DIE THEORIE DER REGULÄREN GRAPHS

VON

JULIUS PETERSEN
in KOPENHAGEN.

1. In seinem Beweise für die Endlichkeit des einer binären Form zugehörigen Invariantensystems (Mathematische Annalen, Bd. 33) stützt Hr. HILBERT sich auf einen von Hrn. GORDAN aufgestellten Satz, betreffend eine gewisse Classe diophantischer Gleichungen. Aus diesem Satze folgt, dass man, wenn n gegeben ist, eine endliche Anzahl Producte von der Form

$$(x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta (x_2 - x_3)^\gamma \ldots (x_{n-1} - x_n)^\varepsilon$$

bilden kann, so dass alle andere Producte derselben Form sich aus den gebildeten durch Multiplication zusammensetzen lassen. Die Producte sind dadurch characterisirt, dass die Exponenten positive, ganze Zahlen (Null mitgerechnet) sind, und dass der Grad in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für jedes Product derselbe ist. Die gebildeten Producte werden wir *Grundfactoren* nennen; sie entsprechen den Grundlösungen der diophantischen Gleichungen. Ist z. B. $n = 3$, so muss man $\alpha = \beta = \gamma$ haben, und der einzige Grundfactor ist

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Für den Beweis des Hrn. HILBERT ist die Endlichkeit der Anzahl von Grundfactoren ausreichend; für fernere Untersuchungen wird aber die wirkliche Bestimmung dieser Ausdrücke von Bedeutung sein; diese Bestimmung ist der Zweck der folgenden Betrachtungen. Es zeigt sich ein merkwürdiger Unterschied, nachdem der Grad in den einzelnen Buchstaben (der mit dem Grade der entsprechenden Invariante übereinstimmt), gerade oder ungerade ist. Im ersteren Falle (und nur dieser kommt bei Grundformen ungerader Ordnung vor) stellt sich heraus, dass alle Grundfactoren von dem ersten oder zweiten Grade sind (in den einzelnen Buchstaben); im zweiten, der bei weitem der schwierigere ist, giebt es dagegen Grundfactoren die, für hinlänglich grosses n, von jedem Grade sein können. Der einfachste ist vom dritten Grade für $n = 10$; er ist erst von Hrn. SYLVESTER bemerkt, der gleichzeitig mit mir die Frage nach den Grundfactoren in Angriff genommen hat, und mit dem ich vielfach darüber verkehrt habe. Obgleich wir die Beantwortung der Frage auf ganz verschiedenem Wege gesucht haben, habe ich doch seinen Mittheilungen eine Erregung zu verdanken, ohne die ich vielleicht längst von den grossen Schwierigkeiten, die sich für jeden Schritt darbieten, ermüdet worden wäre.

2. Man kann der Aufgabe eine geometrische Form geben, indem man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch beliebige Punkte der Ebene repräsentirt, während der Factor $x_m - x_p$ durch eine beliebige Verbindungslinie zwischen x_m und x_p dargestellt wird. Man erhält so für das Product eine Figur, welche aus n Punkten besteht, die so verbunden sind, dass in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Dieselben zwei Punkte können durch mehrere Linien verbunden sein. Als Beispiel betrachte man die Figur 1, die das Product

$$(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$

darstellt.

Englische Verfasser haben für ähnliche Figuren den Namen *graph* eingeführt; ich werde diesen Namen beibehalten und nenne den *graph* regulär, weil in jedem Punkte gleich viele Linien zusammenlaufen. Für Halbinvarianten würden irreguläre *graphs* in Betracht kommen, was doch hier nicht näher besprochen werden soll.

Durch die *Ordnung* eines *graphs* werde ich die Anzahl der Punkte (die Ordnung der binären Grundform) verstehen, durch den *Grad* die Anzahl der in jedem Punkte zusammenlaufenden Linien (den Grad der entsprechenden Invariante). Durch G_α^n oder einfach G_α werde ich einen *graph* von der Ordnung n und vom Grade α verstehen. Ein solcher lässt sich zerlegen oder in Factoren auflösen, wenn man andere *graphs* von derselben Ordnung aber von niedrigerem Grade finden kann, die durch

Überlagerung den gegebenen *graph* herstellen. Ein *graph,* der sich nicht in solcher Weise auflösen lässt, heisst *primitiv.* Unsere Aufgabe geht auf die Bestimmung aller primitiven *graphs* aus.

Sind die Punkte $a, b, c, \ldots,$ und bezeichnen wir die Verbindungslinien durch $ab, ac, bc, \ldots,$ den *graph* durch $(ab)^{\alpha}(bc)^{\beta}, \ldots,$ dann wird in diesem Ausdrucke jeder Buchstabe gleich oft vorkommen, indem die Exponenten berücksichtigt werden.

Gewöhnlich setzen wir voraus, dass der *graph* nicht von *graphs* niedrigerer Ordnung zusammengesetzt ist, das ist, dass er nicht aus Theilen besteht, die unter sich nicht verbunden sind.

Graphs von geradem Grade.

3. *Ein graph zweiten Grades besteht aus geschlossenen Polygonen; sind diese alle von gerader Seitenanzahl, so lässt sich der graph in zwei Factoren ersten Grades zerlegen; in allen anderen Fällen ist er primitiv.*

Wir können nämlich von einem beliebigen Punkte a ausgehen und einer Linie ab folgen; in b laufen zwei Linien zusammen; wir können daher den Weg von b aus z. B. nach c fortsetzen; indem wir so fortfahren und keine Linie mehr als einmal durchlaufen, müssen wir wieder nach a kommen und haben so ein geschlossenes Polygon gefunden; finden sich noch mehrere Linien im *graph,* werden diese in derselben Weise behandelt; am Ende haben wir dann alle Linien des *graphs* als Seiten geschlossener Polygone geordnet. Unter diesen können Zweiecke (Doppellinien) vorkommen.

Bekommen wir in der angegebenen Weise nur ein Polygon, und hat dieses eine gerade Anzahl von Seiten, dann lässt der *graph* sich in zwei Factoren ersten Grades zerlegen, indem die erste, dritte, fünfte, ... Linie zusammengenommen einen *graph* ersten Grades bilden, während dasselbe von den übrigen Seiten gilt. Besteht der *graph* aus p Polygonen, die alle eine gerade Anzahl von Seiten haben, und nehmen wir von jedem der Polygone die Hälfte der Seiten in der angegebenen Weise, dann wird der *graph* zerlegt und zwar durch verschiedene Combination der Polygontheile in 2^{p-1} verschiedenen Weisen. Sind nicht alle Polygone von gerader Seitenanzahl, dann ist der *graph,* wie man leicht sieht, primitiv.

4. Wir wollen annehmen, dass ein *graph* von beliebigem Grade $\alpha + \beta$ sich auf zwei verschiedene Weisen in zwei andere von den Graden α und β zerlegen lässt. Der Überschaulichkeit wegen machen wir die Linien des ersten blau, die Linien des zweiten roth, so dass in jedem Punkte α blaue und β rothe Linien zusammenlaufen. Die zweite Zerlegung muss sich aus der ersten bilden lassen, indem gewisse Linien der zwei Factoren vertauscht werden, das ist, indem gewisse rothe Linien blau und gewisse blaue Linien roth gemacht werden. Diese zwei Systeme von Linien müssen, mit Buchstaben geschrieben $[(ab)^{\alpha}(bc)^{\beta}\ldots]$ dieselben Buchstaben gleich oft enthalten, da die Vertauschung die Anzahl Male, in denen jeder Buchstabe in jedem der Factoren vorkommt, nicht ändern darf. Findet man nun z. B. ab unter den blauen vertauschten Linien, dann muss man unter den rothen b z. B. in bc finden, dann wieder unter den blauen c z. B. in cd und so weiter, bis man a unter den rothen findet. Die Linien, welche vertauscht werden sollen, müssen daher ein oder mehrere geschlossene Polygone bilden, in denen die Seiten abwechselnd roth und blau sind, und die daher alle von gerader Seitenanzahl sind. Die zweite Zerlegung wird erreicht, wenn wir in den besprochenen Polygonen die Farben überall verändern. (Fig. 2 und 3.)

Solche Polygone werde ich *Wechselpolygone* nennen, während eine *Wechsellinie* oder ein *Wechselweg* eine offene polygonale Linie, wo die Seiten abwechselnd roth und blau sind, bedeutet.

Wir haben so den Satz gewonnen:

Wenn ein beliebiger graph sich in mehreren Weisen in zwei Factoren von gegebenen Graden zerlegen lässt (einen blauen und einen rothen), *dann lässt sich jede Zerlegung aus jeder anderen bilden, indem die Seiten gewisser Wechselpolygone ihre Farben verändern.*

Ebenso ist leicht ersichtlich, dass:

Wenn ein beliebiger graph in zwei Factoren zerlegt ist und sich auf der Figur ein Wechselpolygon findet, dann erhält man eine neue Zerlegung, wenn man die Farben aller Seiten des Wechselpolygons verändert.

5. *Jeder graph geraden Grades lässt sich in einem geschlossenen Zuge zeichnen, vorausgesetzt dass er nicht aus Theilen ohne Verbindung besteht.*

Um diesen Satz zu beweisen folgen wir continuirlich den Linien, indem wir von einem beliebigen der Punkte, a, ausgehen und in beliebiger Weise fortschreiten, nur dass keine Linie mehr als einmal durchgelaufen werden darf. Jedes Mal, wenn wir einen Punkt passiren, durchlaufen wir zwei der im Punkte zusammenstossenden Linien, während eine gerade Anzahl (Null mitgerechnet) noch nicht durchgelaufener zurückbleibt. Wenn wir nicht weiter kommen können, müssen wir daher in a sein und alle davon auslaufende Linien passirt haben. Wir haben so einen geschlossenen Zug gebildet. Sind alle darin vorkommende Punkte so oft wie möglich passirt, dann haben wir den ganzen *graph* durchgelaufen, da im anderen Falle ein Theil des *graphs* existierte, der mit dem übrigen Theil ohne Verbindung war.

Ist beim Zuge ein Punkt b zwar passiert, aber nicht so oft wie möglich, dann können wir den Zug bei b öffnen und das eine Ende über b hinaus fortsetzen, bis wir in b wieder den vergrösserten Zug schliessen, wenn alle von b auslaufende Linien passiert sind; in dieser Weise können wir den Zug immer erweitern, bis er alle Linien des *graphs* enthält.

Besteht der *graph* aus mehreren nicht unter sich verbundenen Theilen, so bekommen wir so viele Züge als Theile da sind. Ist dieses nicht der Fall, so zeichnen wir ein geschlossenes Polygon wo die Seiten sich wie im Zuge folgen und wie auf der ursprünglichen Figur bezeichnet werden. War diese vom Grade 2α, dann wird an den Ecken des gezeichneten Polygons jeder der Buchstaben α Mal vorkommen. Dieses Polygon werden wir *den ausgestreckten graph* nennen.

Als Beispiel können wir Fig. 4 betrachten; wir machen hier den Zug

$$ab\ be\ ec\ ca\ ab\ bd\ da.$$

Öffnen wir bei d, können wir hier den Zug

$$dc\ ce\ ed$$

einschalten, und wir können dann den ausgestreckten *graph* (Fig. 5) zeichnen.

Man sieht übrigens leicht, dass der bewiesene Satz auch für nicht reguläre *graphs* gilt, wenn nur in jedem Punkte eine gerade Anzahl von Linien zusammenlaufen. So gilt der Satz z. B. für jede algebraische

Curve, die nicht aus Theilen ohne Verbindung unter sich besteht und mit einer geeigneten Auffassung von unendlichen Zweigen.

6. *Jeder graph vierten Grades lässt sich in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen.*

Wird der *graph* (Fig. 4) in der oben entwickelten Weise ausgestreckt, dann erhalten wir ein Polygon (Fig. 5), wo jeder Buchstabe des *graphs* an den Ecken zweimal vorkommt, und welches eine gerade Anzahl von Seiten hat. Farben wir jetzt die Seiten dieses Polygons abwechselnd blau und roth, so sind die Endpunkte der rothen und die Endpunkte der blauen mit denselben Buchstaben bezeichnet, so das jeder Buchstabe bei den blauen zwei Mal vorkommt. Führen wir die Farben der Linien auf den *graph* hinüber, müssen folglich in jedem Punkte zwei rothe und zwei blaue Linien zusammenlaufen (Fig. 6). Der *graph* ist daher in zwei Factoren zweiten Grades zerlegt.

In derselben Weise kann jeder *graph* G_{2a} in zwei Factoren G_a zerlegt werden, wenn nur die ganze Anzahl der Linien gerade ist, dass heisst, wenn nicht α und n beide ungerade sind. Ist dies der Fall, dann ist die genannte Zerlegung unmöglich, da kein *graph* von ungerader Ordnung und ungeradem Grade existiert. Es ist vorausgesetzt, dass der *graph* nicht aus nichtverbundenen Theilen besteht.

7. Aus einem *graph* geraden Grades G_{2a} können wir einen neuen G'_{2a} bilden, indem wir zwei nicht zusammenstossende Linien *ab* und *cd* entfernen und für diese zwei neue Linien *ac* und *bd* oder *ad* und *bc* hineinsetzen. Finden sich mehrere Linien *ab*, so wird nur die eine entfernt. Ob eine zugesetzte Linie sich schon im *graph* findet, ist ohne Bedeutung; sie bekommt dann eine um eins erhöhte Multiplicität. Ich werde die zwei *graphs gepaart* nennen.

Wenn von zwei gepaarten graphs der eine sich in Factoren zweiten Grades zerlegen lässt, dann lässt sich der andere in eben solche Factoren zerlegen.

Um diesen Satz zu beweisen, denken wir uns, dass G_{2a} in Factoren zweiten Grades zerlegt ist. Finden sich nun *ab* und *cd* in demselben

Factor zweiten Grades, dann geht dieser durch die Änderung in einen neuen *graph* zweiten Grades über, während die übrigen Factoren (die auch *ab* und *cd* enthalten können) ungeändert bleiben. G'_{2a} ist somit in Factoren zweiten Grades zerlegt. Finden sich aber *ab* und *cd* in zwei verschiedenen der Factoren, dann bilden wir aus diesen zwei ihr Product, welches vom vierten Grade ist. Gehen wir jetzt zu G'_{2a} über, indem wir die Änderung ausführen, dann geht der Factor vierten Grades in einen neuen Factor vierten Grades über, während alle Factoren zweiten Grades ungeändert bleiben. Nun lässt sich aber, wie oben gezeigt, jeder *graph* vierten Grades in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen. G'_{2a} lässt sich also auch in diesem Falle in Factoren zweiten Grades zerlegen.

8. *Durch successive Anwendung der in 7 besprochenen Änderung lässt sich jeder graph in jeden anderen von derselben Ordnung und demselben Grad überführen.*

Wir denken uns, dass wir einen gegebenen *graph* in einen anderen, der den Factor zweiten Grades $ab\ bc\ cd\ de\ ef \ldots ka$ enthält, überführen wollen. Wir denken uns ferner, dass wir in dem gegebenen *graph* die Linien ab, bc, cd aber nicht de finden. Alle von d und e ausgehende Linien können nicht in einen Punkt zusammenlaufen; wir müssen daher zwei Linien dg und eh finden können, wo g und h verschiedene Punkte sind. Wir setzen dann de und gh statt dg und eh und haben so de eingeführt; ist cd mehrfach, dann ist es gleichgültig, ob g in c fällt; ist cd dagegen einfach, dürfen wir nicht g in c nehmen, um nicht die schon eingeführte Linie cd zu entfernen. Da die übrigen von d und e ausgehenden Linien nicht in einen Punkt zusammenlaufen können, ist es aber immer möglich für g einen anderen Punkt als c zu wählen. Wir sehen also, dass es immer möglich ist eine neue der gewünschten Linien einzuführen, ohne eine von den schon eingeführten Linien zu entfernen; wir können dann in dieser Weise fortsetzen, bis wir den gegebenen Factor zweiten Grades in dem gebildeten *graph* finden. Wir entfernen jetzt vorläufig diesen Factor und behalten zurück einen *graph*, der wieder so geändert werden kann, dass ein beliebig gegebener Factor zweiten Grades eingeführt wird. Indem wir in dieser Weise fortfahren, bekommen wir zuletzt einen *graph*, der von beliebig gewählten Factoren zweiten Grades zusammengesetzt ist. Ein anderer *graph* von derselben Ordnung und Grad lässt sich auch in diesen und daher auch in den ersten überführen.

9. *Jeder graph geraden Grades lässt sich in Factoren zweiten Grades zerlegen.*

Wir haben nämlich in 8 gesehen, dass wir eine Reihe *graphs* bilden können, die mit einem beliebig gegebenen anfängt und mit einem in Factoren zweiten Grades zerlegten endigt, und von denen jede zwei nach einander folgende gepaart sind. Zufolge des in 7 bewiesenen Satzes sind dann alle *graphs* in der ganzen Reihe in Factoren zweiten Grades zerlegbar.

Wir haben so das erste Ziel [1] unserer Untersuchungen erreicht, indem wir bewiesen haben, dass wenn wir alle *graphs* ersten Grades und alle primitive *graphs* zweiten Grades bilden, dann lassen sich aus diesen alle anderen von geradem Grade durch Überlagerung (Multiplication) bilden. Daraus folgt, dass die Grundlösungen der diophantischen Gleichungen, durch welche die Exponenten (die Multiplicität der Linien) bestimmt werden, in dem betrachteten Falle nur die Zahlen 0, 1 und 2 sein können.

Wir werden die primitiven *graphs* für die ersten Werthe von n aufstellen. Für $n = 2$ bekommen wir eine einzelne Linie, für $n = 3$, wie Seite 193 angeführt, ein Dreieck; für $n = 4$, zwei einzelne Linien, entsprechend $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$ und den zwei Produkten, die hieraus durch Vertauschung der Buchstaben gebildet werden können. Die *graphs* von ungeradem Grade geben, was später gezeigt werden soll, zu keinen neuen primitiven *graphs* Veranlassung, so lange $n < 10$. Für $n = 5$ giebt es zwei primitive Formen der *graphs*, die eine das Fünfeck, die andere aus einem Dreiecke und einem Zweiecke zusammengesetzt. Für $n = 6$ ist der von zwei Dreiecken zusammengesetzte *graph* zweiten Grades primitiv, während die übrigen vom zweiten Grade sich zerlegen lassen u. s. w.

10. Ein *graph* vierten Grades lässt sich, wie wir gezeigt haben, immer in zwei Factoren zweiten Grades zerlegen, und zwar im Allgemeinen in verschiedenen Weisen, da die durch Farbung der Linien zer-

---

[1] Mein Beweis war ursprünglich nicht ganz so einfach wie jetzt; die Verbesserung verdanke ich dem Hrn. Direktor Bing.

legte Figur gewöhnlich viele Wechselpolygone enthalten wird. Ich werde beweisen, dass man, einige sehr specielle Fälle ausgenommen, immer zwei beliebige der Linien wählen kann und zwei Zerlegungen der Art bewerkstelligen, dass die zwei Linien sich bei der einen Zerlegung in demselben, bei der anderen in verschiedenen Factoren finden. Mit anderen Worten, wir können in einem zerlegten *graph* ein Wechselpolygon finden, in dem eine beliebig gewählte Linie Seite, eine andere beliebig gewählte Linie nicht Seite ist. Ein solches Polygon wird uns nämlich erlauben die Farbe der einen Linie zu verändern, während die Farbe der anderen ungeändert bleibt. Die Ausnahmefälle treten dann ein, wenn jedes Wechselpolygon, welches die eine Linie als Seite hat, auch die andere als Seite haben muss, so dass beide Linien gleichzeitig die Farben verändern müssen. Ich werde zwei Linien mit dieser Eigenschaft *gepaart* nennen. Sie können dieselbe oder verschiedene Farben haben. Das gepaarte Linien vorkommen können, ersehen wir durch die folgende Überlegung.

Ein *graph* zweiten Grades, also auch ein *graph* vierten Grades, ist von geschlossenen Polygonen zusammengesetzt, wo alle Seiten eines Polygons dieselbe Farbe haben. Eine oder mehrere beliebige, geschlossene Curven müssen jedes der Polygone eine gerade Anzahl Male schneiden (Null mitgerechnet). Wenn daher der *graph* aus zwei Theilen besteht, die unter sich nur durch zwei Linien verbunden sind, müssen diese zu demselben Polygone gehören und daher dieselbe Farbe haben. Zwei solche Linien sind also gepaart. Überhaupt muss jede geschlossene Curve eine gerade Anzahl rother und eine gerade Anzahl blauer Linien schneiden. Wir wollen annehmen, dass wir eine oder mehrere geschlossene Curven der Art zeichnen können, dass die Anzahl der Schnittpunkte mit den Linien des *graphs* für zwei der Linien eine gerade (Null mitgerechnet), für die übrigen eine ungerade ist. Wir können dann beweisen, dass die zwei Linien gepaart sind.

1) n gerade. Ist die Seitenanzahl des Polygons zu dem die eine Linie gehört, gerade, dann muss die zweite Linie zu demselben Polygon gehören, da die ganze Anzahl von Schnittpunkten mit allen Seiten des Polygons gerade ist. Ist die Seitenanzahl des Polygons ungerade, muss es noch ein Polygon mit ungerader Seitenanzahl und von derselben Farbe geben; die zweite Linie muss dann zu diesem Polygone gehören. In beiden Fällen müssen die zwei Linien gepaart und von derselben Farbe

sein. Im ersten Falle sind die Polygone alle von gerader Seitenanzahl und der *graph* lässt sich also in Factoren ersten Grades zerlegen; im zweiten Falle sind alle rothe oder alle blaue Polygone von gerader Seitenanzahl, so dass der eine Factor sich zerlegen lässt.

2) n ungerade. Es müssen wenigstens ein rothes und ein blaues Polygon von ungerader Seitenanzahl vorkommen, und in jedem von diesen muss eine der Linien Seite sein. Die zwei Linien sind also gepaart und haben verschiedene Farben.

Es entsteht die Frage ob die hier gefundenen hinlänglichen Bedingungen auch notwendig sind; diese Frage wird später beantwortet.

Kann man eine oder mehrere Curven der Art zeichnen, dass für jede Linie die Anzahl der Schnittpunkte eine ungerade ist, so kann von den Polygonen keines eine ungerade Seitenanzahl haben; der *graph* lässt sich dann, wie früher gezeigt, in vier Factoren ersten Grades zerlegen. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren.

Wir wollen annehmen, dass wir eine Anzahl geschlossener Curven der Art gezeichnet haben, dass die Anzahl der Linien, die eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten haben, so gross wie möglich ist. Die Curven theilen die Ebene in Flächenstücke, die wir uns abwechselnd als schwarz oder weiss denken wollen.[1] Gehen wir continuirlich von einem Stück in ein anderes über, dann müssen wir die Curven eine gerade oder eine ungerade Anzahl Male passieren, je nachdem die zwei Flächenstücke ähnlich oder verschieden gefarbt sind. Wir wollen dieses benützen, um einem *graph* eine mehr überschauliche Form zu geben. Wir ziehen eine Gerade und setzen die Punkte des *graphs,* deren Lage ja ohne Bedeutung ist, auf der einen oder der andern Seite der Geraden ab, je nachdem sie ursprünglich in einem weissen oder einem schwarzen Flächentheil liegen. Ziehen wir nun die Verbindungslinien, so werden diese von der Geraden einmal oder gar nicht geschnitten, je nachdem ihre ursprüngliche Anzahl von Schnittpunkten ungerade oder gerade war, denn wenn Schnittpunkte durch continuirliche Änderung zum Verschwinden gebracht werden, müssen sie immer zu Paaren verschwinden. Wir ersehen hieraus, dass die Bedingung dafür, dass alle Linien mit den Curven eine ungerade Anzahl

[1] Dass dieses möglich ist, beweist man leicht, indem man bei kleinen Änderungen der Curven bewerkstelligen kann, dass diese sich nicht schneiden.

von Schnittpunkten bekommen können, ist, dass die Punkte des *graphs* in zwei solche Systeme zerfallen, das Punkte des einen Systems nur mit Punkten des anderen Systems verbunden sind.

11. Wir wollen jetzt die Bedingung dafür suchen, dass zwei Linien des *graphs* ab und cd gepaart sind. Um diese zu finden, zeichnen wir den *graph* ausgestreckt und erhalten dadurch ein geschlossenes Polygon mit abwechselnd rothen und blauen Seiten. Die Ecken sind mit den Buchstaben des *graphs* $a, b, c, \ldots$ bezeichnet, und jeder der Buchstaben findet sich bei zwei Ecken. Wir ziehen dann die *Verbindungslinien* (Fig. 7) $aa, bb, cc, \ldots$ und nennen diese *gerade* oder *ungerade,* je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl Seiten des Polygons abschneiden. Bei den geraden endigen die abgeschnittenen Theile mit Linien verschiedener Farbe, bei den ungeraden mit Linien derselben Farbe.

Wir können auf unserer Figur alle Wechselwege des gegebenen *graphs* verfolgen. Wir haben nur dem Umkreise des Polygons zu folgen, doch so, dass wir von jedem Punkte zu dem anderen Ende seiner Verbindungslinie hinüberspringen können, um von dort aus mit der passenden Farbe weiter zu gehen. Wir bemerken, dass die Richtung, in der wir das Polygon umkreisen, durch einen solchen Sprung geändert oder nicht geändert wird, je nachdem die Verbindungslinie ungerade oder gerade ist.

Wenn wir jetzt untersuchen wollen, ob ab und cd gepaart sind, dann ziehen wir quer über das Polygon eine Linie, welche ab und cd schneidet, und die wir die *Querlinie* nennen wollen. (Fig. 7.)

Wenn die Querlinie keine Verbindungslinie schneidet, so sind ab und cd gepaart, denn der *graph* besteht dann aus zwei Theilen, die nur durch ab und cd verbunden sind.

Wenn die Querlinie eine gerade Verbindungslinie z. B. mm schneidet, dann sind ab und cd nicht gepaart.

Wir können nämlich von a aus über b und weiter nach m gehen und dann über die Verbindungslinie nach der zweiten Ecke m springen; da mm gerade ist, wird die Umlaufsrichtung nicht geändert, und wir können daher weiter zu a dem Umkreise folgen. Wir haben dann ein Wechselpolygon ama gebildet, in dem ab aber nicht cd Seite ist. Die zwei Linien können daher nicht gepaart sein.

Wenn die Querlinie alle ungeraden und keine gerade Verbindungslinie schneidet, dann sind ab und cd gepaart.

Wenn wir nämlich wie oben mit *ab* anfangen, können wir mit einem Wechselweg, ohne *cd* zu passieren, nie nach *a* kommen. Wir müssen nämlich, um von *b* aus nach *a*, also auf die andere Seite der Querlinie, zu kommen, eine ungerade Anzahl von ungeraden Verbindungslinien passiren. Wie wir auch gehen, müssen wir daher jedesmal, wenn wir uns auf derselben Seite der Querlinie wie *a* befinden, in der Richtung von *a* weg fortschreiten. In jedem Wechselpolygon, wo *ab* Seite ist, muss daher auch *cd* Seite sein, das heisst, die zwei Linien sind gepaart.

Wir haben so eine ausreichende Bedingung dafür gefunden, dass *ab* und *cd* gepaart sind und werden jetzt beweisen dass, mit einer speciellen Ausnahme, die Bedingung auch notwendig ist. Um diesen Beweis zu erleichtern, wollen wir erst eine Bemerkung thun.

Eine ungerade Verbindungslinie schneidet vom Polygon ein Stück ab, dessen äusserste Seiten dieselben Farben haben. Wir wollen ein solches Stück umkehren, so dass die zwei Endpunkte ihren Platz vertauschen; wir haben dadurch die Linien des *graphs* im ausgestreckten *graph* eine neue Ordnung gegeben, ohne dass die Farben dadurch verändert sind. Das Umkehren hat aber den Einfluss gehabt, dass jede Verbindungslinie zwischen einem Punkte des umgekehrten Stückes und einem nicht zu diesem gehörigen Punkte ihre Natur gewechselt hat, so dass die geraden ungerade, die ungeraden gerade geworden sind. Wird z. B. (Fig. 7) das Stück *fecbaf* umgekehrt, dann werden *aa*, *bb* und *cc* ungerade, während *ee* gerade wird.

Wir werden jetzt annehmen, dass die Querlinie nur ungerade Verbindungslinien, aber nicht alle solche Linien schneidet. Sei *mm* eine ungerade Verbindungslinie, die von der Querlinie nicht geschnitten wird. Wir merken uns alle Verbindungslinien, welche *mm* schneiden, ebenso alle die, welche wiederum diese schneiden und so weiter; es können dann zwei Fälle eintreten:

1.) Wir erreichen in dieser Weise keine Verbindungslinie, welche die Querlinie schneidet; wir erreichen also nur Punkte welche auf derselben Seite der Querlinie liegen; sind die äussersten *r* und *s* (Fig. 8), dann kommt jeder Buchstabe, der sich von *r* bis *s* findet, dort zweimal vor; diese Punkte sind dann auf dem *graph* unter sich verbunden und stehen nur durch zwei Linien *rp* und *sq* mit dem übrigen Theil des *graphs* in Verbindung. *rp* und *sq* müssen dann dieselbe Farbe haben, und jeder Wechselweg, der durch *pr* in den abgeschnittenen Theil hineintritt, muss diesen durch *sq* verlassen; wir können daher, wenn wir von *ab* aus Wechselpolygone bilden wollen, den Theil des Polygons von *p* nach *q* ganz fortlassen, indem wir ihn durch eine Linie *pq* ersetzen, welcher Linie wir die für *rp* und *sq* gemeinschaftliche Farbe geben. Es kann mehrere solche Stücke geben; sie werden dann in derselben Weise behandelt, und wir betrachten nur den *reducierten graph.*

2.) Wir kommen durch das angegebene Verfahren einst zu einer Verbindungslinie, welche die Querlinie schneidet. Diese sei *ff*; sie wurde gefunden als eine andere Verbindungslinie *gg* schneidend, diese als *hh* schneidend und so weiter; indem wir so zurückgehen, müssen wir einst eine ungerade Verbindungslinie begegnen, wenn nicht früher dann, wenn wir zu *mm* kommen. Sei *kk* die erste ungerade Verbindungslinie die wir treffen; wir haben dann eine Reihe von Verbindungslinien, wo die erste *ff* und die letzte *kk* ungerade, die übrigen gerade sind; jede schneidet die vorhergehende und die nachfolgende und keine andere, und nur *ff* schneidet die Querlinie.

Wenn wir jetzt in der früher angegebenen Weise *kk* umkehren, dann wird die nächste in der Reihe ungerade; kehren wir diese um, so wird wieder die nächste ungerade und so weiter, bis *gg* ungerade und zuletzt *ff* gerade wird. Wir wissen aber, dass wenn die Querlinie eine gerade Verbindungslinie schneidet, dann werden *ab* und *cd* nicht gepaart.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass in einem graph zwei Linien gepaart sind, ist, dass die zu den zwei Linien im ausgestreckten, reducierten graph gehörige Querlinie alle ungeraden und keine gerade Verbindungslinie schneidet.

Um diese Bedingung mit den früher gefundenen unvollständigen Bedingung in Verbindung zu bringen, zeichnen wir den ausgestreckten *graph* in Zickzack (Fig. 9), so dass die Ecken abwechselnd Spitzen und Thäler bilden. Eine gerade Verbindungslinie verbindet dann zwei Spitzen oder zwei Thäler; während eine ungerade eine Spitze mit einem Thal verbindet. Es giebt dann mehrere Fälle:

1.) *n* ungerade. *ab* und *cd* gleichfarbig. (Fig. 9.) Auf der einen Seite der Querlinie findet man eine gerade Anzahl von Spitzen und eine gerade Anzahl von Thälern, während auf der anderen Seite die Anzahl beider ungerade ist. Der im Satze besprochene Fall kann hier nicht eintreten, denn die ungeraden Verbindungslinien sollten eine gerade Anzahl Spitzen auf der einen Seite der Querlinie mit einer ungeraden Anzahl Thälern auf der anderen Seite verbinden, was unmöglich ist. Die gepaarten Linien müssen daher ungleichfarbig sein.

2.) *n* gerade; *ab* und *cd* ungleichfarbig.

Auf jeder Seite der Querlinie findet man eine gerade Anzahl von Spitzen und eine ungerade Anzahl von Thälern oder umgekehrt. Die ungeraden Verbindungslinien können auch hier nicht gezogen werden; die gepaarten Linien müssen also gleichfarbig sein. Wir haben also den Satz:

In einem graph sind gepaarte Linien gleichfarbig, wenn die Ordnung des reducierten graphs gerade, ungleichfarbig, wenn diese Ordnung ungerade ist.

Wir müssen erinnern, dass bei der Reduction nur solche Theile zu entfernen sind, in denen die zu untersuchenden Linien nicht vorkommen. Haben wir z. B. einen *graph* zehnter Ordnung, der, wenn wir für zwei Linien *pr* und *qs* die neuen *pq* und *rs* setzen, sich in zwei *graphs* fünfter Ordnung theilt, dann müssen zwei gepaarte Linien, die beide in einem Theil liegen, ungleichfarbig sein, während sie, wenn in jedem der Theile eine der Linien liegt, gleichfarbig sein müssen.

12. Wir gehen jetzt von dem ausgestreckten *graph* zu dem wirklichen *graph* über, indem wir die Punkte auf beiden Seiten einer Geraden *AB* absetzen; wir thun dieses in der Weise, dass wir auf der einen Seite alle Punkte absetzen, deren entsprechende Buchstaben sich an den Spitzen der einen Seite und an den Thälern der anderen Seite der Querlinie befinden. Auf der entgegengesetzten Seite von *AB* werden dann die Punkte abgesetzt, deren entsprechende Buchstaben an den Thälern der ersten und an den Spitzen der zweiten Seite der Querlinie sich finden. Eine solche Absetzung ist immer möglich, wenn *ab* und *cd* gepaart sind, denn ist z. B.

mm gerade, dann stehen die zwei Buchstaben *m* beide an Spitzen oder beide an Thälern auf derselben Seite der Querlinie; ist aber *mm* ungerade, dann steht *m* einmal an einer Spitze auf der einen Seite und einmal an einem Thal auf der anderen Seite der Querlinie. Wir verbinden jetzt die Punkte mit den Linien des *graphs*. *a* und *b* sind auf derselben Seite, ebenso *c* und *d*. Die Linien *ab* und *cd* werden daher nicht von *AB* geschnitten. Dagegen muss *AB* jede andere Linie schneiden, wie die folgende Überlegung zeigt. Ist *mm* gerade, und finden wir an dem einen Ende die Polygonseiten αm und $m\beta$, am anderen Ende γm und $m\delta$, dann stehen *m* und *m* an zwei Spitzen (Thälern) auf der einen Seite der Querlinie, während α, β, γ, δ an Thälern (Spitzen) steht. Wird *m* über *AB* abgesetzt, so müssen daher α, β, γ, δ unter *AB* abgesetzt werden, und die vier von *m* auslaufenden Linien schneiden alle *AB*. Ist *mm* ungerade, kommen wir auf ähnliche Weise zu demselben Resultat. Also:

Wenn zwei Linien gepaart sind, kann der reducierte graph so gezeichnet werden, dass eine Gerade alle Linien nur nicht die zwei gepaarten schneidet.

Gehen wir continuirlich zu einer beliebigen Lage der Punkte über, so bekommen wir statt *AB* eine oder mehrere geschlossene Curven, die die gepaarten Linien eine gerade, die übrigen eine ungerade Anzahl Male schneiden. Liegen *ab* und *cd* auf verschiedenen Seiten von *AB*, so muss die Ordnung gerade sein, und die zwei Linien haben dieselbe Farbe; jedes geschlossene Polygon, welches beide Linien oder keine von ihnen enthält, muss von gerader Seitenanzahl sein, während ein Polygon, welches nur die eine Linie enthält, eine ungerade Anzahl von Seiten haben muss. Liegen *ab* und *cd* auf derselben Seite von *AB*, dann muss die Ordnung ungerade sein und die Linien daher verschiedene Farben haben.

Graphs von ungeradem Grade.

13. Während unter den *graphs* geraden Grades sich keine primitiven von höherem Grade als dem zweiten finden, lassen sich primitive *graphs* von jedem ungeraden Grade construiren. Ist der Grad z. B. $2\alpha + 1$, dann können wir von einem Punkte aus $2\alpha + 1$ Linien ziehen, und jede dieser Linien mit zwei α-fache Linien fortsetzen, die dann durch eine $\alpha + 1$-fache Linie

verbunden werden. Der so entstandene *graph* von der Ordnung $6\alpha + 4$ ist offenbar primitiv, denn der erste Punkt kann nicht in einem geschlossenen Polygon Ecke werden, und der *graph* kann daher keinen Factor zweiten Grades haben. Ist $\alpha = 1$, bekommen wir in dieser Weise den früher genannten SYLVESTER'schen *graph*, der überhaupt der einfachste primitive *graph* ungeraden Grades ist. (Fig. 11.)

Wir wollen die Ordnung, die gerade sein muss, mit $2n$ bezeichnen und den folgenden Satz beweisen:

Ein graph, dessen Grad höher als $\frac{2n}{3} + 1$ *ist, kann nicht primitiv sein.*

Wir denken uns, dass wir auf dem *graph* vom Grade g ein System von α Linien aufsuchen deren 2α Endpunkte alle verschieden sind. Es giebt viele solche Systeme; wir wählen dasjenige, für welches α seinen grössten Werth hat. Wird $\alpha = n$, dann bilden die n Linien einen Factor ersten Grades, und der *graph* lässt sich in diesen und Factoren zweiten Grades zerlegen. Ist der *graph* primitiv, muss daher $\alpha < n$ sein. Wir farben die α Linien roth und alle übrigen Linien blau.

Die α Linien verbinden 2α Punkte zu Paaren; die übrigen $2n - 2\alpha$ Punkte haben unter sich keine Verbindungslinie; die davon auslaufenden $2g(n - \alpha)$ Linien müssen daher alle zu den 2α Punkten gehen; diese sind unter sich durch die α und z. B. β andere Linien verbunden; indem diese von beiden Endpunkten aus gezählt werden, haben wir dann

$$2\alpha g = 2(\alpha + \beta) + 2g(n - \alpha).$$

Wir betrachten jetzt eine von den α rothen Linien z. B. ab; wir können nicht zwei Linien ac und bd finden, wo c und d zwei verschiedene der $2n - 2\alpha$ Punkte sind, denn in solchem Falle hätten wir nicht ab sondern ac und bd roth gefarbt und dadurch α grösser bekommen; von a und b zusammen genommen können daher höchstens g Linien zu den $2n - 2\alpha$ Punkten gehen, so dass wenigstens g (Linien zwischen a und b zweimal gerechnet) unter den $2(\alpha + \beta)$ sich finden müssen. Wir haben daher

$$2(\alpha + \beta) \geqq \alpha g,$$

und wenn wir dieses in die obige Gleichung einsetzen,

$$2\alpha g \geqq \alpha g + 2g(n - \alpha),$$

woraus

$$\alpha \geqq \frac{2n}{3}.$$

Es sind also immer wenigstens die zwei Drittel der Punkte zu Paaren verbunden.

Wir wollen jetzt annehmen, dass wir $\alpha = n - 1$ haben. Die $2n - 2$ Punkte sind dann zu Paaren verbunden, während die zwei übrigen, a und b, nicht verbunden sind. Wir bilden dann einen neuen *graph,* indem wir zwei Linien ac und bd, wo c und d verschiedene Punkte sind, durch ab und cd ersetzen. Für diesen *graph* ist $\alpha = n$, und er lässt sich daher in einen Factor ersten Grades und in Factoren zweiten Grades zerlegen. ab findet sich in dem Factor ersten Grades; wenn cd auch dort wäre, dann könnten wir wieder ac und bd für ab und cd einsetzen, und der gegebene *graph* wäre zerlegt. cd muss sich daher in einem Factor zweiten Grades finden. Wird dieser mit dem Factor ersten Grades multiplicirt, und ac und bd wieder eingeführt, dann ist der gegebene *graph* in einen Factor dritten Grades und Factoren zweiten Grades zerlegt. Für $\alpha = n - 1$ kann also ein primitiver *graph* nur vom dritten Grade sein.

Ist $\alpha = n - 2$, so operiren wir in derselben Weise und finden, dass der *graph,* wenn er primitiv ist, höchstens vom fünften Grade sein kann. In derselben Weise können wir fortfahren, bis wir den kleinsten Maximalwerth für α erreichen; dieser ist $n - \frac{n}{3}$ und entspricht einem primitiven *graph,* der höchstens vom Grade $\frac{2n}{3} + 1$ ist. w. z. b. w.

Wir sahen oben, dass α grösser gemacht werden konnte, wenn wir zwischen zwei von den $2n - 2\alpha$ Punkten einen Wechselweg $cabd$ finden konnten; dasselbe gilt wenn wir zwischen zwei von den $2n - 2\alpha$ Punkten überhaupt einen Wechselweg finden können, denn verändert man die Farben der Seiten eines solchen Weges, so wird die Anzahl der rothen Linien um eins vergrössert. Man beweist leicht, dass diese Bedingung auch notwendig ist.

14. Indem wir die α Linien aufs Geradewohl ausnehmen und dann mittelst Wechselwege α zu vergrössern suchen, können wir untersuchen, ob ein gegebener *graph* primitiv ist oder nicht; es entsteht aber die Frage,

ob die primitiven *graphs* sich nicht durch einfache Kennzeichen von den zerlegbaren scheiden. Es spricht etwas dafür, dass ein primitiver *graph* *Blätter* haben muss, indem ein Blatt ein solcher Theil des *graphs* ist, der nur durch eine einzelne Linie mit dem übrigen Theil in Verbindung steht. Ich habe daher versucht dieses zu beweisen, habe aber die Schwierigkeiten so gross gefunden, dass ich die Untersuchung auf den *graph* dritten Grades beschränkt habe. Die Aufgabe lässt sich in vielfacher Weise umformen; es kommt ja nur darauf an, dass die Wege im *graph* sich immer verzweigen und zusammenlaufen, die Wege brauchen aber nicht eben Linien zu sein. Ich werde nur die folgende Fassung nennen: Wir haben ein geschlossenes Netz von einer geraden Anzahl von Dreiecken bestehend; jede Linie ist Seite in zwei Dreiecken; welche ist die Bedingung dafür, dass wir durch Entfernung von einigen Linien die Dreiecke zwei und zwei zu Vierecke vereinigen können? In dieser Fassung scheint die Aufgabe mit den functionen- und gruppentheoretischen Untersuchungen von Klein und W. Dyck in enger Verbindung zu stehen. Ob die Untersuchung dadurch erleichtert werden kann, wird dahingestellt.

15. Wenn wir in einem G_3 auf einem beliebigen Wege fortschreiten, wo keine Linie mehr als einmal durchgelaufen werden darf, dann können wir nicht weiter kommen, wenn wir einen Punkt zum zweiten Mal erreichen; wir werden einen solchen Weg eine *Kette* nennen; wenn wir die Kette vorwärts und rückwärts so weit wie möglich fortsetzen, muss sie mit geschlossenen Polygonen schliessen; bilden wir auch Ketten von den übrigen Linien, werden diese mit freien Endpunkten schliessen können, nämlich, wenn der Endpunkt sich schon in einer anderen Kette befindet; die letzten Ketten werden gewöhnlich nur aus einer Linie bestehen. Da jeder Punkt einmal und nur einmal als Endpunkt einer Kette auftreten darf, haben wir den Satz:

Jeder G_3^{2n} lässt sich in n Ketten auflösen.

Wir werden die Ketten nach der Anzahl ihrer Linien *gerade* oder *ungerade* nennen.

16. *Wenn der graph sich in n ungerade Ketten auflösen lässt, ist er nicht primitiv.*

Um diesen Satz zu beweisen, machen wir die Linien jeder Kette abwechselnd roth und blau, so dass die Endlinien immer blau sind. Werden die Ketten dann wieder zusammengesetzt, dann geht von jedem Punkt des *graphs* zwei blaue und eine rothe Linie aus; die blauen bilden dann einen Factor zweiten, die rothen einen Factor ersten Grades.

Wenn der *graph* primitiv ist, müssen daher gerade Ketten vorkommen; wenn diese wie die ungeraden gefarbt werden, bekommen sie eine rothe und eine blaue Endlinie. Werden die Ketten wieder zusammengesetzt, dann finden wir im *graph* für jede gerade Kette einen Punkt mit zwei rothen und einer blauen Linie, während die übrigen Punkte zwei blaue und eine rothe Linie haben. Giebt es α Punkte der ersten Art, dann findet man im *graph* $\frac{1}{2}[\alpha + 2(2n - \alpha)]$ blaue Linien; *die Anzahl der geraden Ketten ist daher eine gerade.*

Wir setzen voraus, dass die Zerlegung so gemacht ist, dass α so klein wie möglich ist. Wenn wir von Wegen reden, sind immer Wechselwege darunter verstanden.

Zwischen zwei roth-roth-blauen Punkten kann kein Weg gehen, dessen Endlinien beide roth sind.

Findet sich nämlich ein solcher Weg, dann können wir durch Veränderung der Farben seiner Linien α um zwei verkleinern.

17. Wir werden jetzt einen Theil des *graphs* aus den Ketten bilden, indem wir mit einer geraden Kette $abc \ldots kl$ anfangen, wo ab roth, kl blau ist. Kommt l nicht früher in der Kette vor, dann muss es sich in einer anderen Kette und zwar nicht als Endpunkt finden; wir theilen dann diese Kette bei l in zwei Stücke und verlängern die gerade Kette mit dem Stücke, das bei l eine rothe Linie hat. Nach der Verlängerung muss die gerade Kette, zufolge des zuletzt aufgestellten Satzes, wieder mit einer blauen Linie endigen, das ist, wieder gerade sein. Wir dürfen daher voraussetzen, dass l auch im Innern der geraden Kette vorkommt, so dass alle drei von l auslaufenden Linien sich auf der gezeichneten Figur befinden; wir nennen einen solchen Punkt *vollständig*. Indem wir, wie gleich gezeigt werden wird, unsere Figur erweitern, nennen wir immer einen Punkt, der von a aus mit einer rothen Linie erreicht werden kann

einen *R-Punkt,* während die Punkte, die von a aus *nur* mit blauen Linien erreicht werden können, *B-Punkte* genannt werden. (Fig. 10.)

Wir erweitern unsere Figur, indem wir allmählig zu allen R-Punkten die dort anschliessenden Ketten fügen. Diese Ketten müssen alle ungerade sein, da zufolge des oben bewiesenen Satzes, der von a ausgehende Weg nicht mit einer rothen Linie schliessen kann. Eine zugefügte Kette kann in einem unvollständigen R-Punkt oder B-Punkt endigen und macht dann diesen Punkt vollständig. Im ersten Falle kann die Kette von a aus in beiden Richtungen durchgelaufen werden, so dass alle ihre Punkte R-Punkte werden (Fig. 10); auch Punkte, die früher B-Punkte waren, können durch die Zufügung in R-Punkte übergehen. Eine zugefügte Kette kann auch in einem Punkte schliessen, den wir nicht früher gehabt haben; wir sehen in derselben Weise wie bei der geraden Kette, dass wir immer annehmen dürfen, dass ein solcher Punkt vollständig ist, indem die Kette in sich selbst schliesst. Die Kette bildet am Ende ein Polygon; ist dieses von ungerader Seitenanzahl, so werden alle ihre Ecken R-Punkte (Fig. 10). Wenn wir nicht mit Zufügungen länger fortsetzen können, haben wir aus einer geraden und übrigens ungeraden Ketten eine Figur gebildet, die die folgenden Eigenschaften hat:

Alle Punkte können von a aus auf Wechselwege erreicht werden, denn jede zugefügte Kette fängt mit blau an und schliesst sich an einem Punkt, der mit roth erreicht werden kann.

Alle R-Punkte sind vollständige Punkte; sie können alle von a aus mit einer rothen Linie erreicht werden und möglicherweise auch mit einer blauen.

Die B-Punkte können vollständig oder unvollständig sein, aber immer nur mit einer blauen Linie erreicht werden. Ein Weg, der nach einem B-Punkte führt, kann gar nicht oder nur in einer Richtung weitergeführt werden.

a ist ein freier Punkt oder, wenn a in einer zugefügten Kette sich findet, ein vollständiger Punkt, jedoch ein solcher, in den zwei rothe und eine blaue Linie zusammenlaufen; er ist der einzige vollständige Punkt dieser Art.

Wenn der Punkt a vollständig ist, werden wir, wenn es möglich ist, die Figur erweitern, indem wir nicht allein ab sondern auch die zweite von a auslaufende rothe Linie als Anfangslinie unserer Wege nehmen wollen. Dadurch werden vielleicht frühere B-Punkte in R-Punkte übergehen und dadurch die Zufügung neuer ungeraden Ketten erlauben. Die angeführten Eigenschaften der endlichen Figur werden dadurch nicht verändert werden.

Wir werden jetzt die construirte Figur etwas näher untersuchen.

18. Wir können von a aus alle Linien unserer Figur auf Wechselwege durchlaufen; es giebt aber hier einen Unterschied, indem einige nur in einer, andere in beiden Richtungen durchgelaufen werden können. Die ersten wollen wir *einpfeilig,* die anderen *zweipfeilig* nennen. Bei einem unvollständigen B-Punkt sind beide Linien einpfeilig, die blaue gegen den Punkt, die rothe vom Punkte weg gerichtet.

Eine rothe zweipfeilige Linie muss an jedem Ende wenigstens eine anschliessende blaue zweipfeilige Linie haben.

Sei mn die rothe Linie (Fig. 12), mp, mq, nr, ns blaue Linien. Gehen wir von m nach n, müssen wir von p oder von q kommen und können den Weg nach r sowohl als nach s fortsetzen; ähnlich wenn der Weg von n nach m führt. Es werden also entweder mp oder mq und entweder nr oder ns zweipfeilig. Die zwei übrigen blauen Linien können einpfeilig sein *und müssen dann von m und n weg gerichtet sein.*

Eine zweipfeilige blaue Linie muss an jedem Ende eine anschliessende, zweipfeilige Linie haben.

Eine blaue Linie kann einen Wechselweg schliessen; ist dieses hier nicht der Fall, sieht man leicht, dass die anschliessenden rothen Linien beide zweipfeilig sind, und dass die einpfeiligen blauen Linien wie im vorigen Falle nach aussen gerichtet sind.

Sei nun mn (Fig. 13) blau, pm und nq roth. Diese müssen dann wenigstens die Richtungen pm und qn haben; haben sie auch die Richtungen mp und nq, dann ist der Satz richtig; wir wollen daher annehmen dass pm einpfeilig ist; es muss dann der Wechselweg, mit dem wir von n nach m kommen, mit nm schliessen, er muss dann früher über m geführt haben, so dass sein letztes Stück $pml \dots nm$ ist, wo ml die zweite zu m gehörige blaue Linie bedeutet. Der Weg lässt sich dann aber auch so schliessen: $pmn \dots lm$, so dass ml zweipfeilig ist. Wenn also eine der anschliessenden rothen Linien einpfeilig ist, dann ist die anschliessende blaue Linie zweipfeilig, und damit ist der Satz bewiesen.

Wir bemerken besonders, dass *die einpfeilige rothe Linie gegen m gerichtet ist.*

Die Anfangslinie ab ist einpfeilig, wenn a ein freier Punkt ist; ist a ein vollständiger R-Punkt, dann sind die zwei rothen Linien zweipfeilig, und die blaue, wenn einpfeilig, von a weg gerichtet; ist a ein B-Punkt, dann sind die drei Linien einpfeilig.

19. Aus den zwei bewiesenen Sätzen folgt, dass die zweipfeiligen Linien, wenn sich solche finden, ein oder mehrere geschlossene Systeme bilden müssen; die Punkte eines solchen Systems können vollständig oder unvollständig sein; (in der ursprünglichen Figur sind sie alle vollständig) in den letzten schliessen sich einpfeilige Linien an, und wir haben gesehen, dass diese, wenn sie roth sind, nach dem Systeme, wenn sie blau sind von dem Systeme weg gerichtet sind.

In jedes der Systeme zweipfeiliger Linien kann nur eine rothe Linie hineinführen.

Sei pm eine rothe Linie, die in das System hineinführt; indem wir pm als Ausgangslinie unserer Wege nehmen, können wir entweder alle Linien des Systems in beiden Richtungen durchlaufen oder nicht; in dem ersten Falle kann keine andere rothe Linie qr in das System hineinführen, denn indem wir von pm nach r mit blau kommen können, würden wir den Weg nach q fortsetzen können, und qr wäre dann zweipfeilig. Im zweiten Falle würde sich ein kleineres System von zweipfeiligen Linien (mit Rücksicht auf pm) bilden lassen können; dieses System müsste sich in Linien fortsetzen, die von pm aus einpfeilig wären; es müssten dann andere rothe Linien in das System hineinführen, so dass man von diesen aus die einpfeiligen in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen konnte. Wir denken uns dass ein solcher Weg das zweipfeilige System mit der Linie $\alpha\beta$ erreicht; wir könnten dann den Weg $pm \ldots \beta\alpha \ldots$ gehen und dadurch das zu a als Anfangspunkt gehörige zweipfeilige System mit einer rothen Linie verlassen. Da dieses unmöglich ist, kann nur eine rothe Linie in das System hineinführen; wir können von dieser aus alle Punkte des Systems mit roth erreichen und daher das System mittelst jeder anschliessenden blauen Linie verlassen. Giebt es im System α vollständige und β unvollständige Punkte (der Eintrittspunkt unter den ersten gerechnet), dann ist die Anzahl von blauen Linien $\frac{1}{2}(2\alpha+\beta)$; die Anzahl der anschliessenden einpfeiligen blauen Linien ist daher gerade; sie kann Null sein, und das System bildet dann ein Blatt.

Der Punkt a muss besonders betrachtet werden; ist er ein R-Punkt, dann findet er sich in einem Systeme von zweipfeiligen Linien; man beweist wie oben, dass keine rothe Linie in dieses System hineinführen kann, und dass das System mittelst jeder anschliessenden blauen Linie verlassen werden kann. Die Anzahl dieser Linien ist ungerade.

20. Wir ziehen jetzt jedes zweipfeiliges System in einen Punkt zusammen; wir haben dann eine Figur mit folgenden Eigenschaften:

Man kann von a aus jeden Punkt erreichen.

Die neugebildeten Punkte sind (a ausgenommen) alle R-Punkte (wir wollen sie, wo sie ausgezeichnet werden sollen, als NR-Punkte bezeichnen); die blauen Linien können bei ihnen in beliebiger, doch gerader Anzahl vorkommen. Ist diese Anzahl Null, dann endigt der Weg mit einer rothen Linie an einem Blatte.

Alle Linien sind einpfeilig.

Der Anfangspunkt kann ein freier Punkt sein: die Wege können dann nur mit ab anfangen; oder er kann ein vollständiger B-Punkt sein: die Wege können mit beiden rothen Linien anfangen; er kann endlich ein NR-Punkt sein: es laufen dann von ihm eine ungerade Anzahl blauer Linien aus; jede von diesen kann als Anfangslinie der Wege genommen werden.

Wir werden uns jetzt die neue Figur in der Weise allmählig aufgebaut denken, dass wir erst von a aus einen beliebigen Wechselweg zeichnen, den wir so lange wie möglich fortsetzen; wo von diesem Wege Verzweigungen von R-Punkten auslaufen, fügen wir neue Wege hinzu und fahren so fort, bis unsere ganze Figur construirt ist; indem wir dieses thun, bezeichnen wir den jeden Augenblick vorkommenden Überschuss der Anzahl unvollständiger R-Punkte über die Anzahl unvollständiger B-Punkte mit d.

Da jeder zugefügter Weg mit blau anfängt und mit blau endigt, so hat er, wenn wir von dem Anfangspunkte und dem Endpunkte absehen, ebenso viele unvollständige R-Punkte als unvollständige B-Punkte. Die Veränderung von d bei einer Zufügung wird daher nur von der Natur des Anfangspunktes und Endpunktes abhängen.

Die Anfangspunkte der zugefügten Wege sind immer unvollständige R-Punkte; die Endpunkte können nicht R-Punkte sein, denn dann würden die zugefügten Linien zweipfeilig werden. Eine zugefügte Kette kann daher die Natur der schon vorhandenen Punkte nicht verändern. Wir sind dadurch von der grössten Schwierigkeit, die die Untersuchung der ursprünglichen Figur darbot, befreit worden, denn diese bestand eben darin, dass eine Zufügung B-Punkte in R-Punkte überführen konnte.

Im Allgemeinen wird so durch die Zufügung eines Weges am Anfang ein unvollständiger R-Punkt, am Ende ein unvollständiger B-Punkt verschwinden, indem sie in vollständige Punkte übergehen. Ein zugefügter Weg wird daher im allgemeinen d nicht verändern. Hier sind doch folgende Fälle zu beachten:

Wenn der Weg zu einem Blatte führt, wird d um zwei verkleinert. Wir werden annehmen, dass es β Blätter giebt.

Wenn a ein NR-Punkt ist, wird die eine seiner blauen Linien als Anfangslinie des ersten Weges genommen; die übrigen werden alle Anfangslinien von zugefügten Wegen; erst, wenn der letzte von diesen zugefügt wird, wird der Punkt vollständig; ist die Anzahl der Linien p, so wird daher durch diese Zufügungen d um $p - 2$ vergrössert.

Ein NR-Punkt wird erst mit einer Kette passirt und dadurch die rothe und eine blaue Linie gezeichnet und der Punkt ist dann ein unvollständiger R-Punkt; die übrigen blauen Linien werden alle Anfangslinien von zugefügten Wegen, und erst, wenn der letzte von diesen gezeichnet wird, wird der Punkt vollständig; ist die Anzahl der blauen Linien p, so wird auch von einem solchen Punkte eine Vergrösserung von d um $p - 2$ herrühren. Wir wollen annehmen, dass es r NR-Punkte giebt (a, wenn er ein R-Punkt ist, mitgerechnet, die Blätter nicht mitgerechnet), und dass von diesen im Ganzen l blaue Linien hinauslaufen; die ganze von diesen Punkten herrührende Vergrösserung von d ist dann $l - 2r$; der Werth dieser Grösse ist positiv oder Null; nur wenn a der einzige NR-Punkt ist und nur eine blaue Linie hat, ist der Werth -1; wir werden diesen Fall, wo a ein Blatt repräsentirt, vorläufig ausschliessen.

Wir zeichnen den ersten Weg von a aus beliebig, doch so, dass wir ihn durch a führen, wenn dieser Punkt vollständig ist. Wenn dieser Weg gezeichnet ist, hat d einen Werth, den wir mit δ bezeichnen wollen; wenn die ganze Figur gezeichnet ist, hat d dann den Werth

$$\delta + l - 2r - 2\beta$$

bekommen; es giebt dann keine unvollständige R-Punkte und eine Anzahl unvollständiger B-Punkte, die wir mit b bezeichnen wollen; es ist also

$$-b = \delta + l - 2r - 2\beta$$

oder

$$2\beta = b + \delta + l - 2r.$$

Wir werden jetzt δ bestimmen; wir können annehmen, dass der erste Weg nicht in einem Blatte schliesst; wir rechnen gewiss dadurch, wenn er in einem Blatt endigt, δ um zwei zu gross; wir rechnen aber dann auch β um eins zu gross, da das Blatt sich nicht in den zugefügten Wegen findet. Das Resultat wird daher nicht geändert.

Es giebt nun folgende Fälle:

1) a ist ein freier Punkt. Man hat dann $\delta = 2$. (Fig. 10.)

2) a ist ein vollständiger B-Punkt; indem a passirt wird, wird ein unvollständiger B-Punkt verloren; daher ist $\delta = 3$. (Fig. 15.)

3) a ist ein R-Punkt; die erste Linie ist blau und $\delta = 1$. (Fig. 16.)

Wir werden erst den letzten Fall beseitigen.

Hat a nur eine blaue Linie, dann ist a ein Blatt; dieser wird mit den Wegen nicht erreicht und kommt daher unter den β Blättern nicht vor. b muss ungerade sein; ist $b \geqq 3$, so haben wir also wenigstens drei Blätter; ist $b = 1$, haben wir zwei Blätter; unsere Figur steht dann aber mit dem übrigen Theil des *graphs* nur durch eine Linie in Verbindung; der übrige Theil bildet daher ein Blatt, und der *graph* hat auch in diesem Falle wenigstens drei Blätter. (Fig. 17.)

In dem zweiten Falle war $\delta = 3$; b ist ungerade. Ist $b \overline{\overline{>}} 3$ wird $\beta \overline{\overline{>}} 3$. Ist $b = 1$, sehen wir wie im vorigen Falle, dass der *graph* wenigstens drei Blätter hat.

Wir haben so nur übrig den ersten Fall zu untersuchen. b ist gerade, und wenn $b \overline{\overline{>}} 4$ ist, wird $\beta \overline{\overline{>}} 3$. Wir brauchen daher nur $b = 0$ und $b = 2$ zu betrachten.

$b = 2$. Da die Anzahl gerader Ketten eines *graphs* gerade ist, können wir eine neue gerade Kette nehmen und ganz wie früher fortfahren; die neue Figur kann mit der alten in Verbindung treten; sie kann eine Kette durch a senden; in dieser muss a ein B-Punkt sein; es kann eine Kette in einem der unvollständigen B-Punkte schliessen; ein solcher Punkt wird dann vollständig mit einpfeiligen Punkten. Indem wir jetzt die ganze Figur einpfeilig machen und wie früher aufbauen wird d wegen der neuen mit roth anfangenden Anfangslinie (ausser der früheren) um zwei vergrössert. Der *graph* hat also auch in diesem Falle wenigstens drei Blätter.

$b = 0$. Wir operiren wie im vorigen Falle; die neue Figur wird hier in sich abgeschlossen; wir brauchen daher nur den Fall zu betrachten, wo wieder für die neue Figur $b = 0$ ist. Wir haben dann zwei Blätter; wenn es mehrere gerade Ketten gäbe, müsste dann auch in diesem Falle der *graph* wenigstens drei Blätter haben. Wir setzen daher voraus, dass die zwei geraden Ketten die einzigen sind. Es giebt dann im *graph* nur zwei Punkte A und B mit zwei rothen und einer blauen Linie, während die übrigen zwei blaue und eine rothe Linie haben; von jedem der zwei Punkte A und B führt eine rothe Linie zu einem Blatte. Wir können aber zeigen, dass wir immer dafür Sorge tragen können, dass dieser Fall nicht eintritt. Wir können nämlich von A aus, mit der nicht nach dem Blatte laufenden rothen Linie anfangend, einen beliebigen Wechselweg nach einem Punkte C führen, und zwar so, dass die letzte Linie dieses Weges blau ist. Verändern wir dann die Farben dieses Weges, so wird der Punkt mit zwei rothen und einen blauen Linie nach C verlegt. Hier muss dann die eine gerade Kette anfangen, und ihre erste rothe Linie kann nicht direct zu dem Blatte führen.

Wir haben so den folgende Satz bewiesen:

Ein primitiver graph vom dritten Grade muss wenigstens drei Blätter haben.

Aus diesem Satze können wir verschiedene Folgerungen ziehen.

21. Ein nicht primitiver *graph* dritten Grades lässt sich in einen Factor zweiten und einen Factor ersten Grades zerlegen; wir wollen die Linien des ersten blau, die Linien des zweiten roth machen. Finden sich Wechselpolygone, dann können neue Zerlegungen dadurch abgeleitet werden;

es kann aber vorkommen, dass gewisse Linien nicht ihre Farben ändern können, also nicht in Wechselpolygonen Seiten sind. Besteht z. B. der *graph* aus zwei Theilen, die nur durch eine Linie verbunden sind, dann kann diese nicht in einem geschlossenen Polygone Seite sein und muss daher roth sein.

Wir wollen annehmen dass eine rothe Linie ab notwendig roth sein muss; wir theilen sie in einem Punkte m, und fügen in m eine Linie mn mit einem Blatte zu. Der neue *graph* muss primitiv sein, denn wäre er zerlegbar, dann musste mn roth, am und mb blau sein; durch Wegnahme von mn und dem Blatte, hatten wir dann eine Zerlegung des ursprünglichen *graphs,* bei der ab blau war. Der neue *graph* ist also primitiv und hat daher wenigstens drei Blätter; der ursprüngliche *graph* muss daher auch Blätter haben. Also:

Ein zerlegbarer graph, in dem eine rothe Linie ihre Farbe nicht ändern kann, muss Blätter haben.

22. Wir wollen annehmen, dass wir einen primitiven *graph* mit drei Blättern haben. Nehmen wir zwei Linien ab und cd, jede in einem Blatte liegend, fort und setzen für diese ac und bd, dann hat der neue *graph* nicht drei Blätter und ist daher zerlegbar. Wir müssen daher für den gegebenen *graph* $\alpha = n - 1$ (Siehe 13) haben; also:

In einem primitiven graph dritten Grades mit drei Blättern können wir immer $n - 1$ Linien finden, die die $2n - 2$ Punkte zu Paaren verbinden.

Man sieht leicht, wie sich dieser Satz erweitern lässt.

23. Durch die obige Entwickelung haben wir nicht nur den Satz betreffend die Anzahl der Blätter bewiesen, sondern wir haben auch den Weg gefunden auf den wir alle primitive *graphs* direct construiren können; wir können nämlich die einpfeiligen Systeme ganz nach Belieben zeichnen, wenn wir nur die angegebenen Regeln für die Erweiterung beobachten; ist dieses gethan, können wir bei den *NR*-Punkten beliebige zweipfeilige Systeme mit angemessener Anzahl von anschliessenden Linien einschalten. Finden sich noch unvollständige *B*-Punkte, kann der *graph* beliebig ver-

vollständigt werden, nur dass keine Punkte mit zwei rothen Linien dadurch entstehen dürfen.

Da ein Blatt wenigstens drei Punkte hat, wird Fig. 11 den einfachsten primitiven *graph* darstellen. In Fig. 14 haben wir ein primitiver *graph* vierzehnter Ordnung.

Für *graphs* von höherem Grade habe ich die Untersuchung nicht durchgeführt; es scheint doch, dass der hier befolgte Weg auch dort zum Ziel führen kann.

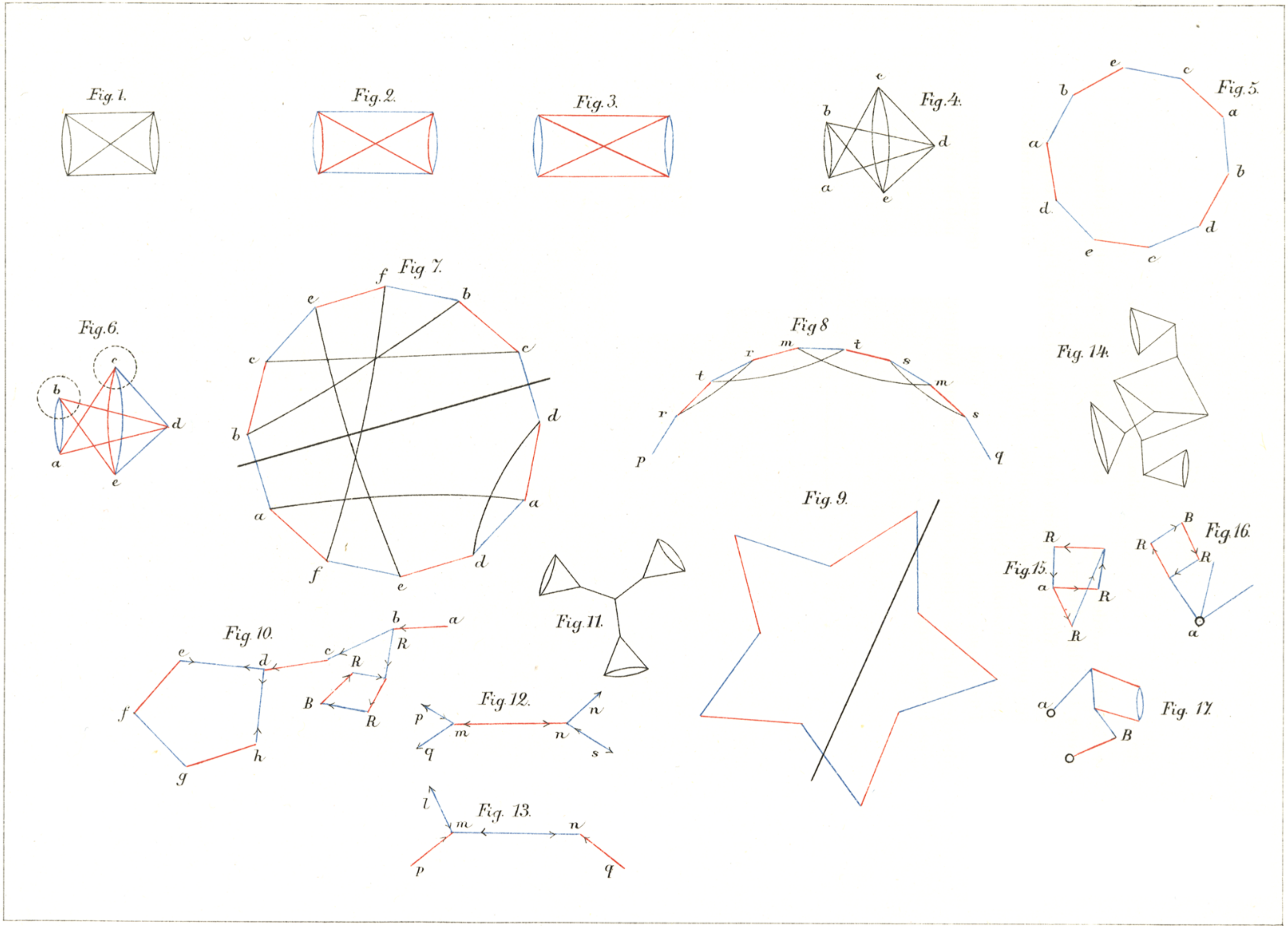
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.