

Denn wenn man die Zeilen der Determinante $|\eta_{\lambda,\mu}|$ so anordnet, dass die ersten n Zeilen gerades λ , die letzten n ungerades λ haben, so erkennt man durch Addition der mit i multiplicierten ersten n Zeilen zu den letzten n , dass das Verschwinden aller Determinanten der Matrix $\|\omega_{\alpha\beta}\|$ auch das Verschwinden von $|\eta_{\lambda,\mu}|$ nach sich ziehen müsste.

¹⁾ Jacobi, Crelle 13. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen pag. 130.

§. 2.

Aus der Annahme einer Function der n Variablen $u_\alpha, f(u_\alpha)$ von der im §. 1 angeführten Beschaffenheit folgt nun zunächst die Existenz von weiteren $n-1$ Functionen der nämlichen Beschaffenheit, so dass die Functionaldeterminante derselben mit f nicht identisch verschwindet.

Solche Functionen können erhalten werden, wenn man die Argumente u_α ersetzt durch $u_\alpha + u_{i\alpha}$, wo die $u_{i\alpha}$ ein System von $n(n-1)$ geeigneten Constanten bilden. Seien

$$f_i(u_\alpha) = f(u_\alpha + u_{i\alpha}) \quad (i = 1 \dots n-1)$$

solche $n-1$ Functionen.¹⁾

Man kann dann jedenfalls $n-1$ Größen C_i so bestimmen, dass das Gleichungssystem

$$(1) \quad f_i(u_\alpha) = C_i$$

für bestimmte Werte der u_α etwa u'_α sicher befriedigt wird, und nicht sämtliche Determinanten der Matrix

$$\left\| \frac{\partial f_i(u_\alpha)}{\partial u_\alpha} \right\| \quad \begin{array}{l} i = 1 \dots n-1 \\ \alpha = 1 \dots n \end{array}$$

verschwinden.

Es sei die Bezeichnung so gewählt, dass die Determinante $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_\alpha} \right\|$ ($i, \alpha = 1 \dots n-1$) nicht Null sei.

Dann kann man nach einem bekannten Weierstrass'schen Satz die Größen $u_\alpha - u'_\alpha$ nach ganzen positiven Potenzen von $u_n - u'_n$ entwickeln, so dass auch die u_α die Gleichungen (1) befriedigen.

Man gewinnt so ein Element eines analytischen Gebildes erster Stufe. Von diesem Element ausgehend ermitteln wir sämtliche Fortsetzungen. Diese bilden in ihrer Gesamtheit ein analytisches Gebilde G erster Stufe ohne wesentliche Singularität im Endlichen. Denn nach der Voraussetzung sind die f_i in der Nähe jeder Stelle als Quotienten von Potenzreihen darstellbar. Nach einem Satz von Poincaré²⁾ können dann immer alle Lösungen eines solchen Systems von Gleichungen, welche zugleich dem Gebilde G angehören, in der Umgebung einer Stelle durch eine endliche Anzahl

¹⁾ Solche Functionen benützte bereits Riemann nach der Mittheilung Hermite's l. c. vgl. auch Weierstrass, Monatsberichte der Berliner Akademie von 1876.

²⁾ Thèse, sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Paris 1879. Lemma VI.

von nach ganzen positiven Potenzen eines Parameters fortschreitenden Reihen dargestellt werden.

Jedes dem Gebilde G angehörige Wertsystem der u_a befriedigt die Gleichungen (1). Es ist aber nicht das umgekehrte nothwendig. Die Gleichungen (1) können auch noch durch andere Gebilde als G befriedigt werden, ja es können sogar Gebilde höherer Stufe neben dem Gebilde G noch auftreten. Aber alle Elemente, welche nicht einem solchen Gebilde höherer Stufe ganz angehören, sind dann nur in endlicher Anzahl vorhanden. Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, dass ein oder mehrere solcher Gebilde k^{ter} Stufe bereits auch durch die Lösungen der ersten $n - k$ Gleichungen gegeben sein müssen. Indem man nun hieraus die u_a als algebroiden ¹⁾ Functionen von geeigneten k Parametern t_μ erhält, wird man in der Nähe der untersuchten Stelle auch solche Stellen finden, in deren Umgebung die verschiedenen Zweige der u_a getrennt sind, und daher durch einfache Potenzreihen dargestellt werden können.

Seien diese u_a^λ ($\lambda = 1 \dots m$), wo m den Grad der algebroiden Functionen u_a in der Nähe der untersuchten Stelle bedeutet.

Für einige Werte von λ können dann die u_a^λ die übrigen $k - 1$ Gleichung sämmtlich identisch befriedigen, oder nur einige unter ihnen, oder gar keine.

Diejenigen, welche nicht sämmtliche Gleichungen identisch befriedigen, liefern wieder die t_μ als algebroiden Functionen neuer Parameter t'_ν , deren Anzahl kleiner ist, als die der Parameter t_μ . Auf diesem Wege gelangt man dazu in dem Falle, wo mehrere Gebilde gleicher oder verschiedener Stufen, welche sämmtlich die Gleichungen $f_i = C_i$ befriedigen eine Stelle gemeinsam haben, in der Umgebung dieser Stelle die einzelnen Gebilde zu trennen und sieht, dass jede Stufe nur eine endliche Anzahl von Elementen der gleichen Stufe liefern kann. Es können daher unendlich viele Elemente einer und derselben Stufe nur so auftreten, dass unendlich viele derselben einem Gebilde einer höheren Stufe angehören, und nur eine endliche Anzahl einem Gebilde höherer Stufe nicht angehört.

§. 3.

Wir spalten nun die u_a in ihren reellen und imaginären Theil und setzen

$$u_a = v_{2a-1} + i v_{2a}.$$

¹⁾ Vgl. Poincaré, Thèses.

Da die Determinante $|\eta_{\lambda\mu}|$ von Null verschieden ist, so kann zu jedem Wertesystem der u_α ein und nur ein System von $2n$ reellen Zahlen m_β , so bestimmt werden, dass

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\beta=2n} m_\beta \omega_{\alpha\beta}$$

wird.

Zwei Wertesysteme der u_α , deren m_β sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, sollen äquivalent heißen.

Jedem Wertesystem der u_α ist dann ein anderes äquivalent, dessen m_β sämmtlich zwischen 0 und 1 liegen, wo man die obere oder die untere Grenze noch ausschließen kann. Die Wertesysteme

$$u_\alpha = \sum_{\beta} m_\beta \omega_{\alpha\beta}, \quad 0 \leq m_\beta < 1$$

heissen dann mit Riemann das periodisch sich wiederholende Gebiet der u_α .

Interpretiert man die $v_{2\alpha-1}, v_{2\alpha}$ als gewöhnliche orthogonale Coordinaten eines linearen Raumes von $2n$ -Dimensionen, so ist das periodisch sich wiederholende Gröszengebiet durch das Innere und einen Theil der Begrenzung eines Parallelotops P gegeben, dessen Volumen die Determinante $|\eta_{\lambda\mu}|$ angibt.

Im $2n$ -fach ausgedehnten Raum der v werden dann den Stellen des im vorigen §. definierten Gebildes G die Punkte einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, einer Fläche, entsprechen.

Ferner wird der ganze Raum in Parallelotope eingetheilt, so dass das Innere eines Parallelotops dem Innern jedes andern äquivalent ist.

Wir suchen nun zu allen Theilen des Gebildes, resp. der entsprechenden Fläche in den verschiedenen Parallelotopen, welche sie durchzieht, die äquivalenten innerhalb P .

Ich behaupte, es kann nur eine endliche Anzahl verschiedener solcher Flächentheile geben. In der That, nehmen wir auf jedem dieser Flächentheile einen Punkt mit seiner Umgebung an. Wären unendlich viele, so würden wir so unendlich viele Punkte erhalten, welche mindestens einen Häufungspunkt hätten. Es gäbe also dann auch in der Umgebung des Häufungspunktes unendlich viele verschiedene Elemente, die alle den Gleichungen $f_i = C_i$ genügen würden.

Dies ist unmöglich, denn entweder liegt der Häufungspunkt nicht auf einem Gebilde höherer Stufe, welches die Gleichungen $f_i = C_i$ befriedigt, dann ist der angenommene Fall von selbst ausgeschlossen, oder er liegt auf einem solchen Gebilde. Dann würden

unendlich viele Elemente des Gebildes G nach den Bemerkungen am Ende des vorigen §. einem Gebilde höherer Stufe angehören, welches die Gleichungen $f_i = C_i$ befriedigt. Das Gebilde G oder ein äquivalentes müsste daher ganz einem solchen Gebilde höherer Stufe angehören, was unmöglich ist, da es nach seiner Construction eine Stelle enthält, an welcher die Determinanten $\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_a} \right|$ endliche bestimmte Werte annehmen, die nicht sämmtlich Null sind.

Es kann daher in P nur eine endliche Anzahl von Flächentheilen liegen, welche Fortsetzungen des Gebildes G äquivalent sind.

§. 4.

Das Parallelotop P kann man nun im idealen Sinne als eine geschlossene Mannigfaltigkeit betrachten, indem man je zwei äquivalente Stellen der Begrenzung einander zuordnet. Alle etwa existierenden $2n$ -fach periodischen Functionen werden dann in dieser geschlossenen Mannigfaltigkeit eindeutige Functionen des Ortes, die u_a dagegen Functionen, die nach Durchlaufen geschlossener Wege sich vermehren um simultane ganzzahlige Linearcombinationen der $\omega_{a\beta}$.

Die einzelnen Flächentheile, welche Fortsetzungen von G äquivalent sind, fügen sich dann zusammen zu einer einzigen geschlossenen Fläche F . Denn, wenn an irgend einer Stelle der Begrenzung von P ein Flächentheil austritt, so tritt an der äquivalenten Stelle ein Flächentheil ein, und zwar derjenige, welcher der Fortsetzung des ersten Flächentheils über die Begrenzung hinaus äquivalent ist.

Diese geschlossene Fläche F kann als eine Riemann'sche Fläche aufgefasst werden, welche ihrerseits ein algebraisches Gebilde definiert.

Denn sie besteht aus einer endlichen Anzahl endlicher Theile, und es kann eine endliche Umgebung jeder einzelnen Stelle conform auf die Ebene abgebildet werden. In der That lassen sich in der Umgebung jeder Stelle die u_a darstellen als Potenzreihen, welche nach einem Parameter t fortschreiten.

Ist nun dieser Parameter

$$t = t_1 + it_2,$$

so ist das Bogenelement von F gegeben durch

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=2n} dv_{\beta}^2 = \left(\sum_{a=1}^{a=n} \left| \frac{du_a}{dt} \right|^2 \right) (dt_1^2 + dt_2^2),$$

womit die Möglichkeit conformer Abbildung einer endlichen Umgebung auf die Ebene von $t_1 + it_2$ erwiesen ist. Wegen der Endlichkeit der Umgebung der Stelle und der Endlichkeit von F muss es daher möglich sein, die Fläche F mit einer endlichen Anzahl von Bereichen vollständig so zu überdecken, dass diese Bereiche stets ganze Flächentheile gemein haben.

Dann aber treten sofort die Combinationismethoden der Herren Schwarz und Neumann in Kraft, welche ja bei Übertragung auf Flächen in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen ungeändert Geltung behalten.

§. 5.

Wir denken uns nun diese Riemann'sche Fläche F durch $2p$ canonische Querschnitte A, B im Sinne von Riemann (Abel'sche Functionen Art. 19) in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Dann erfahren die u_a beim Überschreiten der Querschnitte Veränderungen um lineare Combinationen der $\omega_{a\beta}$ mit ganzzahligen Coefficienten und sind auf F überall endlich. Daher sind die u_a auf der Fläche F Integrale erster Gattung.

Bezeichnen wir nun die Perioden von u_a auf der Fläche F an den Querschnitten A_γ mit $\Omega_{a,\gamma}$, an den Schnitten B_γ mit $\Omega_{a,p+\gamma}$ wo γ von 1 bis p geht, so ist

$$\Omega_{a,\gamma} = \sum_{\beta=1}^{\beta=2n} a_{\gamma,\beta} \omega_{a\beta}$$

und entsprechend

$$\Omega_{a,p+\gamma} = \sum_{\beta=1}^{2n} a_{p+\gamma,\beta} \omega_{a\beta}$$

wo die a ganze Zahlen sind.

Nach Riemann besteht nun für jedes Wertepaar λ, μ die Gleichung

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=p} (\Omega_{\lambda,\gamma} \Omega_{\mu,p+\gamma} - \Omega_{\lambda,p+\gamma} \Omega_{\mu,\gamma}) = 0.$$

Dies geht, wenn man die Ω durch die ω ausdrückt über in eine Relation von der Gestalt

$$\sum_{\beta,\gamma} c_{\beta\gamma} \omega_{\lambda,\beta} \omega_{\mu,\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1 \dots 2n),$$

wobei $c_{\beta\gamma} = -c_{\gamma\beta}$ und $c_{\gamma\gamma} = 0$ ist, ferner die $c_{\beta\gamma}$ ganze Zahlen bedeuten.

Dieselbe Relation besteht natürlich auch als Folge der angeführten, wenn für die $\omega_{\lambda\beta}, \omega_{\mu\gamma}$ die Perioden irgend zweier Linearcombinationen der u_a gesetzt werden.

Ferner folgt ebenfalls mit Riemann (Abel'sche Function Art. 26), dass wenn $W_\gamma = U_{2\gamma-1} + i U_{2\gamma}$ die Perioden irgend einer linearen Combination der u_a an den Querschnitten A, B bedeutet, die nicht constant ist, dass dann auch

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=p} (U_{2\gamma-1} U_{2(p+\gamma)} - U_{2(p+\gamma)-1} U_{2\gamma}) > 0$$

einen positiven, von Null verschiedenen Wert hat.

Poincaré und Picard zeigen nun l. c. mit Hilfe dieser 2. Relation, dass wenn die u_a auf der Fläche F unabhängig sind, dass dann die Determinante der $|c_{\beta\gamma}|$ nothwendig von Null verschieden ist.

Es geschieht dies in folgender Weise:

Seien w, w' zwei lineare Verbindungen der u_a , ihre Perioden, welche durch Änderung der u_a um $\omega_{\alpha\beta}$ entstehen, seien $\omega_\beta, \omega'_\beta$, dann sind auch ihre Perioden $W_\gamma = \sum a_{\gamma\beta} \omega_\beta, W'_\gamma = \sum a'_{\gamma\beta} \omega'_\beta$. Sei ferner der reelle und imaginäre Theil von W_γ wie oben durch $U_{2\gamma-1}, U_{2\gamma}$ bezeichnet. Sei ferner $\omega_\beta = \eta_{2\beta-1} + i \eta_{2\beta}$ und $\omega'_\beta = \eta'_{2\beta-1} + i \eta'_{2\beta}$.

Dann ist erstens

$$\sum_{\beta\gamma} c_{\beta\gamma} \omega_\beta \omega'_\gamma = 0,$$

zweitens

$$\sum_{\beta\gamma} c_{\beta\gamma} \eta_{2\beta-1} \eta_{2\gamma} > 0.$$

Ist nun die Determinante $|c_{\beta\gamma}| = 0$, so kann man durch Einführung ganzzahliger Linearcombinationen π, π' der ω, ω' von der Determinante 1, welche ja dann wieder primitive Perioden der w, w' sind, die erste Form auf die Normalform einer alternierenden Bilinearform von weniger als $2n$ Variablen bringen. (Frobenius, Crelle 84).

Diese ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} & d_1 (\pi_1 \pi'_{\nu+1} - \pi'_1 \pi_{\nu+1}) + d_1 d_2 (\pi_2 \pi'_{\nu+2} - \pi'_{\nu+2} \pi_2) \\ & + d_1 d_2 d_3 (\pi_2 \pi'_{\nu+3} - \pi'_{\nu+3} \pi_2) + \dots \\ & + d_1 d_2 \dots d_\nu (\pi_\nu \pi'_{2\nu} - \pi'_{2\nu} \pi_\nu) = 0, \end{aligned}$$

wo $\nu < n$ wegen $|c_{\beta\gamma}| = 0$.

Zugleich würde die Ungleichung die entsprechende Gestalt annehmen, die aus der zuletzt angeschriebenen Form hervorgeht, wenn man für die π ihre reellen Theile, für die π' aber die imaginären Theile der π einsetzt. Bestimmt man nun eine Linearcombination der u_α so, dass die zugehörigen π_1 bis π_r sämtlich verschwinden, was möglich ist, wie gleich erörtert werden soll, so würde die Ungleichung nicht mehr erfüllt sein, da ihre linke Seite verschwindet.

Dass es möglich ist, solche Linearcombinationen der u_α zu bestimmen, erhellt daraus, dass wenn $\pi_{\alpha,\beta}$ irgend ein System primitiver Perioden der u_α bezeichnen, die Determinante der reellen und imaginären Theile der $\pi_{\alpha,\beta}$ gleich ist der nämlichen Determinante $|\eta_{\lambda,\mu}|$ gebildet für die $\omega_{\alpha,\beta}$.

Es können daher auch nicht alle Unterdeterminanten der Matrix $\|\pi_{\alpha,\beta}\|$ verschwinden. Und hieraus ergibt sich ohne weiters die behauptete Möglichkeit.

Sind also die u_α auf der Fläche F linear unabhängig, so ist die Determinante $|c_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden und es besteht die Relation

$$\sum_{\beta, \gamma} c_{\beta, \gamma} \omega_{\lambda, \beta} \omega_{\mu, \gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1 \dots 2n).$$

§. 6.

Wir wollen nun zuerst die Annahme weiter verfolgen, es seien die u_α auf F linear unabhängig.

Dann ergibt sich aus der entwickelten Auffassung zunächst, dass zwischen irgend $n+1$ Functionen eine algebraische Relation besteht. In der That, bezeichnen wir mit u_α^x den Wert des u_α an einer Stelle x der Fläche F , so wird, wenn wir unter $f(u_\alpha)$ jetzt irgend eine $2n$ -fach periodische Function verstehen, die im endlichen überall den Charakter einer rationalen hat,

$$f\left(\sum_{v=1}^n u_\alpha^{x_v}\right)$$

auf der Fläche F eine eindeutige Function jeder der n Stellen x_v ohne wesentliche Singularität und daher eine ebenda eindeutige algebraische Function der Stellen x_v . Andererseits können wir setzen

$$\sum_1^n u_\alpha^{x_v} = w_\alpha.$$

Wählen wir nun, was bei linear unabhängigem u_a^x möglich ist, für die x_v irgend n Stellen von F , an denen die Determinante $\left| \frac{d u_a^{x_v}}{d t_v} \right|$ nicht Null ist, und die $u_a^{x_v}$ nach ganzen positiven Potenzen des Parameters t_v entwickelt werden können, — so erhalten wir gewisse Werte w'_a und es können in einer genügend kleinen, aber endlichen Umgebung die t_v nach den $(w_a - w'_a)$ entwickelt werden. Daher können wir zunächst zu jedem Wertsystem der W_a in der Umgebung der Stellen w'_a und darum wegen der unbeschränkten analytischen Fortsetzbarkeit beider Seiten der Gleichung

$$f\left(\sum_{v=1}^{v=n} u_a^{x_v}\right) = R(x_1 \dots x_n),$$

wo $R(x_1 \dots x_n)$ eine algebraische Function der Stellen x_v bedeutet, zu allen Werten der w_a durch passende Abänderung der x gelangen.

Da also jede eindeutige $2n$ -fache periodische Function mit den Perioden $w_{a,\beta}$ als algebraische Function von n Stellen eines und desselben algebraischen Gebildes darstellbar ist, so folgt schließlich auch unter der Voraussetzung, die u_a seien auf F linear unabhängig:

Zwischen irgend $n+1$ solchen Functionen besteht sicher eine algebraische Gleichung, in speciellen Fällen jedoch möglicherweise schon zwischen weniger als $n+1$ Functionen.¹⁾

§. 7.

Es soll nun der Fall weiter verfolgt werden, wenn die u_a auf F linear abhängig sind. Wir müssen deshalb darauf eingehen, weil wir nur die Existenz einer einzigen Function f von der in §. 1 vorausgesetzten Beschaffenheit angenommen haben. Diese kann möglicherweise so beschaffen sein, dass jedes Gleichungssystem $f_i(u_a + u_{i,a}) = C_i$ nur Flächen F liefert, auf denen die u_a linear abhängig sind, so dass wir diesen Fall für sich erledigen müssen.

Wir nehmen also an, auf F bestünden zwischen den u_a $n - \rho$ linear unabhängige Relationen, während ρ von den u_a noch selbst linear unabhängig bleiben. Indem man die rechten Seiten der $n - \rho$ unabhängigen auf Null reducierten linearen Relationen als neue Variable von vornherein einführt, erreicht man damit, dass, wenn die u_a sich irgendwie auf der Fläche F bewegen, nur die

¹⁾ Weierstrass, Berliner Monatsberichte. 1869.

Größen $u_1 \dots u_\rho$ sich ändern, dagegen die Größen $u_{\rho+1} \dots u_n$ gänzlich ungeändert bleiben.

Nimmt man eine beliebige $2n$ -fach periodische Function der hier betrachteten Art und setzt für die Größen $u_1 \dots u_\rho$ die Summe

$$\sum_1^\rho u_i^{x_i} \quad (i = 1 \dots \rho),$$

so erhält man diese Function als eindeutige Function von ρ Stellen der Fläche F , wenn man gleichzeitig sämtlichen Variablen $u_{\rho+1} \dots u_n$ den Wert Null beilegt. Ist aber $f(u_1 \dots u_\rho, u_{\rho+1} \dots u_n)$ eine solche Function, so ist auch

$$f(u_1, u_2, \dots, u_\rho, u_{\rho+1} + u'_{\rho+1}, u_{\rho+2} + u'_{\rho+2} \dots u_n + u'_n)$$

eine Function von derselben Beschaffenheit, wo die u' willkürliche Größen bedeuten.

Danach wird f auch eine eindeutige Function der ρ Stellen x_r auf F , wenn die $u_{\rho+1} \dots u_n$ irgendwelche Werte haben.

Hieraus ergibt sich, dass f nach den Variablen $u_1 \dots u_\rho$ für sich betrachtet mehrfach periodisch und zwar natürlich höchstens 2ρ -fach periodisch ist, mit Perioden, welche sich linear und ganzzahlig aus den ursprünglich $\omega_{\alpha\beta}$ zusammensetzen.

Hieraus folgt weiter, dass es auch nach $u_{\rho+1} \dots u_n$ für sich betrachtet mehrfach periodisch ist. Denn ist $P_1 \dots P_\rho$ eine Periode der $u_1 \dots u_\rho$ auf F und sind $P_{\rho+1} \dots P_n$ die mit denselben ganzen Zahlen aus den $\omega_{\rho+1,\beta}, \omega_{\rho+2,\beta} \dots \omega_{n,\beta}$ zusammengesetzten Perioden wie die $P_1 \dots P_\rho$ aus den $\omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1 \dots \rho$), so ist

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2 \dots u_n) &= f(u_1 + P_1, u_2 + P_2 \dots u_\rho + P_\rho, u_{\rho+1} \dots) \\ &= f(u_1 + P_1, \dots, u_\rho + P_\rho, u_{\rho+1} + P_{\rho+1}, \dots, u_n + P_n). \end{aligned}$$

Daher sind die $P_{\rho+1} \dots P_n$ auch Perioden von $f(u)$ als Function der letzten $n - \rho$ Variablen für sich betrachtet.

Diese müssen sich ihrerseits auf $2(n - \rho)$ linear unabhängige Systeme reducieren lassen.

Wir nehmen an, dass sowohl für die $u_1 \dots u_\rho$ als auch für die $u_{\rho+1} \dots u_n$ die Maximalzahl $2\rho, 2(n - \rho)$ von linear unabhängigen Periodensystemen wirklich erreicht wird.

Man wird dann zunächst den $u_1 \dots u_\rho$ constante Werte geben und $n - \rho - 1$ Gleichungen

$$f(u_1 \dots u_\rho, u_{\rho+1} + u_{k,\rho+1} \dots u_n + u_{k,n}) = C_k \quad (k = 1 \dots n - \rho + 1)$$

ansetzen. Dieses Gleichungssystem wird man als ein System von Bedingungsgleichungen für die $u_{\varrho+1} \dots u_n$ ebenso behandeln, wie das ursprünglich zu Grunde gelegte. Man wird also das hiedurch definierte Gebilde als Fläche in einem Gebiet von $2(n - \rho + 1)$ Dimensionen auffassen, in diesem Gebiet das Parallelotop construieren und so schließlich zu einer Fläche F' gelangen, auf welcher die $u_{\varrho+1} \dots u_n$ wieder Integrale erster Gattung sind. Sind sie linear unabhängig, so ist wieder

$$f(u_1 \dots u_{\varrho}, u_{\varrho+1} \dots u_n)$$

für beliebige Werte der $u_1 \dots u_{\varrho}$ als algebraische Function von $n - \rho$ Stellen $x_{\varrho+1} \dots x_n$ der Fläche F' zu erhalten, sind dagegen die u_{ϱ} nicht linear unabhängig, so hat man wieder die linearen Verbindungen der $u_{\varrho+1} \dots u_n$, welche sich auf F' nicht ändern, als neue Variable einzuführen und dasselbe Verfahren zu wiederholen. Man erhält so der Reihe nach Flächen $F', F'' \dots F^{(\sigma)}$, wo $\sigma \leq n$, von der Beschaffenheit, dass eine beliebige $2n$ -fach periodische Function eine eindeutige symmetrische Function von ρ Stellen, von F, ρ' Stellen, von F', ρ'' Stellen, von F'' etc. wird, wenn man die $u_1 \dots u_{\varrho}$ durch Summen von ρ Integralen auf F , die $u_{\varrho+1} \dots u_{\varrho+\varrho'}$ durch Summen von ρ' Integralen auf F' etc. ersetzt.

Man sieht, dass auch hier die oben betrachteten $2n$ -fach periodischen Functionen als algebraische Functionen von n Stellen aber verschiedener algebraischer Gebilde darstellbar sind, und daher ebenfalls der Satz gilt:

Zwischen $n + 1$ solchen Functionen besteht eine algebraische Relation.

Es ist nun, um diesen Fall nicht immer besonders behandeln zu müssen, von Vortheil, noch zu zeigen, dass es auch immer ein algebraisches Gebilde gibt, auf welchem sich diese Functionen als eindeutige Functionen von n Stellen desselben Gebildes darstellen lassen, mit anderen Worten, dass es auch in diesem Falle immer ein algebraisches Gebilde gibt, auf welchem n Integrale erster Gattung existieren, deren Perioden sämtlich zugleich Perioden von $f(u)$ sind. Gehöre zu dem Gebilde F eine Gleichung $\varphi_0(y_0, z) = 0$, zu dem Gebilde F' $\varphi_1(y_1, z) = 0$ u. s. f. dem Gebilde $F^{(\sigma)}$ die Gleichung $\varphi_{\sigma}(y_{\sigma}, z) = 0$ und werden diese Gebilde selbst durch die mehrblättrigen ebenen Riemann'schen Flächen über der Ebene der Variablen z repräsentiert.

Bildet man dann eine lineare Verbindung der $y_1 \dots y_{\sigma}$ mit unbestimmten Coefficienten und nennt diese Y , so sind bekanntlich alle rationalen Functionen von $y_1 \dots y_{\sigma}$ und z rational ausdrückbar

durch Y und z , während zwischen diesen beiden Größen eine algebraische Gleichung $\Phi(Y, z) = 0$ besteht.

Die Differentiale erster Gattung der Flächen $F, F', F'' \dots F^{(\sigma)}$ werden daher sämtlich auch Differentiale erster Gattung auf dem durch $\Phi(Y, z) = 0$ definierten algebraischen Gebilde, und zwar linear unabhängige, da sie es nach der Construction der Gebilde $F, F', F'' \dots F^{(\sigma)}$ sind.

Wir können daher allgemein den Satz aussprechen:

Gibt es zu den Perioden $\omega_{\alpha\beta}$ eine eindeutige $2n$ -fach periodische Function, die im Endlichen immer den Charakter einer rationalen hat und nicht als Function von weniger als n -linearen Verbindungen der u_α darstellbar ist, so gibt es auch immer mindestens ein algebraisches Gebilde erster Stufe, auf welchem n linear unabhängige Integrale erster Gattung existieren, so beschaffen, dass ihre Perioden lineare ganzzahlige Combinationen der $\omega_{\alpha\beta}$ sind. Die sämtlichen Functionen von diesem Charakter lassen sich als von n Stellen dieses Gebildes ohne wesentliche Singularität eindeutig abhängig darstellen, und sind daher algebraische Functionen von n unabhängigen Variablen. Daher besteht auch zwischen $n+1$ unter ihnen eine algebraische Gleichung.

Und als weitere Folgerung nach §. 5:

Endlich erfüllen die $\omega_{\alpha\beta}$ immer ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen

$$\sum c_{\beta\gamma} \omega_{\lambda\beta} \omega_{\mu\gamma} = 0,$$

wo die $c_{\beta\gamma}$ ganze Zahlen von der Beschaffenheit sind, dass $c_{\beta\gamma} = -c_{\gamma\beta}$ und $|c_{\beta\gamma}| \neq 0$ ist.

Daneben können in besonderen Fällen auch noch andere bilineare Relationen mit verschwindender Determinante bestehen. Der behandelte Ausnahmefall tritt immer ein, wenn z. B. die ursprünglich gegebene Function f in das Product zweier Functionen, wo die eine von ρ die andere von $n-\rho$ Variablen abhängt, und die resp. 2ρ -fach, $2(n-\rho)$ -fach periodisch sind. Allgemein ist leicht zu sehen, dass sich beim Eintreten des Ausnahmefalles die Function f als algebraische Function von 2ρ -fach periodischen Functionen der Variablen $u_1 \dots u_\rho$, von $2\rho'$ -fach periodische Functionen der Variablen $u_{\rho+1} \dots u_{\rho+\rho'}$ und sofort darstellen lässt.

Die Voraussetzung, f lasse sich nicht als Function von weniger als n linearen Verbindungen der u_α darstellen, ist nicht bloß nothwendig, um unendlich kleine Perioden auszuschließen, sondern auch um zu verhindern, dass bei der Sonderung der Variablen nach

Reihen von je $\rho, \rho', \rho'' \dots \rho^{(\sigma)}$ nicht etwa f von einzelnen dieser Variablen unabhängig wird.

Endlich ist für die Folge noch wichtig, dass nach §. 5 auch die Ungleichung

$$\sum_{\beta, \gamma} c_{\beta \gamma} \eta_{2\lambda-1, \beta} \eta_{2\lambda, \gamma} > 0$$

immer besteht.

§. 8.

Nachdem so nothwendige Bedingungen für die $\omega_{\alpha\beta}$ gefunden sind, entsteht die Frage, ob dieselben auch hinreichend sind.

Auf Grund der Arbeit des Herrn Frobenius (Journal f. Math., Bd. 97, Grundlagen einer Theorie der Jacobi'schen Functionen) ist diese Frage zu bejahen.

Herr Frobenius zeigt nämlich an der citierten Stelle, dass man unter diesen Bedingungen immer ganze analytische Functionen der u_α bilden kann, welche sich bei Vermehrung der u_α um irgendein Periodensystem nur um eine Exponentielle ändern, deren Exponent eine ganze lineare Function der u_α ist.

Die zweiten logarithmischen Derivierten dieser Functionen u_α haben dann die Perioden $\omega_{\alpha\beta}$ und wie l. c. ausdrücklich gezeigt wird, gibt es auch solche, welche die $\omega_{\alpha\beta}$ zu primitiven Perioden haben.

Die als nothwendig erkannten Bedingungen sind daher in der That auch hinreichend.

§. 9.

Wir untersuchen nunmehr die algebraischen Beziehungen zwischen $2n$ -fach periodischen Functionen.

Vor allem zeigt man nun leicht den folgenden Satz:

Seien $f_1 \dots f_n$ solche $2n$ -fach periodische Functionen der u_α , die im Endlichen überall den Charakter rationaler haben, und deren Functionaldeterminante nicht überall verschwindet, dann lassen sich n solche Constante $C_1 \dots C_n$ angeben, dass das Gleichungssystem $f_i = C_i$ lauter discrete Lösungen hat, so beschaffen, dass für jede dieser Lösungen die Functionaldeterminante einen endlichen, bestimmten und von Null verschiedenen Wert hat.

Dabei sind solche Werte der u_a nicht als Lösungen in Betracht gezogen, welche die Gleichungen $f_i = C_i$ befriedigen, aber von den C_i ganz unabhängig sind. Es sind dies solche Stellen, welche für alle Functionen f_i außerwesentlich singular der zweiten Art sind.

In der That ist nämlich die Functionaldeterminante Δ von $f_1 \dots f_n$ ebenfalls eine $2n$ -fach periodische Function der u_a , und daher besteht zwischen dieser und den $f_1 \dots f_n$ eine irreducible algebraische Gleichung, welche von der Functionaldeterminante nicht unabhängig sein kann, da sonst schon zwischen $f_1 \dots f_n$ eine Relation bestünde, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass die Functionaldeterminante nicht identisch Null ist.

Da nun die $f_1 \dots f_n$ als unabhängige algebraische Functionen von n Variablen, durch welche die u_a als Integralsummen dargestellt werden können, jeden Wert annehmen können und als Functionen der u_a in ihrer analytischen Fortsetzung nirgends beschränkt sind, so liefern die Ausdrücke der Functionaldeterminante und der $f_1 \dots f_n$ durch die u_a eine eindeutige Parameterdarstellung des ganzen algebraischen Gebildes, welches durch die zwischen Δ und $f_1 \dots f_n$ bestehende irreducible Gleichung definiert ist.

Legt man den $f_1 \dots f_n$ daher bestimmte Werte $c_1 \dots c_n$ bei, so sind alle verschiedenen Werte, welche Δ für die Lösungen der Gleichungen $f_i = C_i$ nach den u_a annimmt, Wurzeln der irreduciblen algebraischen Gleichung zwischen Δ und den f_i , wenn diese gleich C_i gesetzt werden.

Hieraus ist unmittelbar zu ersehen, dass man die C_i so wählen kann, dass alle Wurzeln dieser Gleichung bestimmt, endlich und von Null verschieden sind.

Damit folgt aber unsere Behauptung, denn für eine ganze Mannigfaltigkeit von u_a als Lösung der Gleichungen $f_i = C_i$ müsste ja die Functionaldeterminante ebenfalls Null sein.

Des weiteren folgt, dass die obige Eigenschaft der Lösungen erhalten bleibt, wenn die C_i in einer genügend kleinen endlichen Umgebung einer den obigen Bedingungen entsprechenden Stelle beliebig abgeändert werden.

§. 10.

Sei nun $f_i = C_i$ ein solches Gleichungssystem, dessen Existenz wir im Vorigen sichergestellt haben. Mit Hilfe einer Function f_{n+1} , welche die $\omega_{\alpha\beta}$ zu primitiven Perioden hat, kann man dann sicher

auch Functionen bilden, so beschaffen, dass die Werte, welche sie für die verschiedenen Lösungen des Gleichungssystems $f_i = C_i$ annimmt, sämmtlich verschieden sind.

Seien nämlich u'_a und u''_a zwei Lösungen des Gleichungssystems $f_i = C_i$, so können, wenn schon $f_{n+1}(u'_a) = f_{n+1}(u''_a)$ ist, doch nicht alle Ableitungen von f_{n+1} für die beiden Stellen u'_a und u''_a übereinstimmen, denn sonst wäre nach dem Taylor'schen Satz

$$f_{n+1}(u'_a + h_a) = f_{n+1}(u''_a + h_a)$$

für jedes h_a innerhalb eines bestimmten Gebietes, und daher überall. Die Differenz $u'_a - u''_a$ wäre demnach eine Periode. Da aber die $\omega_{a\beta}$ primitive Perioden von f_{n+1} sein sollen, so wären u'_a und u''_a äquivalent, was ausgeschlossen ist.

Es gibt also sicher eine Ableitung von f_{n+1} , die an den Stellen u'_a, u''_a verschiedene Werte annimmt. Setzt man für u''_a der Reihe nach alle Lösungen von $f_i = C_i$ außer u'_a , so erhält man so eine Reihe von Ableitungen von $f_{n+1}(u_a)$, von denen jede einzelne wenigstens für ein Lösungspaar $u'_a, u^{(\sigma)}_a$ verschiedene Werte annimmt.

Ein lineares Aggregat mit unbestimmten Coefficienten aller dieser Ableitungen hat daher für alle Lösungen von $f_i = C_i$ verschiedene Werte.

§. 11.

Durch ein solches System von $n+1$ Functionen $f_1 \dots f_{n+1}$, dessen Existenz im vorigen §. nachgewiesen wurde, sind dann alle $2n$ -fach periodischen Functionen, welche die Perioden $\omega_{a\beta}$ haben und im endlichen überall den Charakter rationaler Functionen besitzen, auch rational darstellbar.¹⁾

In der That, es besteht zwischen $f_1 \dots f_{n+1}$ eine irreducible algebraische Gleichung eines bestimmten Grades N , welche durch Einsetzen der entsprechenden Entwicklungen der f in der Nähe irgend einer Stelle u_a identisch befriedigt wird. Sei dieses $G(f_1 \dots f_{n+1}) = 0$.

Geben wir in dieser Gleichung den $f_1 \dots f_n$ irgend welche Werte, so wird sie von allen Werten von f_{n+1} befriedigt, welche erhalten werden, wenn man in f_{n+1} für die u_a die Lösungen

¹ Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1869. Crelle 89.

der Gleichungen $f_i = C_i$ einsetzt. Dies sind auch zugleich alle Lösungen der Gleichung $G(C_1, \dots, C_n, f_{n+1}) = 0$ nach f_{n+1} .

In der That, da die $f_1 \dots f_n$ als unabhängige algebraische Function von n Veränderlichen dargestellt werden können, während gleichzeitig die u_α als Functionen der nämlichen Variablen ohne jede Beschränkung des Bereiches dargestellt werden können, so hat jedes Gleichungssystem $f_i = C_i$ Lösungen. Hieraus folgt, dass durch die u_α eine eindeutige Parameterdarstellung des ganzen durch die irreducible Gleichung $G = 0$ definierten algebraischen Gebildes vermittelt wird. Es gehört also zu jeder Stelle des Gebildes auch mindestens ein Wertesystem der u_α . Danach gehört auch zu jeder Lösung von

$$G(C_1, C_2, \dots, C_n, f_{n+1}) = 0$$

nach f_{n+1} ein Wertesystem der u_α , welches die Gleichungen $f_i = C_i$ befriedigt.

Da die C_i so bestimmt werden können, dass alle diese Lösungen verschieden ausfallen, und f_{n+1} so gewählt werden kann, dass es für diese Lösungen durchwegs verschiedene Werte annimmt, so ist also N auch die Anzahl der verschiedenen nicht äquivalenten Lösungen, welche das Gleichungssystem $f_i = C_i$ hat.

Ist nun φ irgend eine $2n$ -fach periodische Function, welche ebenfalls die $\omega_{\alpha\beta}$ zu Perioden und im endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, so ist auch $z = f_{n+1} + w\varphi$ eine solche Function, wo w eine unbestimmte Größe bedeutet und es besteht zwischen $f_1 \dots f_n$ und z eine irreducible algebraische Gleichung

$$H(w, f_1, f_2, \dots, f_n, z) = 0.$$

Diese wird in z von demselben Grade sein, wie G in f_{n+1} da ja $f_{n+1} + w\varphi$ dieselben Bedingungen erfüllt, wie f_{n+1} . Ferner wird sie für $w = 0$ mit G identisch werden.

Diese Gleichung gilt für jeden Wert von w , daher auch bei Differentiation nach w . Man hat daher

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \varphi + \frac{\partial H}{\partial w} = 0,$$

oder

$$\varphi = - \frac{\frac{\partial H}{\partial w}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

Setzt man hierin $w=0$, so reducirt sich der Nenner auf $\frac{\partial G}{\partial f_{n+1}}$ und kann daher, da G irreducibel ist, weder identisch, noch zufolge $G=0$ verschwinden. Daher kann auch der Zähler nicht identisch Null sein, und es ist also φ dargestellt als rationale Function von $f_1 \dots f_{n+1}$.

§. 12.

Die Bedingungen, unter denen man durch die Functionen $f_1 \dots f_{n+1}$ alle anderen rational darstellen kann, lassen sich dahin zusammenfassen:

1. Es darf die Functionaldeterminante von n Functionen nicht identisch Null sein.

Man kann dann Wertsysteme der $C_1 \dots C_n$ auffinden, für welche die Gleichungen $f_i = C_i$ ($i = 1 \dots n$) lauter discrete, verschiedene Lösungen haben, und die Functionaldeterminante endlich bestimmt und von Null verschieden ist. — Es muss dann:

2. f_{n+1} für die nicht äquivalenten Lösungen wenigstens eines Wertesystemes der C_i lauter verschiedene Werte annehmen.

Dieses System hinreichender Bedingungen ist zugleich auch nothwendig, damit alle $2n$ -fach periodischen Functionen der hier behandelten Art rational durch $f_1 \dots f_{n+1}$ darstellbar sind.

Man erkennt nämlich aus dem Vorigen, dass, wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, immer Functionen existieren, welche gewiss nicht darstellbar sein können.

§. 13.

An Stelle des Systems der Functionen $f_1 \dots f_{n+1}$ kann man auch ein anderes wählen, welches mit den ersten durch die Gleichungen

$$\varphi_i = R_i(f_1 \dots f_{n+1}) \quad (i = 1 \dots n+1)$$

zusammenhängt, wo die R_i rationale Functionen bedeuten, wenn die φ_i die nämlichen Bedingungen erfüllen wie die f_i .

Man kann dies jedoch auch auf algebraischem Wege entscheiden, und zwar mit Hilfe des folgenden Satzes:

Ist die Resultante des Gleichungssystems

$$\varphi_i = R_i(f_1 \dots f_{n+1}), \quad G(f_1 \dots f_{n+1}) = 0$$

nach den $f_1 \dots f_{n+1}$ gebildet eine irreducible Function sämtlicher $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$, so sind alle rationalen Functionen der $f_1 \dots f_{n+1}$ durch die $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ rational darstellbar. Im Gegenfalle aber gibt es immer rationale Functionen der $f_1 \dots f_{n+1}$, welche nicht durch die $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ rational darstellbar sind.¹⁾

Erstens bemerke man, dass die Resultante des obigen Gleichungssystems, wenn sie nicht irreducibel ist, nur die Potenz einer irreduciblen Function sein kann.

Denn sie kann gleich Null gesetzt nichts anderes aussagen, als dass die Werte der $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ einem monogenen algebraischen Gebilde angehören, welches durch die obigen Gleichungen definiert ist.

Sei nun $\psi = R(f_1 \dots f_{n+1})$ irgend eine rationale Function der $f_1 \dots f_{n+1}$. Sei ferner w eine unbestimmte Größe. Ersetzen wir dann in dem obigen Gleichungssystem die $n+1$ te Gleichung durch die folgende

$$\varphi_{n+1} + w\psi = R_{n+1}(f_1 \dots f_{n+1}) + wR(f_1 \dots f_{n+1})$$

und bilden die Resultante des so veränderten Gleichungssystems nach dem $f_1 \dots f_{n+1}$.

Sei diese

$$\Re(\varphi_{n+1} + w\psi, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n, w) = 0.$$

Ist ferner $\mathfrak{A}(\varphi_{n+1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ die Resultante des ursprünglichen Gleichungssystems, welches aus dem abgeänderten für $w = 0$ wieder hervorgeht, so ist immer, wenn $\Re = 0$ ist, auch

$$\Re(\varphi_{n+1}, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n, 0) = 0,$$

und umgekehrt zieht die letzte Gleichung die erste nach sich. Daher ist bis auf einen constanten, nicht verschwindenden Factor $\Re(\varphi_{n+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_n, 0)$ mit \Re identisch.

Differentiiert man nun $\Re(\varphi_{n+1} + w\psi, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n, w) = 0$ nach w , so kommt

$$\frac{\partial \Re}{\partial (\varphi_{n+1} + w\psi)} \cdot \psi + \frac{\partial \Re}{\partial w} = 0,$$

¹⁾ Weierstrass bemerkt Crelle 89, er habe die Beschaffenheit der Functionen R_i nicht näher untersucht.

oder

$$\Psi = - \frac{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial w}}{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial (\varphi_{n+1} + w\psi)}}.$$

Da nun für $w = 0$ sich \mathfrak{A} auf \mathfrak{A} reducirt, so wird der Nenner $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \varphi_{n+1}}$, und da $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \varphi_{n+1}}$ weder identisch, noch zufolge $\mathfrak{A} = 0$ verschwinden kann, wenn \mathfrak{A} irreducibel ist und von φ_{n+1} wirklich abhängt, so haben wir in der obigen Formel eine Darstellung von ψ als rationale Function von $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$. Damit ist der erste Theil unserer Behauptung bewiesen. Dass es nothwendig ist, dass \mathfrak{A} von allen $\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}$ wirklich abhängt, ist unmittelbar zu sehen, da sonst schon zwischen weniger als $n+1$ der φ eine algebraische Relation bestehen würde, also die φ nicht ein Gebilde n^{ter} Stufe bilden könnten.

Wir wollen nun annehmen, \mathfrak{A} wäre Potenz einer irreduciblen Function, und zeigen, dass dann durch die φ nicht alle rationalen Functionen der f rational dargestellt werden können.

Denken wir uns den $\varphi_1 \dots \varphi_n$ bestimmte Werte gegeben und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi_i &= R_i(f_1 \dots f_n, f_{n+1}) \quad (i = 1 \dots n) \\ G(f_1 \dots f_n, f_{n+1}) &= 0 \end{aligned}$$

nach den f aufgelöst. Seien diese Lösungen $f_1^{(\lambda)}, f_2^{(\lambda)} \dots f_{n+1}^{(\lambda)}$.

Dann ist identisch

$$\mathfrak{A}(\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}) = A(\varphi_1 \dots \varphi_n) \prod_{\lambda} (\varphi_{n+1} - R_{n+1}(f_1^{(\lambda)} f_2^{(\lambda)} \dots f_{n+1}^{(\lambda)})),$$

wo $A(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ eine ganze rationale Function der $\varphi_1 \dots \varphi_n$ ist.

Wenn nun \mathfrak{A} eine l^{te} Potenz werden soll, so müssen je l der Werte $R_{n+1}(f_1^{(\lambda)} f_2^{(\lambda)} \dots f_{n+1}^{(\lambda)})$ einander gleich werden.

Sind nun die $f_1^{(\lambda)} f_2^{(\lambda)} \dots f_{n+1}^{(\lambda)}$ verschieden für alle λ , so liefern mehrere Stellen des Gebildes $G(f_1 \dots f_{n+1}) = 0$ eine und dieselbe Stelle des Gebildes $\mathfrak{A}(\varphi_1 \dots \varphi_{n+1}) = 0$. Es können daher nicht alle rationalen Functionen von $f_1 \dots f_{n+1}$ rational durch die φ darstellbar sein, weil die φ die f nicht eindeutig bestimmen.

Dass aber mehrere Wertsysteme $f_1^{(\lambda)} \dots f_{n+1}^{(\lambda)}$ einander gleich sind, lässt sich immer durch geeignete Wahl der Specialwerte

der φ vermeiden, wenn nicht die Functionaldeterminante der φ nach den $f_1 \dots f_n$, wobei f_{n+1} zufolge $G = 0$ als Function von $f_1 \dots f_n$ aufzufassen ist, identisch Null ist.

Denn diese Determinante ist dann wieder Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen der φ_i sind. Diese können daher so gewählt werden, dass alle Werte der Functionaldeterminante endlich, bestimmt und von Null verschieden sind. Somit sind dann auch alle Lösungen nach den $f_1 \dots f_n$ verschieden, soweit sie nicht von den φ_i ganz unabhängig sind und daher nicht in Betracht kommen.

§. 14.

Es soll nun weiter folgender Satz bewiesen werden¹⁾:

Sind die $\omega_{\alpha\beta}$ primitive Perioden einer Function $f(u)$, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat und nicht als Function von weniger als n linearen Verbindungen der u_a darstellbar ist, so bildet diese Function mit ihren n ersten Ableitungen immer ein System von $n+1$ Functionen, durch welche jede andere rational dargestellt werden kann.

Dies wird bewiesen sein, wenn wir erstens zeigen, dass die Functionaldeterminante der n partiellen Derivirten nicht identisch verschwindet, und zweitens, dass sich mindestens ein Wertsystem für die $\frac{\partial f}{\partial u_a}$ angeben lässt, so dass für alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial f}{\partial u_a} = C_a$$

die Functionaldeterminante von Null verschieden ist und f lauter verschiedene Werte annimmt. Bezeichnen wir $\frac{\partial f}{\partial u_a}$ mit f_a , so folgt aus der Gleichung $|f_{\alpha k}| = 0$ ($\alpha, k = 1 \dots n$) für alle u , dass für jedes α eine Gleichung besteht

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k f_{\alpha k} = 0.$$

¹⁾ Durch den Zusatz, dass die $\omega_{\alpha\beta}$ primitive Perioden von $f(u)$ sind, werden die von Weierstrass Crelle 89 zugelassenen Ausnahmen ausgeschlossen. Dass diese Bedingung auch nothwendig ist, erkennt man direct.

Bildet man nun den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k f_k = \psi,$$

so findet man durch wiederholte Differentiation unter Berücksichtigung der Gleichung zwischen den $f_{\alpha k}$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^\sigma \Phi_k}{\partial^{\sigma_1} u_1 \partial^{\sigma_2} u_2 \dots \partial^{\sigma_n} u_n} \cdot f_k = \frac{\partial^\sigma \psi}{\partial^{\sigma_1} u_1 \partial^{\sigma_2} u_2 \dots \partial^{\sigma_n} u_n}$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \sigma).$$

Wählt man nun für die u eine reguläre Stelle der Functionen Φ_k , ψ , so folgt hieraus nach dem Taylor'schen Satz

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k(u+h) f_k = \psi(u+h),$$

wo die h_α zunächst nur in der Nähe der betreffenden Stelle, dann aber wegen der analytischen Fortsetzbarkeit von Φ und ψ beliebig gewählt werden können. Schreibt man daher $h_\alpha - u_\alpha$ für die h_α , so folgt

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k(h_\alpha) \cdot f_k = \psi(h_\alpha).$$

Es genügt daher f einer linearen partiellen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten, welche nicht sämtlich verschwinden, da sonst die Φ_i für jeden Wert der Variablen Null sein müssten.

Sei diese Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} = C.$$

Hieraus folgt¹⁾, wenn man unter t eine willkürliche GröÙe versteht

$$\frac{df(u_\alpha + c_\alpha t)}{dt} = C$$

oder durch Integration

$$f(u_\alpha + c_\alpha t) - f(u_\alpha) = Ct.$$

¹⁾ Vgl. den Gebrauch, den Weierstrass von einer solchen Gleichung für $C=0$ macht. Berliner Monatsberichte 1876.

Diese Gleichung ist aber unverträglich damit, dass die Function analytisch, $2n$ -fach periodisch ist und nicht von weniger als n Variablen abhängt.

Man kann nämlich erstens t so klein, aber endlich wählen, dass die Gleichungen

$$c_a t = \sum_{\beta} n_{\beta} \omega_{a\beta} = P_a$$

nicht durch ganze Zahlen n befriedigt werden können. Denn es gibt, da $f(u)$ keine unendlich kleinen Perioden haben soll, immer eine endliche GröÙe G , so beschaffen, dass, wenn die $P_a \dots$ irgend ein Periodensystem bedeuten

$$G < \sum_{a=1}^n |P_a|^2$$

Wählt man daher t so, dass

$$|t|^2 \sum_{a=1}^n |c_a|^2 < G,$$

so ist sicher die obige Gleichung nicht durch ganze Zahlen zu erfüllen.

Sei nun t so gewählt, und C von Null verschieden, dann gilt, wenn N eine beliebige ganze Zahl, und $P_1 \dots P_n$ ein Periodensystem von $f(u)$ ist, auch die Gleichung:

$$f(u_a + N c_a t + P_a) - f(u_a) = N C t.$$

Man kann dann (vgl. das Citat in §. 1) bekanntlich die Zahlen N und n_{β} so bestimmen, dass die Ausdrücke

$$N c_a t + \sum_{\beta=1}^{2n} n_{\beta} \omega_{a\beta}$$

kleiner werden als jede beliebig vorgegebene GröÙe ohne sämtlich zu verschwinden, und zwar auf unendlich viele Arten, unter denen auch unendlich viele verschiedene Werte des N vorkommen müssen, da man es ja durch die n_{β} allein nicht erreichen kann.

Es gäbe also dann in beliebig kleiner Umgebung jeder Stelle u_a unendlich viele u'_a , so beschaffen, dass die Differenz

$$f(u'_a) - f(u_a)$$

absolut größer als eine endliche Größe nämlich $|Ct|$ wäre. Es wäre daher $f(u)$ nirgends stetig, was dem analytischen Charakter widerspricht.

Ist aber $C=0$, so folgt hieraus die Existenz unendlich kleiner Perioden von $f(u)$, was ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Hiemit ist bewiesen, dass die Determinante $|f_{\alpha k}|$ unter den über f gemachten Voraussetzungen nicht identisch verschwinden kann.

Unter diesen Umständen aber kann man, wie schon wiederholt bemerkt, immer n Constante so finden, dass die Lösungen der Gleichungen $f_i = C_i$, welche von den C_i abhängen, alle verschieden sind, und die Functionaldeterminante für dieselben einen endlichen bestimmten Wert hat.

Sind die u_a^λ ein solches Lösungssystem, so lassen sich die Größen $w_a^\lambda - u_a^\lambda$ nach ganzen positiven Potenzen der $C'_n - C_n$ entwickeln, wobei die w_a^λ die Lösungen des Gleichungssystems

$$f_i(w_a) = C'_i$$

bedeuten, und die Größen $|C'_n - C_n|$ unter einer bestimmten endlichen Größe bleiben.

Wäre nun für jedes Wertsystem der C_i

$$f(u_a^\lambda) = f(u_a^\mu),$$

ohne dass u_a^λ äquivalent wäre mit u_a^μ , wobei u_a^λ, u_a^μ zwei Lösungssysteme der Gleichungen $f_i = C_i$ bedeuten, so wäre auch

$$\sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial u_{a,\lambda}} \right) \frac{\partial u_a^\lambda}{\partial C_i} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial u_{a,\mu}} \right) \frac{\partial u_a^\mu}{\partial C_i}$$

wo $\left(\frac{\partial f}{\partial u_{a,\lambda}} \right), \left(\frac{\partial f}{\partial u_{a,\mu}} \right)$ die Werte der Derivierten für resp. $u_a = u_a^\lambda, u_a^\mu$ bezeichnen. Daher wäre dann

$$\sum_a C_a \frac{\partial (u_a^\lambda - u_a^\mu)}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1 \dots n).$$

Bildet man diese Gleichung einmal für $i=r$, das andere mal für $i=s$ und differentiirt die erste nach C_s , die zweite nach C_r , so kommt

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{\partial^2 (u_{\alpha}^{\lambda} - u_{\alpha}^{\mu})}{\partial C_r \partial C_s} + \frac{\partial (u_r^{\lambda} - u_r^{\mu})}{\partial C_s} = 0$$

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} \frac{\partial^2 (u_{\alpha}^{\lambda} - u_{\alpha}^{\mu})}{\partial C_r \partial C_s} + \frac{\partial (u_s^{\lambda} - u_s^{\mu})}{\partial C_r} = 0.$$

oder

$$\frac{\partial (u_r^{\lambda} - u_r^{\mu})}{\partial C_s} = \frac{\partial (u_s^{\lambda} - u_s^{\mu})}{\partial C_r}.$$

Damit folgt aber aus der ersten Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha} \frac{\partial (u_i^{\lambda} - u_i^{\mu})}{\partial C_{\alpha}} = 0.$$

Daher sind die Differenzen $u_i^{\lambda} - u_i^{\mu}$ sämtlich homogene Functionen der $C_1 \dots C_n$ von der Dimension Null, welche nur von ihren Verhältnissen abhängen, und daher ungeändert bleiben, wenn sämtlich C mit demselben Factor multipliciert werden.

Nun sind sie aber zugleich auch Potenzreihen der $C'_{\alpha} - C_{\alpha}$ und zufolge dem eben bewiesenen ändern sie ihren Wert auch nicht, wenn statt der $C'_{\alpha} - C_{\alpha}$ gesetzt wird $t(C'_{\alpha} - C_{\alpha})$. Sie sind daher nothwendig von den C_{α} ganz unabhängig und daher Constante.

Soll aber dann

$$f(u^{\lambda}) = f(u^{\mu})$$

für einen ganzen Bereich von u^{λ} gelten, so muss die constante Differenz $u^{\lambda} - u^{\mu}$ eine Periode sein, und weil f die $\omega_{\alpha\beta}$ zu primitiven Perioden hat, so sind u^{λ} und u^{μ} äquivalent, wider die Voraussetzung.

Man kann also in der That die Constante C_i so wählen, dass für die verschiedenen nicht äquivalenten Lösungen von $f_i = C_i$ auch f_i lauter verschiedene Werte annimmt.

Es bildet also unter den eingangs gemachten Voraussetzungen in der That f mit seinen ersten n partiellen Derivierten ein System von $n+1$ Functionen, durch welche alle anderen rational darstellbar sind.

§. 15.

Wir wenden uns nun nach dieser Entwicklung der wichtigsten Sätze über die algebraischen Beziehungen der $2n$ -fach periodischen Functionen ihrer Darstellung durch Thetafunctionen zu.

Nach der Theorie der bilinearen Formen (Frobenius, Crelle 84) können wir durch eine unimodulare ganzzahlige Substitution für die $\omega_{\alpha\beta}$ immer der Bilinearform

$$\sum c_{\beta\gamma} \omega_{\lambda\beta} \omega_{\mu\gamma} = 0$$

die Normalform ertheilen

$$\sum_{\gamma=1}^n d_{\gamma} (\omega_{\lambda,\gamma} \omega_{\mu,n+\gamma} - \omega_{\lambda,n+\gamma} \omega_{\mu,\gamma}) = 0.$$

Dabei sind die $d_1 \dots d_n$ ganze Zahlen, so beschaffen, dass immer $d_{\gamma+1}$ durch d_{γ} theilbar ist.

Wir können dann die ganze Form durch d_1 dividieren, da alle d_{γ} durch d_1 theilbar sind.

Wir führen ferner für die u_{α} andere Variable v_{α} ein durch die Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^n d_{\alpha} \omega_{\lambda\alpha} v_{\alpha} = u_{\lambda} \quad (\lambda = 1 \dots n).$$

Dies ist möglich, denn es kann die Determinante $|\omega_{\alpha\lambda}|$ ($\alpha, \lambda = 1 \dots n$) nicht verschwinden. Würde sie nämlich verschwinden, so würde eine lineare Verbindung der u_{α} existieren, die sich gar nicht ändert, wenn die u_{α} um die $\omega_{\alpha\lambda}$ ($\lambda = 1 \dots n$) vermehrt werden. Sind nun ω_{β} die Perioden einer solchen Linearverbindung und ist

$$\omega_{\beta} = \eta_{2\beta-1} + i \eta_{2\beta}$$

so ist auch immer nach § 7

$$\sum_{\lambda=1}^n d_{\lambda} (\eta_{2\lambda-1} \eta_{2(n+\lambda)} - \eta_{2(n+\lambda)-1} \eta_{2\lambda}).$$

eine positive Größe. Dies widerspricht aber der Annahme, dass $|\omega_{\alpha\lambda}|$ ($\alpha, \lambda = 1 \dots n$) verschwinde, weil hieraus folgt, dass für eine geeignete Linearverbindung der u_{α} die Gleichung besteht $\eta_{2\lambda-1} = \eta_{2\lambda} = 0$ für $\lambda = 1 \dots n$.

Hieraus ergibt sich ferner, dass einer Änderung der u_{α} um $\omega_{\alpha\lambda}$ ($\lambda = 1 \dots n$) eine Änderung der v_{α} um Größen $\varepsilon_{\alpha\lambda}$ correspondiert, wo $\varepsilon_{\alpha\lambda} = 0$, wenn $\alpha \geq \lambda$, hingegen $\varepsilon_{\alpha\lambda} = \frac{1}{d_{\lambda}}$ ist.

Den Perioden $\omega_{a,n+\lambda}$ ($\lambda = 1 \dots n$) correspondieren dann Perioden der v_a , die wir mit $\tau_{a,\lambda}$ bezeichnen wollen. Nach den Bilinearrelationen ist dann

$$\tau_{a\lambda} = \tau_{\lambda a}.$$

Bildet man ferner mit n reellen Größen $\xi_1 \dots \xi_n$ den Ausdruck $\sum_a \xi_a v_a$ und wendet auf dessen Perioden die Ungleichung am Ende des §. 7 an, wobei $\tau_{a\lambda} = \tau'_{a\lambda} + i \tau''_{a\lambda}$ gesetzt ist, so folgt sogleich

$$\sum_{a,\lambda=1\dots n} \xi_a \xi_\lambda \tau''_{a\lambda} > 0.$$

Somit ist der reelle Theil der quadratischen Form $2\pi i \sum \tau_{a\lambda} \xi_a \xi_\lambda$ immer negativ für reelle ξ_a .

Folglich kann man mit den $\tau_{a\lambda}$ convergente Theta-reihen $\vartheta(v, \tau)$ bilden.

Das primitive Periodensystem der v_a ist aber gegeben durch $\varepsilon_{a\lambda} = 0, \varepsilon_{aa} = \frac{1}{d_a}$ und die $\tau_{a\lambda}$.

Daher haben die mit diesem Periodensystem der v_a gebildeten $2n$ -fach periodischen Functionen auch das Periodensystem:

$$\varepsilon'_{a\lambda} = 0 \quad \varepsilon'_{aa} = 1, \quad \tau_{a,\lambda} \quad (\lambda = 1 \dots n).$$

Kann man daher mit Hilfe der Thetareihen eine Function bilden, welche die Thetaperioden zu primitiven Perioden hat, so kann man auch durch diese und ihre Ableitungen alle $2n$ -fach periodischen Functionen mit dem Periodensystem $\varepsilon_{a\lambda}, \tau_{a\lambda}$ rational ausdrücken.

§. 16.

Um nun noch die Existenz einer solchen Function zu erweisen, betrachten wir die zweiten logarithmischen Derivierten von $\vartheta(v, \tau)$. Dieselben haben offenbar die $\varepsilon'_{a\lambda}, \tau_{a\lambda}$ zu Perioden, und wenn h_a irgend ein Periodensystem aller dieser Derivierten bedeutet, so folgt hieraus durch Integration die Gleichung

$$\vartheta(v_a + h_a, \tau) = e^{\sum \gamma_a v_a + c} \vartheta(v, \tau).$$

Da nun die Thetafunction die Perioden $\varepsilon'_{a\lambda}$ hat, so ist nothwendig $\gamma_a = 2\mu_a \pi i$, wo die μ_a ganze Zahlen sind.

Setzt man auf beiden Seiten die Reihenentwicklungen ein und vergleicht, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \pi i \sum_{i,k} (n_i + \mu_i) (n_k + \mu_k) \tau_{ik} + 2\pi i \sum_i (n_i + \mu_i) (v_i + h_i) \\ &= \pi i \sum_i n_i n_k \tau_{ik} + 2\pi i \sum_i n_i v_i + 2\pi i \sum_i \mu_i v_i + c + 2k\pi i \end{aligned}$$

für jedes Wertsystem der n_i , wo k eine von den n_i unabhängige ganze Zahl ist.

Hier müssen die von den n unabhängigen Glieder für sich übereinstimmen. Somit folgt

$$\begin{aligned} C &= 2\pi i \sum_i \mu_i h_i - \pi i \sum_i \mu_i \mu_k \tau_{ik} \\ 2\pi i \sum_i n_i h_i &= 2k\pi i + 2\pi i \sum_i n_i \sum_k \mu_k \tau_{ik} \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich endlich

$$h_i = k_i + \sum_k \mu_k \tau_{ik}.$$

Es ist also jede solche Periode, welche Periode aller zweiten logarithmischen Differentialquotienten von $\vartheta(v, \tau)$ ist, auch ein ganzzahliges Linearaggregat der Thetaperioden. Eine Linearverbindung der zweiten logarithmischen Differentialquotienten mit unbestimmten Coefficienten hat daher sicher die Thetaperioden zu primitiven Perioden.

§. 17.

Mit dem soeben bewiesenen folgt nun aus den früheren Sätzen, dass alle $2n$ -fach periodischen Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter von rationalen haben, rational durch ein lineares Aggregat der zweiten logarithmischen Differentialquotienten der Thetareihe, und dessen erste partiellen Ableitungen ausdrückbar sind. Da aber diese Functionen selbst bekanntlich rational durch Thetafunctionen darstellbar sind, so folgt schließlich der Riemann'sche Satz:

Alle $2n$ -fach periodischen Functionen, welche im endlichen überall den Charakter von rationalen haben und dieselben Perioden besitzen, sind rational durch geeignete Thetafunctionen darstellbar.

Genauer kann man auf Grund der vorhergehenden Entwicklungen sagen:

Die allgemeinen $2n$ -fach periodischen Functionen der betrachteten Art sind solche rationale Verbindungen von Thetafunctionen, welche sämmtlich die Perioden $\varepsilon_{\alpha\lambda}$, $\tau_{\alpha\lambda}$ haben, wo die $\tau_{\alpha\lambda}$ die zur

Bildung von Thetafunctionen verwendeten Größen bedeuten, die $\varepsilon_{a\lambda}$ aber definiert sind durch $\varepsilon_{a\lambda} = 0$ ($a \geq \lambda$), $\varepsilon_{aa} = \frac{1}{d_a}$, wo die d_a ganze Zahlen sind, von der Beschaffenheit, dass d_{a+1} immer durch d_a theilbar ist und $d_1 = 1$ ist.

Ihre Theorie ist daher wesentlich eine Theorie specieller, aus den Thetafunctionen gebildeter rationaler Functionen, welche die Thetaperioden im allgemeinen nicht zu primitiven Perioden haben.
