

# Das Frobeniussche Kappendreieck und die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises.

Von

Heinrich Liebmann in München.

„Jede große geometrische Wahrheit ist im Grunde einfach und daher leicht zu beweisen; wenn viele dies noch nicht sind, so stehen sie noch nicht in ihrem naturgemäßen Zusammenhang.“ Diese Bemerkung galt auch bis in die jüngste Zeit für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises, daß er unter allen Kurven mit gegebenem Umfang ( $L$ ) den größten Inhalt ( $F$ ) besitzt. Frobenius, so dürfen wir sagen, hat das Ziel erreicht in seiner Arbeit „Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale“ (Berl. Berichte 28 (1915), S. 387—404), aber er hat es doch wieder verschleiert durch eine einschränkende Bemerkung, wonach eine gewisse quadratische Form in zwei Veränderlichen bei Extrapolation außerhalb ihres ursprünglichen Definitionsbereiches „nicht mehr dieselbe geometrische Bedeutung hat“. Ohne hier auf den Sinn dieses irreführenden Vorbehaltes einzugehen, wollen wir nur vorab bemerken, daß sich bei entsprechender Fassung gerade aus dem frei zu verwendenden Grundgedanken von Frobenius heraus ein Beweis für die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises entwickeln läßt, *der bis ins einzelne hinein die volle Anschaulichkeit bewahrt, ohne die bindende Kraft der Schlüsse einzubüßen.*

Dieses eben zu zeigen, ist unser Ziel.

Die Eigenschaft des Kreises, unter allen Eiliniien — von andern, nicht konvexen Kurven, kann man bekanntlich absehen — mit gegebenem Umfang ( $L$ ) den größten Flächeninhalt ( $F$ ) zu besitzen<sup>1)</sup>, liegt bekanntlich in der Ungleichheit

$$L^2 - 4\pi F \geq 0,$$

in der nur für den Kreis das Gleichheitszeichen besteht.

<sup>1)</sup> Geschichte und Systematik dieser Frage findet man nahezu vollständig bei W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

Es ist auch bekannt, daß die durch „Dilatation“ aus einer Eilinie hervorgehenden Parallelkurven, die man erhält, wenn man auf allen Normalen die Strecke  $t$  abträgt, nach Umfang und Inhalt durch

$$L(t) = L + 2t\pi,$$

$$F(t) = F + tL + t^2\pi$$

gegeben sind<sup>2)</sup>. Dabei ist  $t$  positiv im Sinne der äußeren, negativ im Sinne der inneren Normale gerechnet, und hinsichtlich des Vorzeichens von  $F(t)$  gilt die Regel: Man lasse  $P$  die Eilinie im positiven Sinne durchlaufen und den zugeordneten Punkt  $P(t)$  die Parallelkurve. Ist  $t$  positiv, dann durchläuft  $P(t)$  die (äußere) Parallelkurve so, daß der Inhalt zur Linken bleibt, also durchweg positiv; bei inneren Parallelkurven (negativem  $t$ ) aber kann es vorkommen, daß die Bahn von  $P(t)$  sich überschneidet und die einzelnen Flächenstücke teils positiv, teils negativ umlaufen werden;  $F(t)$  gibt dann die algebraische Summe.

Die Formel zeigt, daß  $F(t)$  bei geeigneter Wahl von  $t$  negativ gemacht werden kann dann und nur dann, wenn eben

$$L^2 - 4\pi F > 0.$$

Unser Ziel ist demnach erreicht, wenn wir erwiesen haben, daß der Kreis die einzige Eilinie ist, zu der es keine Parallelkurven mit negativem Inhalt gibt.

Für die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  kann man unmittelbar sehen, daß die durch  $t = -a$ ,  $t = -b$  gegebenen beiden Parallelkurven negativen Inhalt haben; sie bestehen eben lediglich aus Teilen, die von  $P(t)$  negativ umlaufen werden.

Zur Beantwortung der Frage für allgemeine Eililien hat Frobenius durch seine Einführung des „Kappendreiecks“ den Weg gebahnt, statt des Wegweisers aber eine Warnungstafel errichtet.

Wir werden, den Grundlinien seiner Betrachtung folgend, als Antwort den Satz finden:

*Zieht man zu einer Eilinie die (innere) Parallelkurve, indem man auf allen Normalen die Strecke*

$$t = -\varrho^*$$

<sup>2)</sup> Es ist also

$$(L(t))^2 - 4\pi F(t) = (L + 2t\pi)^2 - 4\pi(F + tL + t^2\pi) = L^2 - 4\pi F$$

eine Invariante (*Integralinvariante*) bei der Gruppe der Dilatationen. Eine weitergehende Untersuchung über „Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme“ erschien in den Berichten der K. Bayer. Akademie 1918, S. 489–505.

abträgt, wobei  $\varrho^*$  der Radius des Inkreises irgendeines Kappendreiecks, das heißt eines die Kurve umschließenden Tangendendreiecks ist, so ist

$$F(-\varrho^*) \leq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für den Kreis.

Der weitere Gedankengang mag zuerst für konvexe Vierecke, dann allgemein für konvexe  $n$ -Ecke durch Betrachtung von Prismatoiden (Obeliskten), dann für Eiliniern durch Betrachtung gewisser Hüllflächen von Ebenen, die wir „Hufe“ nennen wollen, durchgeführt werden. Nimmt man für die Hüllflächen dann speziell „Böschungsfächen“, so kommt man zu dem ausgesprochenen Satz.

Wir beginnen also mit dem vierseitigen Prismatoid (Fig. 1), das von zwei Vierecken, nämlich der im Sinne der Buchstabenfolge positiv umlaufenen Deckfläche  $ABCD$  und der Grundfläche  $A'B'C'D'$  mit entsprechend gleichsinnig parallelen Seiten, außerdem vier Paralleltrapezen begrenzt ist. Wir nehmen an, daß  $BA$  und  $CD$  einander in  $E$ ,  $B'A'$  und  $C'D'$  einander in  $E'$  schneiden. (Wenn Grund- und Deckfläche Parallelogramme sein sollten, braucht man keinen Grenzübergang auszuführen, kann vielmehr die Betrachtung auf den allgemeineren Fall des Fünfecks zurückführen, indem man zur Ergänzung noch ein Paar paralleler Stützgeraden durch zwei zugeordnete Ecken einführt.) Auf diese Weise entstehen die beiden positiv umlaufenen „Kappendreiecke“  $EBC$  und  $E'B'C'$ , und die Vierecke erscheinen als Differenzen dieser Kappendreiecke und der „Restdreiecke“  $EAD$  und  $E'A'D'$ .

Die beiden Kappendreiecke sind Horizontalschnitte der „Kappenspyramide“  $B'C'E'S$ , in deren Spitze die Verlängerungen der Strecken  $B'B$ ,  $C'C$ ,  $E'E$  einander schneiden. Durch  $S$  legen wir jetzt eine Horizontalebene und betrachten ihren Schnitt mit den verlängerten Prismatoidkanten. Die Schnittpunkte sind

$$A^*, D^*, B^* \equiv C^* \equiv S$$

und den Schnitt mit  $E'E$  ist

$$E^* \equiv S.$$

Für den Inhalt des Querschnitts erhält man also

$$\Delta E^*B^*C^* - \Delta E^*A^*D^* = 0 - \Delta SA^*D^* < 0.$$

(Man beachte, daß der Umlauf  $SA^*D^*$  stets positiv ist!)

Hieraus folgt, zunächst für unser vierseitiges Prismatoid, daß sich unter seinen Querschnitten auch solche mit negativem Inhalt befinden, wenn nicht auch  $A^*$  und  $D^*$  in  $S$  liegen, d. h. wenn es kein Pyramidenstumpf ist.

Diese Überlegung gilt allgemein für Prismatoide. Es sei  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ein konvexes, im Sinn der Buchstabenfolge positiv umlaufenes Polygon in einer Horizontalebene. Es sei  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  ein zweites konvexes Polygon, dessen Seiten den entsprechenden des ersten gleichsinnig parallel sind. Wir stellen wieder durch Verbindung entsprechender Ecken ein Prismatoid her, dessen Kanten wir verlängern.

Wir behaupten:

*Das verlängerte Prismatoid hat unter seinen Horizontalschnitten auch solche mit negativem Inhalt, wenn die Kanten  $A, A'$  nicht sämtlich durch einen und denselben Punkt  $S$  hindurchgehen.*

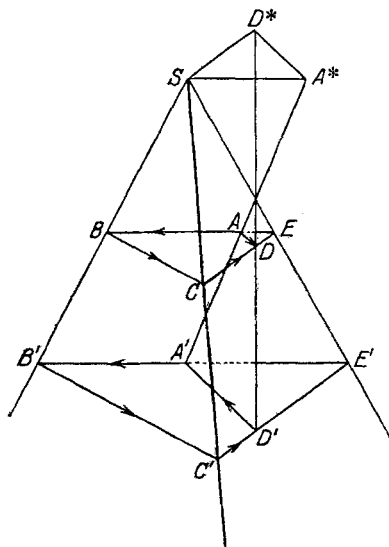


Fig. 1.

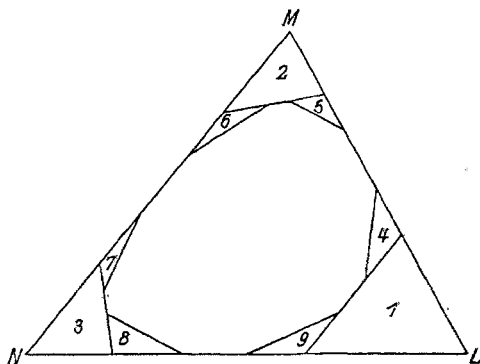


Fig. 2.

Der „archimedische Punkt“ des Beweises ist wieder diese Spitze einer Kappenpyramide. Man verlängere drei Paare entsprechender, gleichsinnig paralleler Kanten von Grund- und Deckfläche, um zunächst zwei „Kappendreiecke“  $L'M'N$  und  $LMN$  zu erhalten; die Strecken  $L'L, M'M, N'N$  sind wieder bis zum Schnittpunkt  $S$  zu verlängern. Die Polygone erscheinen wieder als „Kerne“, die übrig bleiben, wenn man von den Kappendreiecken (vgl. Fig. 2) „Restdreiecke“  $k_1, k_2, \dots$  bzw.  $k'_1, k'_2, \dots$  mit entsprechend parallelen Seiten abschneidet. Die Figur deutet die Legung der Schnitte an. Verlängert man die Verbindungsstrecken aller entsprechenden Ecken auch der Restdreiecke und damit der Polygone bis zur Horizontalebene durch die Spitze  $S$  der Kappenpyramide, so entstehen Dreiecke  $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ , von denen keines einen negativen Inhalt hat. Der Inhalt des Horizontalschnittes des verlängerten Prismatoides, dessen Ebene  $S$  enthält, ist dann

$$0 - k_1^* - k_2^* - \dots - k_n^* \leq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn *alle*  $k_v^*$  den Inhalt Null haben, also sich auf Punkte reduzieren.  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  und  $k_3^*$  sind aber dann und nur dann auf Punkte reduziert, wenn die Paare  $k_1 k_1'$ ,  $k_2 k_2'$ ,  $k_3 k_3'$  ihr Perspektivitätszentrum in  $S$  haben. Hieran schließt sich dann der nächstinnere Dreiecks Kranz, hier die Indizesfolge 4—9, usw., man sieht, daß eben diese Dreiecke  $k_4^* \dots k_9^*$  auch nur dann den Inhalt Null haben, wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch  $S$  gehen. Setzt man dieses Verfahren fort, das im Wort sich viel schwerfälliger macht als für den Blick, so erkennt man, daß jener Querschnitt des verlängerten Prismatoides nur dann den Inhalt Null hat, wenn alle  $A, A'$  durch  $S$  laufen, das Prismatoid also ein Pyramidenstumpf ist.

Vom Prismatoid ist nur ein Schritt — einer der wenigen Grenzübergänge, die keine neuen Methoden erfordern — zum „Huf“.

Es seien in zwei Horizontalebene die Eilinen  $E$  und  $E'$  gegeben, deren Peripherien wir mit den Pfeilen positiven Umlaufs versehen. Die Gesamtheit der Tangentialebenen, welche  $E$  und  $E'$  gleichsinnig berühren, umhüllen dann die „Hufffläche“. Jede solche gemeinsame Tangential- oder Stützebene zerlegt den Raum in zwei Teile, deren einer  $E$  und  $E'$  enthält. Die geradlinigen Erzeugenden der Hufffläche verbinden „zugeordnete Punkte“ der Eilinen  $E$  und  $E'$ . Sodann legen wir um  $E$  und  $E'$  zwei Kappendreiecke, d. h. umschriebene,  $E$  bzw.  $E'$  im Innern enthaltende Tangendendreiecke mit entsprechend gleichsinnig parallelen Seiten  $LM, MN, NL$  und  $L'M', M'N', N'L'$ . Genau wie im vorigen Fall können wir jetzt die Eiflächen als Kerne erhalten, die übrig bleiben, wenn man wieder von den beiden Kappendreiecken eine — jetzt unbegrenzte — Folge von paarweise perspektivisch gelegenen Restdreiecken  $k_v, k_v'$  abschneidet.

Ein bestimmtes Gesetz für die Auswahl dieser Folgen ist leicht anzugeben:  $k_1, k_2, k_3$  und  $k_1', k_2', k_3'$  kann man so wählen, daß  $L, M, N$  und  $L', M', N'$  je eine Ecke ist, je zwei Seiten den von diesen Punkten ausgehenden Seiten des Kappendreiecks angehören, während die dritte Seite die auf der Halbierungslinie des betreffenden Winkels  $\sphericalangle NLM$  usw. des Kappendreiecks senkrecht stehende Tangente oder Stützl原因e der Eilinie ist. Es bleiben dann zwei Sechsecke als Kerne, und diese sind ganz entsprechend weiter zu behandeln.

Dann hat man genau wie früher die Kappenpyramide zu konstruieren, durch ihre Spitze  $S$  eine Horizontalebene zu legen und sie mit den Verbindungslinien entsprechender Ecken entsprechender zugeordneter Restdreiecke zum Schnitt zu bringen. Der Inhalt des Horizontalschnittes der Hufffläche, dessen Ebene  $S$  enthält, ist dann, genau wie oben

$$0 - k_1^* - k_2^* - \dots - k_v^* - \dots \leq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn alle  $k_i^*$  sich auf Punkte reduzieren. Daß diese Punkte dann alle in den einen Punkt  $S$  hineinfallen, wird wieder schrittweise gezeigt, indem man mit  $k_1 k'_1, k_2 k'_2, k_3 k'_3$  beginnt.

Es gilt also der Satz:

*Verlängert man die geradlinigen Erzeugenden eines durch zwei Eiliniën in parallelen Ebenen bestimmten konvexen Hufmantels, so befinden sich unter den Horizontalschnitten auch Flächen mit negativem Inhalt, wenn die Eiliniën nicht perspektivisch sind, also der Hufmantel kein Kegelstumpf ist.*

Um von hier aus zum Beweis des oben ausgesprochenen Satzes zu gelangen, brauchen wir nur  $E$  und  $E'$  in bestimmter Weise zu wählen. Wir errichten über  $E$  die „Böschungsfäche“ und zwar insbesondere die Hüllfläche der Ebenen, die mit den inneren Normalen von  $E$  den Winkel  $\frac{\pi}{4}$  einschließen. Die senkrechten Projektionen der Horizontalschnitte der Böschungsfäche auf die Ebene von  $E$  sind dann einfach die Parallelkurven zu  $E$ , und die (positive oder negative) Höhe des Horizontalschnittes über der Ebene von  $E$  ist der (negative oder positive) Abstand der Parallelkurve: die oberen Horizontalschnitte ergeben innere, die unteren äußere Parallelkurven in der Projektion.

Für  $E'$  nehmen wir jetzt irgendeinen unteren Horizontalschnitt, erhalten also dann als „Hüflfläche“ in diesem Fall einfach wieder die Böschungsfäche.

Konstruiert man wieder eine Kappenpyramide, so sind ihre drei Seitenflächen unter dem Winkel  $\frac{\pi}{4}$  gegen die Horizontalebene geneigt, und die Projektion des in der durch die Spitze  $S$  gehenden Horizontalebene gelegenen Schnittes der Böschungsfäche hat *negativen* Inhalt. Sie ist eine *innere* Parallelkurve, und ihr Abstand von der Eilinie ist gleich der Höhe von  $S$  über der Ebene von  $E$ . Der Fußpunkt der Höhe aber hat von allen drei Seiten  $LM, MN, NL$  des Kappendreiecks denselben Abstand ( $h$ ), ist also gleich dem Radius  $\rho^*$  des Inkreises von  $LMN$ .

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen, über dessen Aussagen wir uns nun nochmals Rechenschaft geben wollen:

Umschreibt man einer Eilinie ein Tangentendreieck  $LMN$  (Kappendreieck), so hat die innere Parallelkurve  $E^*$  im Abstand  $\rho^*$  (gleich dem Radius des Inkreises von  $LMN$ ) nur dann keinen negativen Inhalt, wenn  $E$  und  $E^*$  nicht perspektivisch liegen. In diesem besondern Fall aber reduziert sich  $E^*$  auf einen Punkt, also ist  $E$  dann ein Kreis.

Oder also: Es ist immer

$$L^2 - 4\pi F \geq 0,$$

das Gleichheitszeichen tritt nur für den Fall des Kreises ein.

So sind wir, Schritt für Schritt geometrisch verfahrend, zum Ziel gelangt mit freier Verwendung des „Kappendreiecks“ und der bei Frobenius nicht in dieser Weise für Eiliniien konstruierten „Restdreiecke“. Wir glauben damit eine Pflicht des Dankes zu erfüllen, gegenüber und zu Ehren von Frobenius<sup>3)</sup>.

---

<sup>3)</sup> An Stelle dieses rein *anschaulichen* Beweises kann man, wie mir Herr Blaschke mitteilt, auch einen allen bisherigen gegenüber vereinfachten *analytischen* treten lassen durch geeignete Verwendung der von ihm und dann nochmals von Frobenius gegebenen Darstellung des Vierecksinhalts als Differenz des Quadrats zweier line Ausdrücke (D. Math. V. 23 (1914), S. 210–234.)

(Eingegangen am 17. Januar 1919.)