

**5. Über bispärrische  
Spiegelkondensoren für Ultramikroskopie;  
von H. Siedentopf.**

(Mitteilung aus der optischen Werkstätte von Carl Zeiss, Jena.)

§ 1. Anastigmatische Reflexion an zwei Kugelflächen.

Bispärrische Spiegelkondensoren bieten u. a. die Möglichkeit, die bekannte Brennpunkteigenschaft der Parabel mit Kugelflächen *auch bei großen Konvergenzwinkeln* sehr annähernd zu verwirklichen. Fig. 1 erläutert den Strahlenverlauf an dem bispärrischen Kardiodkondensor von Zeiss. Die aus ihm tretenden Lichtstrahlen sind in einem Fluoreszenzglas sichtbar gemacht und danach photographisch fixiert.

Trägt man für ein System, dessen Radienverhältnis gleich 1,5267 und dessen Zentraldistanz gleich 0,065375 ist, die Schnittweite  $z$  achsenparallel einfallender Strahlen in einer geeigneten Linearvergrößerung als Abszisse und ihre numerische Apertur  $n \cdot \sin 2\alpha$  für  $n = 1,5166$  als Ordinate auf, so erhält man Fig. 2. Der Radius der kon-

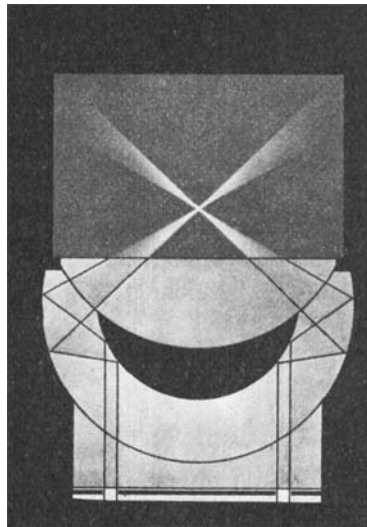
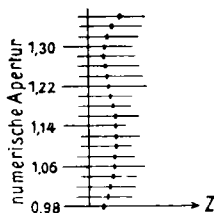


Fig. 1. Kardiodkondensor von Zeiss.

vexen Spiegelfläche ist dabei gleich 0,83976 gewählt, so daß die mittlere Brennweite 0,88004 wird. Die Figur zeigt, daß bei den numerischen Aperturen von 1,1125 und 1,2821 Umkehr-

punkte auftreten. Daher sind nicht weniger als drei Strahlen streng in einem Punkt vereinigt. Das Intervall für die Konvergenzwinkel (41 bis 63°) entspricht etwa dem für Dunkelfeldkondensoren üblichen. Die Schnittweite  $z$  rechnet vom



Vereinigung der Schnittweite dreier achsenparallel einfallender Strahlen. Linearvergr. 6550 mal, mittlere Brennweite 0,88004 mm.

Fig. 2.

Mittelpunkt der spiegelnden Hohlkugel bis zum Schnittpunkt des Bildstrahles mit der Achse und zwar positiv im Sinne der Lichtbewegung.

Daß man im allgemeinen zwei Umkehrpunkte vorschreiben kann, ergibt z. B. folgende Überlegung. Man suche Radienverhältnis und Zentralsdistanz, wenn ein achsenparallel einfallendes unendlich dünnes Strahlenbündel nach zweimaliger Spiegelung auf der Achse einen anastigmatischen Bildpunkt mit dem vorgeschriebenen

Konvergenzwinkel  $2\alpha$  gibt. Die Bedingung dafür lautet:

$$(1) \quad \overline{AE} = m_t = m_s,$$

worin  $m_t$  bzw.  $m_s$  die Länge  $\overline{AE}$  ergeben, wenn der tangentielle bzw. sagittale Schnitt betrachtet wird. Dabei sei  $\overline{EF} = 1$  gesetzt, und es werde mit  $i + \alpha$  der Einfallswinkel an der konvexen Spiegelfläche mit dem Radius  $r_1$  und mit  $i$  der Einfallswinkel an der konkaven Kugelfläche mit dem Radius  $r_2$  bezeichnet (Fig. 3). Dann ist

$$(2) \quad m_t = \frac{r_2 \cos i}{2 - r_2 \cos i} - \frac{r_1 \cos(i + \alpha)}{2}$$

und

$$m_s = \frac{r_2}{2 \cos i - r_2} - \frac{r_1}{2 \cos(i + \alpha)}.$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin^3(i + \alpha) \cdot \left(2 - \frac{\sin 2\alpha \cos i}{\sin(i + 2\alpha)}\right)}{2 \sin i^2 \cdot \sin(i + 2\alpha)},$$

und man findet die Zentralsdistanz  $b$  aus

$$(4) \quad \frac{b}{r_1} = \frac{\sin(i + \alpha) - \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot \sin i}{\sin 2(i + \alpha)}.$$

Wir ersehen aus Formel (3), daß wir über den Winkel  $i$  noch frei verfügen können. Derselbe läßt sich durch Interpolation so bestimmen, daß noch für einen zweiten vorgeschriebenen Umkehrpunkt  $2\beta$  dasselbe Wertepaar  $r_2/r_1$  und  $b/r_1$  folgt.

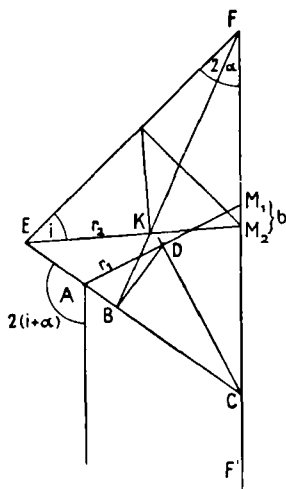
## § 2. Geometrische Konstruktion der anastigmatischen Reflexion.

Vielleicht ist die Mitteilung von Interesse, daß man ein einfaches geometrisches Konstruktionsverfahren angeben kann, das zu jedem Konvergenzwinkel  $2\alpha$  bei beliebigem Reflexionswinkel  $i$  an der Hohlkugel dasjenige bispärische Spiegelsystem liefert, das den Achsenpunkt unter diesen Winkeln nach zweimaliger Reflexion anastigmatisch im Unendlichen abbildet.

Man zeichne (Fig. 3) den Strahl  $\overline{EF} = 1$  unter dem Winkel  $2\alpha$  gegen die Achse  $\overline{F'F''}$ . Er falle in  $E$  unter dem Winkel  $i$  ein. Sein reflektierter Strahl ist  $\overline{EC}$ . Wir suchen den Punkt  $A$  auf  $\overline{EC}$ , in dem die zweite Reflexion unter Aufhebung des Astigmatismus so erfolgt, daß das Bild in der Richtung der Achse im Unendlichen liegt.

Wir halbieren den Winkel  $FE C$  durch  $\tau_2 = \overline{EM_2}$ , errichten von  $M_2$  aus eine Senkrechte auf  $\overline{EF}$  und von deren Fußpunkt eine weitere auf  $\overline{EM_2}$ .

Das gibt den Punkt  $K$ . Die Verbindungsgerade  $\overline{FK}$  schneidet  $\overline{EC}$  in  $B$ . Hier errichten wir ein Lot auf  $\overline{EC}$ , das die Halbierende des Winkels  $ECF$  in  $D$  schneidet. Das Lot in  $D$  auf  $\overline{DC}$  schneidet die Achse im Mittelpunkt  $M_1$  der Konvexkugel und den Strahl  $\overline{EC}$  im gesuchten zweiten Reflexions-



# Geometrische Konstruktion des Spiegelkondensors, welcher bei vorgeschriebenen Reflexionswinkeln den Achsenpunkt anastigmatisch im Unendlichen abbildet.

**Fig. 3.**

punkt  $A$ . Dann ist  $\overline{AM_1} = r_1$  und  $\overline{M_2M_1} = b$ . Durch die Größen  $r_2$ ,  $r_1$  und  $b$  ist das gesuchte Spiegelsystem bestimmt.

### § 3. Sonderfall des konzentrischen Kondensors.

Für  $b = 0$  ergeben sich für Formel (3) spezielle Ausdrücke, die für konzentrische Doppelspiegel gelten. Da über  $b$  verfügt ist, können wir in diesem Spezialfall nur *einen* Umkehrpunkt  $2\alpha$  vorschreiben. Dafür muß eine analytische Beziehung zwischen den Winkeln  $i$  und  $\alpha$  bestehen. Diese bestimmt sich durch Nullsetzen von Gleichung (4) und Einsetzen des Wertes  $(r_2/r_1)$  aus (3) nach einigen Umformungen zu

$$(5) \quad \cotg \alpha + \cotg(\alpha + i) = \cotg i.$$

Löst man letztere Gleichung nach  $i$  auf, so folgt

$$(6) \quad 2 \cotg i = \cotg \alpha \pm \sqrt{5 \cotg^2 \alpha - 4}.$$

Mit Hilfe von (6) können wir den Winkel  $i$  aus Gleichung (3) eliminieren. Einfacher ist es, wenn wir aus Fig. 4 eine direkte Formel für das Radienverhältnis ablesen; es ist nämlich in diesem Sonderfall

$$(7) \quad r_2 \sin i = r_1 \cdot \sin(\alpha + i),$$

worin wir  $i$  durch Gleichung (6) eliminieren können. Das gibt

$$(8) \quad 2 \left( \frac{r_2}{r_1} \right) = 3 \cos \alpha \pm \sqrt{9 \cos^2 \alpha - 4};$$

dieselbe Formel (8) ist bereits von F. Jentzsch<sup>1)</sup> auf anderem Wege abgeleitet, ohne daß dort die merkwürdige Winkelbeziehung (5) angegeben wird.

Statt den Umkehrpunkt vorzuschreiben, kann man beim konzentrischen Kondensor für zwei *verschiedene* Konvergenzwinkel  $2\alpha$  und  $2\beta$  die Schnittweite  $z$  gleich machen. Aus Fig. 4 folgt

$$(9) \quad z \sin 2\alpha = r_2 \sin i = r_1 \sin(i + \alpha).$$

Das gibt, wenn  $r_2/r_1 = \varrho$  gesetzt wird

$$(10) \quad \tg i = \frac{\sin \alpha}{\varrho - \cos \alpha}$$

1) F. Jentzsch, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 984. 1910.

und schließlich

$$(11) \quad z = \frac{\varrho}{2 \cos \alpha \sqrt{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cdot \cos \alpha}} = \frac{\varrho}{2 \cos \beta \sqrt{1 + \varrho^2 - 2 \varrho \cdot \cos \beta}}.$$

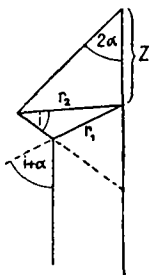
Dann wird das Radienverhältnis

$$(12) \quad \varrho = Q \pm \sqrt{Q^2 - 1},$$

worin

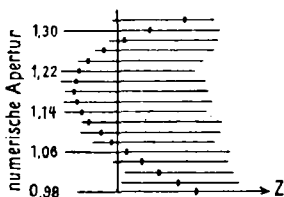
$$(13) \quad Q = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

gesetzt ist. Die Formel (12) geht natürlich für  $\alpha = \beta$  in den unter (8) gefundenen Ausdruck über.



Doppelte Reflexion  
im konzentrischen  
Kondensor.

Fig. 4.



Zwei-Strahlen-Vereinigung beim kon-  
zentrischen Kondensor. Linearvergr.  
6550 mal, mittl. Brennsw. 0,88004 mm.

Fig. 5.

Verlangt man z. B. gleiche Schnittweiten für Konvergenzwinkel, die den numerischen Aperturen  $n \cdot \sin 2\alpha$  gleich 1,0 und 1,35 entsprechen, wo  $n = 1,5166$  gesetzt sei, so wird  $2\alpha = 41^\circ, 133, 2\beta = 62^\circ, 680$  und  $\varrho = 2,24124$ .

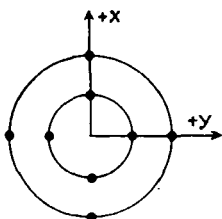
In Fig. 5 ist für denjenigen Fall des konzentrischen Kondensors der Verlauf der Schnittweiten als Funktion der numerischen Aperturen in gleicher Linearvergrößerung wie in Fig. 2 dargestellt, den Jentzsch (l. c.) bei  $\varrho = 2,26$  berechnet hat. Die Figg. 5 und 2 sind maßstäblich unmittelbar vergleichbar, da auch die mittleren Brennweiten der entsprechenden Systeme beidemale gleich gewählt sind.

Der Vergleich ergibt eine weniger ideale Brennpunkteigenschaft des konzentrischen Kondensors.

## § 4. Bestimmung der Abbildung außer der Achse.

Bekanntlich folgt aus der Brennpunkteigenschaft in der Achse nichts für die Abbildung außer der Achse. Solange die Konvergenzwinkel so klein bleiben, daß man  $\sin 2\alpha$  durch eine Reihe ersetzen kann, die nach dem zweiten Gliede abgebrochen wird, verlangt man für die Abbildung eines achsennahen Punktes bekanntlich noch Konstanz der Brennweite für alle wirksamen Zonen. Für Dunkelfeldkondensoren sind aber so große Konvergenzwinkel erforderlich, daß die Reihen nicht

mehr genügend schnell konvergieren. Über die Beschaffenheit der Abbildung außer der Achse gibt hier besser eine geeignete trigonometrische Durchrechnung Aufschluß.



Wahl der Aufpunkte in der Eintrittsöffnung des bispärischen Spiegelkondensors.

Fig. 6.

Wir zeichnen (Fig. 6) zwei kleine Kreise um die Achse, deren Radien solchen Einfallshöhen entsprechen, in denen achsenparallel einfallende Strahlen im Bildraum die im § 3 numerisch angegebenen minimalen und maximalen Konvergenzwinkel  $2\alpha$  und  $2\beta$  haben.

Als Aufpunkte nehmen wir die Punktepaare

$$\pm y, x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0, \pm x$$

je für die maximale und minimale Bildstrahlneigung an. Der Koordinatenanfang liege im Mittelpunkt der Hohlkugel.

Die  $z$ -Achse sei positiv im Sinne der Lichtbewegung. Der einfallende Strahlenzylinder sei um den Winkel  $\delta$  gegen die  $z$ -Achse geneigt. Seine Achse liege in der  $yz$ -Ebene (Haupt-einfallsebene).

Dann werden die vier Strahlen, deren Aufpunkte  $y = 0$  haben, so gespiegelt, daß ihre Bildstrahlen windschief zu den Objektstrahlen liegen. Schließlich schneiden sich je zwei von ihnen, deren Aufpunkte sich nur durch das Vorzeichen von  $x$  unterscheiden, im Bildraum in der  $yz$ -Ebene, was aus Symmetriegründen folgt.

Die Koordinaten dieser Schnittpunkte lassen sich aus den Konstanten des Spiegelsystems leicht berechnen. Es ergibt sich:

$$(14) \quad y_m = \frac{-\sin \delta}{2 C(GH - 1) - H} \quad \text{und} \quad z_m = \frac{A \cos \delta}{2 C(GH - 1) - H},$$

worin

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2b \cos(i + \alpha), \\ B &= A^2 + b^2 - r^2, \\ C &= \cos \delta \cdot \cos(i + \alpha), \\ D &= \cos \delta \cdot \cos 2(i + \alpha), \\ E &= bD - C, \\ F &= E^2 - B, \\ G &= -E + \sqrt{F}, \\ H &= \frac{2\sqrt{F}}{r^2} \end{aligned}$$

zur Abkürzung gesetzt sind und  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = r$  gewählt ist, was keine Beschränkung bedeutet. Für die Wurzel ist das Vorzeichen zu wählen, das den absoluten Betrag von  $G$  am kleinsten macht.

Wir erhalten zu den vier Aufpunkten mit  $y = 0$  für die maximale bzw. die minimale Bildstrahlneigung je einen Bildpunkt in der  $yz$ -Ebene, den wir als  $s_a$  bzw.  $s_i$  bezeichnen wollen.

Die vier Strahlen, die zu den Aufpunkten mit  $x = 0$  gehören, verändern ihre Ebene bei den beiden Reflexionen nicht. Je zwei Bildstrahlen mit maximaler bzw. minimaler Neigung geben einen gemeinsamen Schnittpunkt, den wir mit  $m_a$  bzw.  $m_i$  bezeichnen wollen.

Die Abschnitte des Bildstrahles auf den Koordinatenachsen findet man aus:

$$(15) \quad y_q = z_q \cdot \operatorname{tg}(2\alpha + 2\varepsilon - \delta) \quad \text{und} \quad z_q = z - z_0,$$

worin

$$\begin{aligned} 2z_0 &= \left( \frac{r \sin i}{\sin 2\alpha} \right)_a + \left( \frac{r \sin i}{\sin 2\alpha} \right)_i, \\ z &= \frac{r \sin(i - \varepsilon)}{\sin(2\alpha + 2\varepsilon - \delta)}, \\ \sin(i - \varepsilon) &= \frac{d \sin[2(i - \alpha) - \delta]}{r}, \\ d &= c - b \end{aligned}$$

und

$$c = \frac{\sin(i + \alpha - \delta)}{\sin[2(i + \alpha) - \delta]}$$

gesetzt sind.

In (14) und (15) ist  $b$  positiv zu nehmen, wenn der Mittelpunkt der Konvexkugel im Sinne der Lichtbewegung gegen

den der Hohlkugel verschoben ist. Für die beiden Strahlen, deren Aufpunkte negative  $y$  Ordinate haben, rechnet man mit negativem  $\delta$ .

*Wir beschreiben also das Bild, das durch den unter dem Winkel  $\delta$  gegen die Achse auf das bispärische Spiegelsystem einfallenden Strahlenzylinder erzeugt wird, durch vier Punkte  $s_a$ ,  $s_i$  und  $m_a$ ,  $m_i$  in der  $yz$ -Ebene, welche Schnittpunkte der acht Objektstrahlen sind, die durch die ausgewählten Aufpunkte der Fig. 6 gehen.*

Da wir nur zwei Variable,  $r$  und  $b$ , haben, können wir durch passende Wahl derselben bei vorgeschriebenem  $(2\alpha)_{\max.}$  und  $(2\alpha)_{\min.}$  und  $\delta$  allgemein nur erreichen, daß zwei dieser Punkte zusammenfallen. Denn zu jedem gehören zwei Koordinaten. Die Streuung, die durch das Auseinanderfallen der beiden anderen Punkte entsteht, ist numerisch nach den Formeln (14) und (15) zu berechnen.

Ehe man dieselben anwendet, hat man durch eine Interpolationsrechnung für ein zu untersuchendes Wertepaar  $r, b$  die beiden ersten Einfallswinkel ( $i + \alpha$ ) zu bestimmen, die für achsenparallel einfallende Strahlen die vorgeschriebenen  $2\alpha$ -Werte geben. Das erst ermöglicht den Vergleich verschiedener Wertepaare bei gleicher Bildstrahlneigung.

*Die numerische Rechnung lehrt, daß die Lage der Punkte  $m_a$  und  $m_i$  mit wachsendem  $b$  bei konstantem  $r$  sich so verschiebt, daß sich  $m_i$  entgegengesetzt der Lichtbewegung gegen  $m_a$  bewegt. Bei konstantem  $b$  und abnehmendem  $r$  bewegt sich der Punkt  $m_a$  im Sinne der positiven  $y$ -Achse gegen  $m_i$ . Dasselbe gilt für die relative Lage von  $s_a$  zu  $s_i$ . Dabei ist vorausgesetzt, daß man bei dieser Überlegung von solchen Wertepaaren  $r, b$  ausgeht, für welche die Punktepaaire annähernd gleiche  $z$ -Ordinate haben.*

Die vier Punkte bewegen sich also bei variablem  $r$  und  $b$  auf Kurven, die sich paarweise annähernd rechtwinklig schneiden. Dabei wird der Schnittpunkt der Kurven, auf denen sich  $m_a$  und  $m_i$  bewegen, für merklich kleinere Radienverhältnisse  $r$  erreicht, als der Schnittpunkt der Kurven, auf denen sich  $s_a$  und  $s_i$  bewegen.

Gehen wir von dem Radienverhältnis aus, für welches  $s_a$  und  $s_i$  zusammenfallen, so erhalten wir für  $m_a$  eine größere

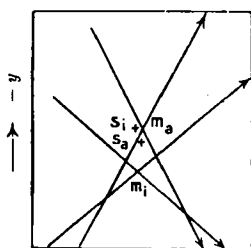


und für  $m_i$  eine kleinere  $y$ -Ordinate, als jenem Doppelpunkt entspricht (vgl. Fig. 8).

Bei abnehmendem Radienverhältnis und solchen  $b$ -Werten, für welche die vier Punkte gleiche  $z$ -Ordinaten erhalten, rücken die beiden Punkte  $m_a$  und  $m_i$  näher zusammen, dagegen  $s_a$  und  $s_i$  auseinander. Dabei rückt  $s_i$  im Sinne der negativen  $y$ -Achse von  $s_a$  ab und beide im gleichen Sinne gegen die Punkte  $m_a$  und  $m_i$ . Daher erhält der Schnittpunkt der Kurven  $m_a$  und  $m_i$  eine absolut genommen kleinere Ordinate, als die im Sinne der negativen  $y$ -Achse fortbewegten Punkte  $s_a$  und  $s_i$  (vgl. Fig. 7).

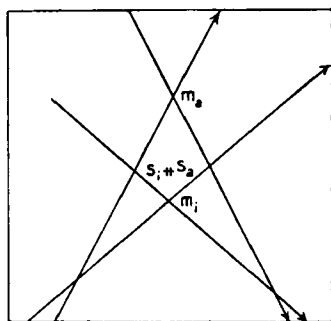
### § 5. Numerisches Beispiel.

Für die im § 3 genannten Konvergenzwinkel und  $\delta = 1^\circ$  ergibt sich z. B. als günstigstes Radienverhältnis  $r = 1,9464$  mit



Strahlenvereinigung 1 Grad außer der Achse mit geringster Streuung (ca.  $\frac{1}{20}$  Grad). Linearvergrößerung 6620 mal, mittlere Brennweite 0,88004 mm.

Fig. 7.



Strahlenvereinigung 1 Grad außer der Achse im konzentrischen Spiegelkondensor. Streuung ca.  $\frac{1}{2}$  Grad. Linearvergrößerung 6620 mal, mittlere Brennweite 0,88004 mm.

Fig. 8.

$b = 0,027943$ . Diesem Wertepaar entspricht die Fig. 7, welche die Schnittpunkte in der  $yz$ -Ebene für  $r_1 = 0,94242$  mm gibt.

Dieser bisphärische Spiegelkondensor hat also für ein Grad außer der Achse im Aperturintervall 1,0—1,35 eine Streuung, welche in der Einfallsebene der Strahlen etwa  $\frac{1}{20}$  Grad beträgt, aber senkrecht dazu verschwindet, weil die vier Bildpunkte nahezu gleiche  $z$ -Ordinate haben.

Zum Vergleich zeichnen wir in Fig. 8 bei gleicher Linearvergrößerung wie in Fig. 7 die Streuung, welche der konzentrische Spiegelkondensor mit dem Radienverhältnis 2,24124 in diesem Falle zeigt. Wie die Figg. 2 und 5, so sind auch die Figg. 7 und 8 unmittelbar maßstäblich vergleichbar, da die mittleren Brennweiten beidemal gleich 0,88004 gewählt sind. Der Vergleich zeigt, daß die Streuung beim konzentrischen Kondensor mehr als das Doppelte beträgt.

Es ist also auch außerhalb der Achse der konzentrische Kondensor nicht das beste bispärische Spiegelsystem. Dies Ergebnis steht im Gegensatz zu einer von anderer Seite (l. c. p. 984) ausgesprochenen Vermutung.

#### § 6. Zusammenfassung.

Das Resultat der Rechnungen ist, daß sich aus Kugelflächen keine Doppelspiegel für *Dunkelfeldbeleuchtung* herstellen lassen, die bis zum Bereiche von einem Grad, d. h. einem Gesichtsfelddurchmesser von zwei Grad, außer der Achse besser als auf etwa  $\frac{1}{20}$  Grad korrigiert sind. Dagegen läßt sich senkrecht zur Haupteinfallsebene die Streuung in der Bildebene zum Verschwinden bringen. Für die meisten praktischen Bedürfnisse in der Ultramikroskopie dürfte dies genügen.

Natürlich läßt sich diese Streuung bei Beschränkung auf kleinere Konvergenzwinkel, als für Ultramikroskopie üblich sind und bei Verkleinerung der Winkeldifferenz zwischen den maximalen und minimalen Konvergenzen merklich verkleinern.

Mit dieser Beschränkung kann man z. B. eine Anwendung dieser bispärischen Spiegelsysteme für *astronomische* Zwecke machen, über die Verfasser später zu berichten hofft.

Ich benutze diese Gelegenheit, meinem Kollegen, Hrn. Dr. Sonnefeld, für freundliche Prüfung einiger Rechnungen zu dieser Arbeit verbindlichen Dank auszusprechen.

Jena, im August 1912.

(Eingegangen 6. September 1912.)