Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi.

(*Di* E. J. Wilczynski, *a Chicago.*)

INTRODUZIONE.

Durante l'ultimo secolo la geometria ha fatto grandi progressi, ma questi progressi hanno avuto poca influenza sulla meccanica. In questa Memoria voglio mostrare come si possano applicare certe idee della geometria moderna ad un problema speciale ma importante della meccanica: il problema dei tre corpi.

Le questioni che sorgono intorno a questo problema dal punto di vista geometrico sono numerosissime, e poche sono quelle che io ho potuto risolvere; ma i risultati ottenuti hanno un interesse speciale per noi in questa occasione perchè si legano strettamente alle notissime ricerche del Lagrange.

Supponiamo che il baricentro del sistema dei tre corpi sia in riposo. Si presentano naturalmente tre generi di enti per lo studio geometrico: le curve descritte da ognuno dei tre corpi, le superficie rigate descritte dalle rette che congiungono due dei tre corpi, ed il cono, inviluppo del piano dei tre corpi.

Dalla considerazione di questi tre generi di enti geometrici sorgono subito alcuni problemi fondamentali. Quali sono le variabili dalle quali dipendono le proprietà più essenziali di queste curve, di queste superficie rigate e di questo cono? Se ad un dato momento le tre velocità stanno nel piano stesso dei tre corpi, le orbite saranno evidentemente curve piane e le rigate del problema coincideranno col piano comune delle tre orbite. Si possono trovare altri casi nei quali uno almeno dei tre corpi abbia come orbita una curva piana? Si possono trovare altri casi nei quali una delle rigate del problema diventa sviluppabile o si riduce ad un cono? Noi mostreremo che quest'ultimo caso può presentarsi soltanto se due lati del triangolo dei tre corpi restano costantemente eguali. Supponiamo invece che la curva, descritta da uno dei tre corpi, sia linea asintotica sopra una delle rigate del problema. Troveremo che, anche in questo caso, due lati del triangolo devono rimanere costantemente eguali. Si presenta dunque il problema dell'esistenza o della non-esistenza di soluzioni speciali del problema dei tre corpi nelle quali il triangolo resta sempre isoscele. Volendo generalizzare le note soluzioni del LAGRANGE (*) nelle quali il triangolo dei tre corpi resta sempre equilatero, si viene allo stesso problema. Il grande matematico, però, ha esaurito le possibilità in questa direzione; dimostreremo il teorema seguente:

Se due lati del triangolo formato dei tre corpi restano sempre eguali, e se le masse dei due corpi che stanno alla base di questo triangolo isoscele non sono eguali, il terzo lato del triangolo dev'essere eguale agli altri due, cosicchè il caso si riduce a quello del LAGRANGE. *Se, invece, le due sopradette masse sono eguali, si possono trovare due classi nuove di soluzioni isosceli del problema, come ha mostrato il* FRANSÈN *già nel 1895* (**).

Per dimostrare questo teorema io ho dovuto seguire una via lunga e difficile. Sono dunque molto grato al mio chiarissimo collega, il signore W. D. MAC MILLAN per il cortese permesso di riprodurre qui nel § 4, invece della mia, la sua dimostrazione più perspicua e semplice.

§ 1. Le equazioni differenziali del problema dei tre corpi.

Siano (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) le coordinate cartesiane dei tre corpi P_x, P_y, P_z all'epoca t. Siano f la costante d'attrazione, m_x, m_y, m_z i prodotti delle tre masse per f, e Δ_{yz}, Δ_{zx}, Δ_{xy} le tre mutue distanze, cosicchè sarà

$$\Delta_{yz}^2 = \sum_{k=1}^{3} (y_k - z_k)^2, \quad \Delta_{zx}^2 = \sum_{k=1}^{3} (z_k - x_k)^2, \quad \Delta_{xy}^2 = \sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k)^2.$$

(*) LAGRANGE, *Oeuvres*, t. VI, pp. 229-331.

(**) FRANSÈN A. E., *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar*, vol. 52 (1895), pp. 783-805. Stockholm.

Allora le equazioni del problema dei tre corpi saranno le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} x''_k &= m_y \frac{y_k - x_k}{\Delta^3_{xy}} + m_z \frac{z_k - x_k}{\Delta^3_{xz}}, \\ y''_k &= m_x \frac{x_k - y_k}{\Delta^3_{xy}} + m_z \frac{z_k - y_k}{\Delta^3_{yz}}, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3) \\ z''_k &= m_x \frac{x_k - z_k}{\Delta^3_{xz}} + m_y \frac{y_k - z_k}{\Delta^3_{yz}}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dove

$$x''_k = \frac{d^2 x_k}{d t^2}, \quad \text{ecc.}$$

Di queste equazioni si conoscono dieci integrali. Sei di questi sono equivalenti alle equazioni

$$\xi_k = \frac{m_x x_k + m_y y_k + m_z z_k}{m_x + m_y + m_z} = a_{k0} + a_{k1} t, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

che regolano il movimento del baricentro del sistema. Tre altri, gli integrali delle aree, prendono la forma

$$\left.\begin{aligned} \sum m_x (x_2 x'_3 - x_3 x'_2) = A, \qquad \sum m_x (x_3 x'_1 - x_1 x'_3) = B, \\ \sum m_x (x_1 x'_2 - x_2 x'_1) = C. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'ultimo, il principio delle forze vive, dà l'equazione

$$\sum m_x (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) - 2\, U = 2\, h, \tag{3}$$

ove

$$U = \frac{m_y m_z}{\Delta_{yz}} + \frac{m_z m_x}{\Delta_{zx}} + \frac{m_x m_y}{\Delta_{xy}}, \tag{4}$$

Ora supponiamo che il baricentro del sistema sia in riposo (nell'origine). Avremo

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

e quindi

$$m_x x_k + m_y y_k + m_z z_k = 0, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Dalla (5), se $m_z \neq 0$, si può trarre z_k come funzione di x_k e y_k. La sostituzione di questo valore di z_k nelle (1) dà

$$\left.\begin{aligned} x''_k &= \alpha\, x_k + \beta\, y_k, \\ y''_k &= \gamma\, x_k + \delta\, y_k, \end{aligned}\right\} \quad (k = 1,\ 2,\ 3) \tag{6}$$

ove le quantità

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha &= -\left(\frac{m_y}{\Delta^3_{xy}} + \frac{m_x + m_z}{\Delta^3_{zx}}\right), & \beta &= m_y\left(\frac{1}{\Delta^3_{xy}} - \frac{1}{\Delta^3_{zx}}\right), \\
\gamma &= m_x\left(\frac{1}{\Delta^3_{xy}} - \frac{1}{\Delta^3_{yz}}\right), & \delta &= -\left(\frac{m_x}{\Delta^3_{xy}} + \frac{m_y + m_z}{\Delta^3_{yz}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

sono indipendenti dall'indice k e soddisfano alle relazioni

$$
\left.\begin{gathered}
m_x\, m_y\, (\alpha - \delta) - m_x\, (m_x + m_z)\, \beta + m_y\, (m_y + m_z)\, \gamma = 0, \\
\alpha + \beta = -\frac{M}{\Delta^3_{zx}}, \qquad \gamma + \delta = -\frac{M}{\Delta^3_{yz}}, \\
M = m_x + m_y + m_z\,,
\end{gathered}\right\} \tag{8}
$$

onde

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta^3_{yz}} = -\frac{\gamma + \delta}{M}, \quad \frac{1}{\Delta^3_{zx}} = -\frac{\alpha + \beta}{M}, \\
&\frac{1}{\Delta^3_{xy}} = \frac{-m_y\, \alpha + (m_x + m_y)\, \beta}{m_y\, M} = \frac{(m_y + m_z)\, \gamma - m_x\, \delta}{m_x\, M}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

Si possono dedurre facilmente due altri sistemi d'equazioni della forma delle (6) per le coppie di funzioni $(y_k,\ z_k)$ e $(z_k,\ x_k)$. Basta per ciò fare una permutazione circolare delle lettere x, y, z.

§ 2. La rigata R_{xy} descritta dal lato $P_x\, P_y$ del triangolo.

Si può studiare la rigata R_{xy}, descritta dalla retta congiungente P_x e P_y, dal punto di vista della geometria proiettiva, mediante un sistema di equazioni differenziali della forma

$$
\left.\begin{aligned}
x'' + p_{11}\, x' + p_{12}\, y' + q_{11}\, x + q_{12}\, y = 0, \\
y'' + p_{21}\, x' + p_{22}\, y' + q_{21}\, x + q_{22}\, y = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{10}
$$

soddisfatto dalle coordinate omogenee dei due punti P_x e P_y (*). Come coor-

(*) Wilczynski E. J., *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*. Leipzig, 1906, Chapter V, §§ 1-2.

dinate omogenee di P_x scegliamo le sue coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 1$. In modo analogo, siano y_1, y_2, y_3 e $y_4 = 1$ le coordinate omogenee di P_y. Perchè quattro coppie di funzioni (x_k, y_k) possano soddisfare ad un sistema di equazioni della forma delle (10), occorre e basta che sia

$$\begin{aligned} p_{11} x'_k + p_{12} y'_k + q_{11} x_k + q_{12} y_k &= -x''_k, \\ p_{21} x'_k + p_{22} y'_k + q_{21} x_k + q_{22} y_k &= -y''_k, \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

dalle quali equazioni possiamo trarre le espressioni dei coefficienti p_{ik} e q_{ik} come funzioni delle x_k, y_k e delle loro derivate.

Ponendo

$$D(a_k, b_k, c_k, d_k) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

si trova

$$\begin{aligned} D p_{11} &= -D(x''_k, y'_k, x_k, y_k), & D p_{12} &= -D(x'_k, x''_k, x_k, y_k), \\ D p_{21} &= -D(y''_k, y'_k, x_k, y_k), & D p_{22} &= -D(x'_k, y''_k, x_k, y_k), \\ D q_{11} &= -D(x'_k, y'_k, x''_k, y_k), & D q_{12} &= -D(x'_k, y'_k, x_k, x''_k), \\ D q_{21} &= -D(x'_k, y'_k, y''_k, y_k), & D q_{22} &= -D(x'_k, y'_k, x_k, y''_k), \end{aligned}$$

ove

$$D = D(x'_k, y'_k, x_k, y_k). \tag{11}$$

Poichè, nel nostro caso, abbiamo $x_4 = y_4 = 1$, troviamo

$$D = \begin{vmatrix} x'_1, & y'_1, & x_1 - y_1 \\ x'_2, & y'_2, & x_2 - y_2 \\ x'_3, & y'_3, & x_3 - y_3 \end{vmatrix},$$

o più semplicemente

$$D = | x_k - y_k, x'_k, y'_k |$$

se designiamo col simbolo $| a_k, b_k, c_k |$ il determinante di terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ponendo

$$\left.\begin{array}{ll} |x_k, x'_k, y'_k| = \varepsilon, & |y_k, x'_k, y'_k| = \zeta, \\ |x_k, y_k, x'_k| = \eta, & |x_k, y_k, y'_k| = \theta, \end{array}\right\} \tag{12}$$

si ha

$$D = \varepsilon - \zeta. \tag{13}$$

Derivando le espressioni (12) si trova, mediante le (6),

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon' = -\delta\eta + \beta\theta, & \eta' = -\varepsilon, \\ \zeta' = \gamma\eta - \alpha\theta, & \theta' = -\zeta. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Per i coefficienti p_{ik} e q_{ik} del sistema (10), il quale determina le proprietà proiettive della rigata R_{xy}, si trovano i valori seguenti

$$\left.\begin{array}{l} p_{11} = \dfrac{-(\alpha+\beta)\theta}{\varepsilon-\zeta}, \quad p_{12} = \dfrac{(\alpha+\beta)\eta}{\varepsilon-\zeta}, \\ p_{21} = \dfrac{-(\gamma+\delta)\theta}{\varepsilon-\zeta}, \quad p_{22} = \dfrac{(\gamma+\delta)\eta}{\varepsilon-\zeta}, \\ q_{11} = -q_{12} = -\dfrac{\alpha\varepsilon+\beta\zeta}{\varepsilon-\zeta}, \quad q_{21} = -q_{22} = -\dfrac{\gamma\varepsilon+\delta\zeta}{\varepsilon-\zeta}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

ove naturalmente D o $\varepsilon - \zeta$ dev'essere diverso da zero.

Se invece $D = 0$, le due equazioni (10) si riducono ad una sola equazione di primo ordine, cioè

$$-\theta x' + \eta y' + \varepsilon(-x + y) = 0. \tag{16}$$

La rigata R_{xy} sarà, in questo caso, sviluppabile (*). Questo fatto si può facilmente dimostrare così. Se $x_1, \ldots, x_4$ sono le coordinate omogenee di un punto P_x della curva C_x, $\lambda x_k + \mu x'_k$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ sono le coordinate omogenee di un punto della tangente della C_x al punto P_x. In modo analogo $\nu y_k + \rho y'_k$ sono le coordinate di un punto della tangente della C_y a P_y. Se il luogo delle congiungenti dei punti corrispondenti P_x e P_y è sviluppabile, queste due tangenti si segheranno per ogni valore di t. Si potrà dunque scegliere λ, μ, ν, ρ in tal modo che i punti $\lambda x_k + \mu x'_k$ e $\nu y_k + \rho y'_k$ coincidano, cioè che

$$\lambda x_k + \mu x'_k = \omega(\nu y_k + \rho y'_k) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

(*) Wilczynski E. J., l. c., p. 131.

ove ω è un fattore di proporzionalità. Devono dunque x_k, y_k, x'_k, y'_k soddisfare a quattro equazioni di questa forma; deve dunque essere nullo il determinante D. Reciprocamente se D è eguale a zero, esistono quattro equazioni di questa forma, e la superficie R_{xy} sarà sviluppabile.

Evidentemente il determinante D non può essere nullo identicamente per tutte le soluzioni del problema dei tre corpi, poichè le condizioni iniziali si possono scegliere in modo che D abbia un valore qualunque. Si tratta ora di trovare le eventuali soluzioni speciali per le quali D sia identicamente eguale a zero.

Supponiamo $D = 0$, cosicchè R_{xy} sia sviluppabile. Questa sviluppabile si riduce ad un cono se

$$\varepsilon(\eta - \theta) = 0$$

e in nessun'altro caso (*). Questa condizione si spezza in due; cioè avremo o $\varepsilon = 0$ o $\eta = \theta$. Nel primo caso avremo

$$\varepsilon = \zeta = 0,$$

giacchè $D = 0$. Osserviamo che

$$\Delta = \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = M\left[\frac{m_x}{\Delta^3_{xy}\,\Delta^3_{zx}} + \frac{m_y}{\Delta^3_{yz}\,\Delta^3_{xy}} + \frac{m_z}{\Delta^3_{zx}\,\Delta^3_{yz}}\right]$$

non è mai eguale a zero per valori reali delle coordinate e valori positivi delle masse. Perciò segue dalle (14) che, in questo caso, avremo

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0.$$

Queste condizioni esigono l'esistenza di due terne di funzioni l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2, tali che sia

$$l_1\,x'_k = m_1\,x_k + n_1\,y_k, \quad l_2\,y'_k = m_2\,x_k + n_2\,y_k, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

dove le tre funzioni della stessa terna non possono essere eguali a zero. Se dunque $l_1 = n_1 = 0$ avremo $m_1 \neq 0$, e per conseguenza $x_k = 0$. Secondo le (6) avremo o $y_k = 0$ o $\beta = 0$. Nel primo caso la (5) ci dà $z_k = 0$, purchè non sia $m_z = 0$. In questo caso due almeno dei tre corpi sono permanentemente raggruppati in un punto. Il movimento si effettua in un piano fisso (anche se $m_z = 0$), ed il problema si riduce a quello dei due corpi. Se invece $\beta = 0$,

(*) Wilczynski E. J., l. c., p. 131, equaz. (16).

le distanze di P_y e P_z all'origine sono eguali; ma, secondo le (5) anche m_y e m_z saranno eguali, e ci troviamo in quel caso particolare delle tre masse collineari del LAGRANGE, nel quale due delle tre masse sono eguali. Il movimento, anche in questo caso, si effettua in un piano fisso. La discussione del caso $l_1 = m_1 = 0$, $n_1 \neq 0$, naturalmente, non dà niente di nuovo.

Supponiamo ora

$$l_1 = 0, \quad m_1 \neq 0, \quad n_1 \neq 0.$$

Si può scrivere

$$y_k = \omega x_k, \quad y'_k = \omega x'_k + \omega' x_k, \quad \omega \neq 0.$$

Derivando l'ultima equazione, e sostituendo per le derivate di secondo ordine i loro valori dati dalle (6), si trova

$$(\gamma - \alpha \omega - \omega'') x_k + (\delta - \beta \omega) y_k = 2 \omega' x'_k.$$

Se ω è costante, l'origine O ed i punti P_x e P_y saranno collineari; inoltre le distanze OP_x ed OP_y manterranno un rapporto invariabile. Secondo le (5), il punto P_z starà anch'esso sulla linea $P_x P_y$ e saranno costanti i rapporti delle tre mutue distanze. Si tratta dunque della nota soluzione del LAGRANGE, nella quale tre particelle collineari si muovono in uno stesso piano fisso.

Se, invece, ω non è costante, dividiamo i due membri dell'ultima equazione per ω', ciò che ci dà un risultato della forma

$$x'_k = \Omega x_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Saranno dunque costanti i rapporti $x_1 : x_2 : x_3$. In questo caso i tre corpi si muovono sopra una retta fissa.

Abbiamo trovato incidentalmente il risultato seguente: *Se i tre corpi restano sempre allineati, o stanno sopra una retta fissa, o sono costanti i rapporti delle loro mutue distanze.*

La discussione del caso $l_2 = 0$ non dà niente di nuovo. Supponiamo dunque $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, ciò che ci permette di scrivere

$$x'_k = m_1 x_k + n_1 y_k, \quad y'_k = m_2 x_k + n_2 y_k, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

onde

$$x''_k = m_1 x'_k + n_1 y'_k + m'_1 x_k + n'_1 y_k, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Se $n_1 \neq 0$ troveremo un'equazione della forma

$$x''_k + P x'_k + Q x_k = 0, \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Quindi ci sarà una relazione lineare ed omogenea con coefficienti costanti fra x_1, x_2, x_3, ciò che vuol dire che l'orbita di P_x deve stare in un piano che passa per il baricentro del sistema. Possiamo scegliere il sistema delle coordinate in modo che $x_3 = 0$ sia l'equazione di questo piano. Dalle equazioni

$$x'_k = m_1 x_k + n_1 y_k$$

si può dedurre che sarà anche $y_3 = 0$. Se $m_2 \neq 0$, segue dalle (5) che $z_3 = 0$. In questo caso dunque almeno due dei tre corpi si muovono in un piano fisso, e la rigata R_{xy} si riduce a questo piano.

Se $n_1 = 0$, si ha

$$x'_k = m_1 x_k;$$

P_x descrive una retta fissa passante per il baricentro del sistema: la si può scegliere come asse delle coordinate, cosicchè $x_2 = x_3 = 0$, e

$$y'_2 = n_2 y_2, \quad y'_3 = n_2 . y_3 .$$

Sarà dunque costante il rapporto $y_2 : y_3$; ciò vuol dire che l'orbita di P_y starà in un piano che contiene anche l'orbita (rettilinea) di P_x. La rigata R_{xy} si riduce ad un piano anche in questo caso.

In tutti i casi, dunque, quando si ha

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$$

la rigata R_{xy} si riduce o ad un piano o ad una retta.

Il secondo caso nel quale la rigata R_{xy} potrebbe ridursi ad un cono è più interessante. Esso è caratterizzato dalle condizioni

$$\zeta = \varepsilon, \quad \theta = \eta. \tag{17}$$

Derivando la seconda equazione, secondo le (14), si ottiene la prima; ma la differenziazione della prima dà la relazione nuova

$$(\alpha + \beta)\,\eta = (\gamma + \delta)\,\eta .$$

Se fosse $\eta = 0$, saremmo ricondotti al caso dianzi trattato $\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$. Supponiamo dunque che η non sia eguale a zero; ed avremo

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta .$$

Secondo le (8), l'unica soluzione reale di quest'equazione è la seguente

$$\Delta_{zx} = \Delta_{yz};$$

il triangolo, cioè, dev'essere isoscele. Il cono al quale si riduce la rigata R_{xy} ha come vertice il punto

$$-x_k + y_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \text{ (*)}$$

Poichè $x_4 = y_4 = 1$, questo punto si trova all'infinito; il cono si riduce ad un cilindro.

Abbiamo così dimostrato il teorema seguente: *La rigata R_{xy} descritta dalla linea congiungente due dei tre corpi, P_x e P_y, è sviluppabile se*

$$D = \varepsilon - \zeta = 0$$

e soltanto in questo caso. Questa sviluppabile non può ridursi ad un cono senza diventare un cilindro. In questo caso sarà

$$\varepsilon - \zeta = 0, \quad \eta - \theta = 0;$$

due lati del triangolo dei tre corpi diventeranno eguali, e la base di questo triangolo isoscele descriverà la superficie cilindrica alla quale si riduce la rigata R_{xy}. Finalmente se

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$$

la rigata R_{xy} si riduce ad un piano o ad una linea.

È inutile aggiungere che l'esistenza delle varie classi di soluzioni menzionate in questo teorema non è stata stabilita in nessun modo, se non nei casi evidenti quando i tre corpi si muovono in uno stesso piano fisso. Parleremo non di meno di *soluzioni sviluppabili, cilindriche, isosceli,* ecc., senza volere con ciò pregiudicare la questione della loro esistenza.

Torniamo dunque al caso generale delle soluzioni sviluppabili, e cerchiamo di approfondire un po' di più la questione della loro esistenza. Si ha

$$\left.\begin{aligned} D &= \varepsilon - \zeta, \\ D' &= (\alpha + \beta)\,\theta - (\gamma + \delta)\,\eta, \\ D'' &= (\gamma + \delta)\,\varepsilon - (\alpha + \beta)\,\zeta - (\gamma' + \delta')\,\eta + (\alpha' + \beta')\,\theta, \\ D''' &= 2\,(\gamma' + \delta')\,\varepsilon - 2\,(\alpha' + \beta')\,\zeta - \mu\,\eta + \lambda\,\theta, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ove

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \alpha'' + \beta'' + (\alpha + \beta)\,\alpha + (\gamma + \delta)\,\beta, \\ \mu &= \gamma'' + \delta'' + (\alpha + \beta)\,\gamma + (\gamma + \delta)\,\delta. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(*) WILCZYNSKI E. J., l. c., p. 131, equaz. (15).

Per una soluzione sviluppabile, non piana, dev'essere

$$D = D' = D'' = D''' = 0,$$

senza che ε, ζ, η, θ siano tutte nulle. Dev'essere eguale a zero, dunque, il determinante di queste quattro equazioni, cioè

$$\left.\begin{aligned} & 2\,(\alpha' + \beta' - \gamma' - \delta')\,[(\alpha' + \beta')\,(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)\,(\gamma' + \delta')] - \\ & \quad - (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\,[(\alpha'' + \beta'')\,(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)\,(\gamma'' + \delta'') + \\ & \quad + (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\,(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

L'equazione (20) ***dev'essere soddisfatta da tutte le soluzioni sviluppabili, non piane.*** Si vede che quest'equazione contiene le derivate di primo e secondo ordine di Δ_{yz} e di Δ_{zx}, ma che le derivate di Δ_{xy} non c'entrano. Si può dunque risolverla rispetto a Δ_{xy}, se

$$\alpha + \beta - \gamma - \delta \neq 0,$$

cioè, se i due lati Δ_{xz} e Δ_{yz} del triangolo non sono eguali.

Postuliamo l'esistenza di ∞^n soluzioni del problema dei tre corpi soddisfacenti alla (20). Non occorre che per tutte queste soluzioni D, D', ecc., siano nulli; ma poichè la (20) è equivalente all'annullarsi del determinante delle quattro equazioni (18), vi dev'essere una relazione lineare ed omogenea fra D, D', D'', D'''. Questa relazione è la seguente

$$\left.\begin{aligned} & [(\alpha' + \beta')\,(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)\,(\gamma' + \delta')]\,D''' - [\lambda\,(\gamma + \delta) - \mu\,(\alpha + \beta)]\,D'' + \\ & \qquad + [\lambda\,(\gamma' + \delta') - \mu\,(\alpha' + \beta')]\,D' - \\ & \qquad - [2\,(\alpha' + \beta')\,\{(\alpha' + \beta')\,(\gamma + \delta) - (\alpha + \beta)\,(\gamma' + \delta')\} - \\ & \qquad - (\alpha + \beta)\,\{\lambda\,(\gamma + \delta) - \mu\,(\alpha + \beta)\}]\,D = 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Il coefficiente di D''' non può annullarsi, come si può vedere dalla (20), se i due lati Δ_{xz} e Δ_{yz} del triangolo non sono eguali.

Consideriamo dunque una soluzione sviluppabile, ma non isoscele, del problema. Possiamo, mediante la (21), calcolare tutte le derivate di ordine superiore di D sotto la forma

$$D^{(k)} = A_k\,D + B_k\,D' + C_k\,D'', \qquad (k = 3,\ 4,\ 5, \ldots).$$

Sia $t = 0$ un punto regolare della nostra soluzione, tale che per $t = 0$, Δ_{zx} sia diverso da Δ_{zy}, e che per i valori di t non troppo grandi x_x e y_k siano sviluppabili in serie di potenze di t. Scegliamo le condizioni iniziali in modo che D, D', D'' si annullino per $t = 0$. Avranno il valore zero per $t = 0$ tutte le derivate D di ordine superiore. Sarà dunque D identicamente eguale a zero.

Dunque: *se ammettiamo l'esistenza di* ∞^n *soluzioni del problema dei tre corpi soddisfacenti alla relazione* (20), *esisteranno almeno* ∞^{n-3} *soluzioni sviluppabili non isosceli, cioè non cilindriche.*

Nella formulazione di questo teorema abbiamo detto *almeno* ∞^{n-3}, perchè non possiamo essere assolutamente certi che le tre condizioni $D = D' = D'' = 0$ per $t = 0$ siano indipendenti fra loro e da altre relazioni che possano essere implicate dalla (20).

Nel caso di una soluzione isoscele si ha

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta,$$

ed alla (21) si deve sostituire la seguente

$$(\alpha + \beta) D'' - (\alpha' + \beta') D - (\alpha + \beta)^2 D = 0, \tag{22}$$

dove il coefficiente di D'' non s'annulla mai. Un ragionamento strettamente analogo a quello ora svolto ci insegna che *il problema dei tre corpi ammetterà almeno* ∞^{m-2} *soluzioni cilindriche, se ammette* ∞^m *soluzioni isosceli.*

§ 3 **Equazioni differenziali delle orbite.**

Cerchiamo l'equazione differenziale di quarto ordine

$$x^{(4)} + 4 p_1 x''' + 6 p_2 x'' + 4 p_3 x' + p_4 x = 0 \tag{23}$$

della quale x_1, x_2, x_3 e $x_4 = 1$ costituiscano un sistema fondamentale di soluzioni. Evidentemente p_4 sarà eguale a zero, e per gli altri coefficienti avremo un sistema di tre equazioni

$$4 p_1 x'''_k + 6 p_2 x''_k + 4 p_3 x'_k = - x_k^{(4)}, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

onde

$$4 P p_1 = - | x_k^{(4)}, \; x''_k, \; x'_k |, \qquad 6 P p_2 = - | x'''_k, \; x_k^{(4)}, \; x'_k |,$$
$$4 P p_3 = - | x'''_k, \; x''_k, \; x_k^{(4)} |, \qquad P = | x'''_k, \; x''_k, \; x'_k |.$$

Dalle (6) si ha

$$x''_k = \alpha\, x_k + \beta\, y_k\,, \qquad x'''_k = \alpha'\, x_k + \beta'\, y_k + \alpha\, x'_k + \beta\, y'_k\,.$$

Sostituendo questi valori in P, si trova

$$\begin{aligned} P &= |\, \alpha'\, x_k + \beta'\, y_k + \alpha\, x'_k + \beta\, y'_k,\ \alpha\, x_k + \beta\, y_k,\ x'_k \,| = \\ &= \alpha'\, \beta\, |\, x_k,\ y_k,\ x'_k \,| + \alpha\, \beta'\, |\, y_k,\ x_k,\ x'_k \,| + \alpha\, \beta\, |\, y'_k,\ x_k,\ x'_k \,| + \beta^2\, |\, y'_k,\ y_k,\ x'_k \,| \end{aligned}$$

o

$$P = (\alpha'\, \beta - \alpha\, \beta')\, \eta + \beta\, (\alpha\, \varepsilon + \beta\, \zeta). \tag{24}$$

Lo stesso metodo basta per trovare le equazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} 4\, P p_1 &= [\alpha\, \beta'' - \alpha''\, \beta + (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)]\, \eta - 2\, \beta'\, (\alpha\, \varepsilon + \beta\, \zeta), \\ 6\, P p_2 &= [2\, \alpha'\, \beta' - \beta\, (\alpha'' + \alpha^2 + \beta\, \gamma)]\, \varepsilon + [2\, (\beta')^2 - \beta\, (\beta'' + \alpha\, \beta + \beta\, \delta)]\, \zeta + \\ &\quad + [\beta'\, (\alpha'' + \alpha^2 + \beta\, \gamma) - \alpha'\, (\beta'' + \alpha\, \beta + \beta\, \delta)]\, \eta, \\ 4\, P p_3 &= 2\, (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta)\, (\alpha\, \varepsilon + \beta\, \zeta) + \\ &\quad + [2\, \alpha'\, (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta) - \alpha\, \{\alpha\, \beta'' - \alpha''\, \beta + \beta\, (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)\}]\, \eta + \\ &\quad + [2\, \beta'\, (\alpha\, \beta' - \alpha'\, \beta) - \beta\, \{\alpha\, \beta'' - \alpha''\, \beta + \beta\, (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)\}]\, \theta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

In modo analogo si trova l'equazione differenziale dell'orbita di P_y

$$y^{(4)} + 4\, q_1\, y^{(3)} + 6\, q_2\, y'' + 4\, q_3\, y' = 0, \tag{26}$$

ove

$$\left.\begin{aligned} 4\, Q\, q_1 &= [\gamma\, \delta'' - \gamma''\, \delta - \gamma\, (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)]\, \theta + 2\, \gamma'\, (\gamma\, \varepsilon + \delta\, \zeta), \\ 6\, Q\, q_2 &= [-2\, (\gamma')^2 + \gamma\, (\gamma'' + \alpha\, \gamma + \delta\, \gamma)]\, \varepsilon + [-2\, \gamma'\, \delta' + \gamma\, (\delta'' + \beta\, \gamma + \delta^2)]\, \zeta + \\ &\quad + [-\gamma'\, (\delta'' + \beta\, \gamma + \delta^2) + \delta'\, (\gamma'' + \alpha\, \gamma + \delta\, \gamma)]\, \theta, \\ 4\, Q\, q_3 &= 2\, (\gamma\, \delta' - \gamma'\, \delta)\, (\gamma\, \varepsilon + \delta\, \zeta) + \\ &\quad + [2\, \gamma'\, (\gamma\, \delta' - \gamma'\, \delta) - \gamma\, \{\gamma\, \delta'' - \gamma''\, \delta - \gamma\, (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)\}]\, \eta + \\ &\quad + [2\, \delta'\, (\gamma\, \delta' - \gamma'\, \delta) - \delta\, \{\gamma\, \delta'' - \gamma''\, \delta - \gamma\, (\alpha\, \delta - \beta\, \gamma)\}]\, \theta, \\ Q &= (\gamma'\, \delta - \gamma\, \delta')\, \theta - \gamma\, (\gamma\, \varepsilon + \delta\, \zeta). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

L'orbita di P_x è una curva piana se $P = 0$ e soltanto in questo caso. La (24) dimostra che $P = 0$ se $\beta = 0$, cioè se $\Delta_{xy} = \Delta_{xz}$. Quindi: *se due lati del triangolo restano sempre eguali, l'orbita del corpo che è nel vertice del triangolo isoscele è una curva piana.* Si possono adoperare le (6) per dimostrare lo stesso teorema, e anche di più: *il piano di questa orbita passa per il baricentro del sistema.*

Consideriamo il caso in cui P_x descriva una curva piana senza che il triangolo sia isoscele. Avremo

$$P = 0, \qquad \beta \neq 0.$$

Giacchè P deve annullarsi per ogni valore di t, anche P' dev'esser eguale a zero, onde

$$\left.\begin{aligned} P &= (\alpha' \beta - \alpha \beta') \eta + \beta (\alpha \varepsilon + \beta \zeta) = 0, \\ P' &= [\alpha'' \beta - \alpha \beta'' - (\alpha \delta - \beta \gamma) \beta] \eta + 2 \beta' (\alpha \varepsilon + \beta \zeta) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Queste relazioni si possono soddisfare ponendo

$$\eta = \alpha \varepsilon + \beta \zeta = 0;$$

ma allora per $\beta \neq 0$ si trovano le condizioni

$$\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0,$$

che corrispondono al caso evidente, e già trattato, che tutte le masse non infinitesimali del sistema si muovano nello stesso piano fisso. Lasciando da parte questo caso evidente, segue dalle (28)

$$2 \beta' (\alpha' \beta - \alpha \beta') - \beta [\alpha'' \beta - \alpha \beta'' - (\alpha \delta - \beta \gamma) \beta] = 0. \tag{29}$$

Se questa condizione è soddisfatta per ogni valore di t, P sarà una soluzione dell'equazione

$$2 \beta' P - \beta P' = 0,$$

donde

$$P = C \beta^2$$

ove C è costante. Se, dunque, P s'annulla per $t = 0$, si annullerà identicamente. *Se l'equazione* (29) *si può soddisfare con* ∞^n *soluzioni del problema dei tre corpi, esisteranno* ∞^{n-1} *soluzioni nelle quali il punto* P_x *descrive una curva piana.*

È molto interessante di osservare che le due condizioni (20) e 29) sono essenzialmente identiche. Infatti, se cerchiamo le condizioni perchè la rigata R_{yz} diventi sviluppabile, troveremo fra esse una relazione che può ottenersi dalla (20) permutando le lettere x, y, z. Così si trova precisamente la (29). *Lasciando da parte i casi evidenti, le due questioni:*

I) *se l'orbita di* P_x *può essere una curva piana,*

II) *se la rigata* R_{yz} *può diventar sviluppabile,* *conducono allo stesso problema analitico, cioè: trovare le eventuali soluzioni del problema dei tre corpi per le quali le mutue distanze soddisfano la relazione* (29).

Nel caso $P=0$, le (25) non valgono più. Poichè, in questo caso, l'orbita di P_x sarà una curva piana, $x_1, \ldots, x_4$ devono soddisfare ad un'equazione differenziale di terzo ordine

$$x''' + 3\pi_1 x'' + 3\pi_2 x' + \pi_3 x = 0.$$

Naturalmente π_3 sarà eguale a zero, perchè quest'equazione deve ammettere la soluzione costante $x_4 = 1$. Per trovare gli altri coefficienti si hanno le condizioni

$$x'''_k + 3\pi_1 x''_k + 3\pi_2 x'_k + \pi_3 x_k = 0, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

donde

$$3\pi_1 = -\frac{|x'''_k,\ x'_k,\ x_k|}{|x''_k,\ x'_k,\ x_k|}, \quad 3\pi_2 = -\frac{|x''_k,\ x'''_k,\ x_k|}{|x''_k,\ x'_k,\ x_k|},$$

$$\pi_3 = -\frac{|x''_k,\ x'_k,\ x'''_k|}{|x''_k,\ x'_k,\ x_k|}.$$

Dalle (6) si ha

$$x'''_k = \alpha x'_k + \alpha' x_k + \beta y'_k + \beta' y_k, \quad y_k = \frac{1}{\beta}(x''_k - \alpha x_k),$$

e quindi, se $\beta \neq 0$,

$$x'''_k = \frac{\beta'}{\beta} x''_k + \alpha x'_k + \left(\alpha' - \alpha \frac{\beta'}{\beta}\right) x_k + \beta y'_k.$$

Si avrà dunque

$$|x''_k,\ x'_k,\ x_k| = \beta\eta, \quad |x'''_k,\ x_k',\ x_k| = \beta'\eta + \beta\eta',$$

$$|x''_k,\ x'''_k,\ x_k| = \beta(\alpha\eta + \beta\theta), \quad |x''_k,\ x'_k,\ x'''_k| = P = 0.$$

Se l'orbita di P_x è una curva piana, e se η e β sono diversi da zero, l'equazione differenziale, caratteristica delle proprietà proiettive di questa curva, sarà

$$x''' - \left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\eta'}{\eta}\right) x'' - \frac{\alpha\eta + \beta\theta}{\eta} x' = 0. \tag{30}$$

Nel caso $\beta = 0$, $\eta \neq 0$ si deve sostituire alla (30) la seguente

$$x''' - \frac{\alpha'}{\alpha} x'' - \alpha x' = 0. \tag{31}$$

Se $\beta = \eta = 0$, la (31) è valida ancora; ma vale anche l'equazione

$$x'' - \frac{\zeta'}{\zeta}\, x = 0 \tag{32}$$

ottenuta dalle (10) e (15). In questo caso l'orbita di P_x diventa rettilinea. Finalmente nel caso $\beta \neq 0$, $\eta = 0$ si ritrovano le condizioni $\varepsilon = \zeta = \eta = \theta = 0$ che corrispondono a tre masse muoventisi nello stesso piano fisso.

Se la rigata R_{xy} non è sviluppabile, sarà

$$\varepsilon - \zeta \neq 0,$$

e la rigata sarà caratterizzata dalle equazioni (10) i cui coefficienti si calcolano per mezzo delle (15). Domandiamoci se l'orbita di P_x può essere linea asintotica sulla rigata R_{xy}. Perchè lo sia, occorre e basta che la condizione

$$p_{12} = 0 \text{ (*)}$$

sia soddisfatta. Poichè $\alpha + \beta$ non può annullarsi dev'essere $\eta = 0$ e quindi deve annullarsi anche ε. Secondo le (14) dev'essere di più

$$\beta = 0, \quad \zeta' = -\alpha\theta, \quad \theta \neq 0,$$

giacchè da $\theta = 0$ seguirebbe $\zeta = -\theta' = 0$, ciò che è contrario all'ipotesi che D non sia eguale a zero.

Se l'orbita di P_x è curva asintotica sopra la rigata R_{xy} i due lati del triangolo dei tre corpi che s'incontrano in P_x devono essere eguali. L'equazione differenziale dell'orbita di P_x diventa

$$x'' - \frac{\zeta''}{\zeta'}\, x' = 0.$$

L'orbita di P_x sarà dunque rettilinea.

(*) Wilczynski E. J., l. c., p. 142.

§ 4. Dimostrazione della non-esistenza, nel caso generale, di soluzioni isosceli diverse da quelle equilaterali del LAGRANGE.

Dalla discussione precedente risulta chiaramente che la questione dell'esistenza o della non-esistenza di soluzioni isosceli è di importanza fondamentale dal punto di vista geometrico. Nell'introduzione abbiamo già formulato la risposta, essenzialmente negativa, a questa domanda. Alla mia dimostrazione di questo mio teorema sostituisco quella molto più semplice e breve del signor MAC MILLAN.

Cominciamo colla forma delle equazioni differenziali dovuta a LAGRANGE(*). Scegliamo dunque un sistema T di tre assi ortogonali fissi, e prendendo ognuno dei tre corpi come origine, determiniamo tre sistemi di coordinate, i cui assi siano paralleli a quelli corrispondenti di T. Saranno

$$\left.\begin{array}{llllllll} X_k = z_k - y_k & \text{le coordinate di} & m_z & \text{nel sistema di} & m_y, \\ Y_k = x_k - z_k & \text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m_x & \text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m_z, \\ Z_k = y_k - x_k & \text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m_y & \text{»}\quad\text{»}\quad\text{»} & m_x. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Avremo dunque, invece delle (1), le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} X''_k + M\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} - m_x\left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3}\right) &= 0, \\ Y''_k + M\frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} - m_y\left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3}\right) &= 0, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \\ Z''_k + M\frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3} - m_z\left(\frac{X_k}{\Delta_{yz}^3} + \frac{Y_k}{\Delta_{zx}^3} + \frac{Z_k}{\Delta_{xy}^3}\right) &= 0, \end{aligned}$$

ove evidentemente

$$X_k + Y_k + Z_k = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

e dove scriveremo per maggiore semplicità

$$r^2 = \Delta_{yz}^2 = \sum X_k^2, \quad r_1^2 = \Delta_{zx}^2 = \sum Y_k^2, \quad r_2^2 = \Delta_{xy}^2 = Z_k^2. \tag{34}$$

Supponiamo ora che il triangolo sia isoscele, e che sia m_x il corpo posto al

(*) LAGRANGE, *Oeuvres*, t. VI.

vertice di questo triangolo, cosicchè $r_1 = r_2$. Sarà anche vantaggioso di avere m_y e m_z riferiti ad uno stesso sistema di coordinate avente m_x per origine. Per fare questo cambiamento nelle nostre equazioni basta cambiare il segno di Y_k. Risulta il sistema nuovo

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad X''_k + \left[\frac{M}{r_1^3} + (m_y + m_z)\, q\right] X_k = 0,\\
&\text{(b)} \quad Y''_k + \frac{M}{r_1^3} Y_k + m_y\, q\, X_k = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ 3),\\
&\text{(c)} \quad Z''_k + \frac{M}{r_1^3} Z_k - m_z\, q\, X_k = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

ove

$$q = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}, \quad X_k - Y_k + Z_k = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{36}$$

Sieno ξ_1, ξ_2, ξ_3 e $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ rispettivamente le coordinate del punto medio e del baricentro della base, cosicchè

$$\xi_k = \frac{1}{2}(Y_k + Z_k), \quad \bar{x}_k = \frac{m_y Z_k + m_z Y_k}{m_y + m_z}, \quad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{37}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \xi''_k + \frac{M}{r_1^3} \xi_k + \frac{1}{2}(m_y - m_z)\, q\, X_k = 0,\\
&\text{(b)} \quad \bar{x}''_k + \frac{M}{r_1^3} \bar{x}_k = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Le (35 a) e (38 b) ammettono gli integrali delle aree

$$X_i X'_j - X_j X'_i = a_k, \quad \bar{x}_i \bar{x}'_j - \bar{x}_j \bar{x}'_i = b_k, \quad (k = 1,\ 2,\ 3),$$

onde

$$\Sigma\, a_k X_k = 0, \quad \Sigma\, b_k \bar{x}_k = 0.$$

Il movimento di m_z si effettua dunque in un piano p passante per m_y e fisso rispetto a m_y; il baricentro della base si muove in un piano p' passante per m_x e fisso rispetto a m_x.

Si può scegliere il terzo asse delle coordinate in tal modo che a_1 e a_2 si annullino, cosicchè sarà

$$X_3 = 0.$$

Per primo asse delle coordinate scegliamo una retta parallela all'intersezione di p e p'. Fatto ciò, b si annullerà, e designando con I l'angolo dei due piani p e p', si potrà scrivere

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -C \operatorname{sen} I, \quad b_3 = C \cos I,$$

e quindi

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x}_1 \bar{x}'_3 - \bar{x}_3 \bar{x}'_1 = C \operatorname{sen} I, \quad \bar{x}_1 \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 \bar{x}'_1 = C \cos I, \quad \bar{x}_3 = \bar{x}_2 \tan I, \\ X_1 X'_2 - X_2 X'_1 = C_1 , \end{array}\right\} \tag{39}$$

dove abbiamo scritto C_1 invece di a_3.

Poichè $X_3 = 0$, la base del triangolo resta sempre parallela al piano dei primi due assi. Dalle (36) e (37) si ricava

$$Y_3 = Z_3 = \xi_3 = \bar{x}_3.$$

La condizione $r_1^2 = r_2^2$, la quale si può scrivere

$$\Sigma (Y_k^2 - Z_k^2) = 0,$$

si riduce dunque a

$$(Y_1 + Z_1)(Y_1 - Z_1) + (Y_2 + Z_2)(Y_2 - Z_2) = 0$$

o, secondo le (36) e (37),

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 = 0. \tag{40}$$

Derivando la (40) si vede la possibilità di definire una quantità nuova ρ, tale che sia

$$\rho = \xi'_1 X_1 + \xi'_2 X_2 = -(\xi_1 X'_1 + \xi_2 X'_2). \tag{41}$$

Combinando queste equazioni colla (40) si trovano le seguenti

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \rho = -\xi_2 (X_1 X'_2 - X_2 X'_1) = -C_1 \xi_2, \quad X_2 \rho = C_1 \xi_1, \\ \xi_2 \rho = -X_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1), \end{array}\right\} \tag{42}$$

onde

$$X_1 \xi_2 [\rho^2 - C_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1)] = 0.$$

Se $X_1 = 0$, secondo la (40) dev'essere anche $\xi_2 = 0$, poichè la soluzione $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ è evidentemente di nessuna importanza.

Avremo dunque

$$X_1 = \xi_2 = 0, \quad X_2 \neq 0, \tag{43}$$

e, secondo la (38),

$$(m_y - m_z)\, q = 0.$$

Dunque, o le due masse m_y e m_z sono eguali, o il triangolo è equilatero.

Lasciando da parte questi casi, dev'essere

$$\rho^2 = C_1 (\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1). \tag{44}$$

Derivando la (41) e sostituendo alle derivate di secondo ordine i loro valori dalle (35) e (39), si trovano le equazioni

$$\rho' = \xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 - \frac{1}{2}(m_y - m_z) q r^2,$$

$$\rho' = -(\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2),$$

onde

$$-(\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2) = \rho' = \frac{-1}{4}(m_y - m_z) r^2 q = \frac{1}{2}(m_y + m_z) \mu r^2 q \tag{45}$$

ove

$$\mu = \frac{m_z - m_y}{2(m_z + m_y)}.$$

Se le masse m_y e m_z sono eguali, avremo

$$\xi'_1 X'_1 + \xi'_2 X'_2 = 0.$$

Derivando questa relazione, e sostituendo alle derivate di secondo ordine i loro valori dalle (35) e (38), si trova, secondo la (41),

$$(m_y + m_z) \rho q = 0.$$

Lasciando da parte le note soluzioni equilaterali del Lagrange, ρ deve annullarsi. Secondo le (42) dev'essere o $C_1 = 0$ o $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Poichè nel nostro caso $m_y = m_z$, se $\xi_1 = \xi_2 = 0$ segue, secondo la (39), che C deve annullarsi. Si presentano dunque due classi di soluzioni nel caso $m_y = m_z$ corrispondenti rispettivamente alle due condizioni $C_1 = 0$ e $C = 0$. Se $C_1 = 0$ la base del triangolo isoscele resta sempre parallela ad una linea fissa (soluzione cilindrica). Nel caso $C = 0$, $C_1 \neq 0$, il punto medio della base si muove sul terzo asse e la base rimane sempre parallela al piano degli altri due. Se $C = C_1 = 0$ i due casi si combinano in modo evidente. Per qualche valore di t si deve avere $r = 0$ (*). Il caso caratterizzato dalle (43) è compreso in questa discussione,

(*) Questi casi sono stati discussi dal Fransèn nel suo lavoro citato nell'introduzione ed anche più recentemente dal Buchanan nella sua tesi presentata all'Università di Chicago e non ancora pubblicata.

poichè da quelle equazioni seguono

$$\rho = 0, \quad C_1 = 0,$$

le quali soddisfano alla (44).

Ora sia $m_y \neq m_z$. Se escludiamo il caso che il triangolo sia equilatero, la (45) dimostra che ρ non può essere costante. Secondo le (42) e (35), C_1 sarà dunque diverso da zero. Scegliamo l'unità del tempo in modo che sia $C_1 = 1$, e l'unità delle masse in modo che sia $\frac{1}{2}(m_y + m_z) = 1$. Allora dalle (42) e 44) si trovano le equazioni

$$\rho = \frac{\xi_1}{X_2} = -\frac{\xi_2}{X_1}, \quad \rho^2 = \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1. \tag{46}$$

Dalle definizioni delle quantità $\bar{x}_k$, ξ_k e X_k si ricava

$$\bar{x}_k = \xi_k + \mu X_k, \quad (k = 1, 2), \tag{47}$$

e la sostituzione di queste espressioni nella (39) dà

$$\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1 + \mu(\xi_1 X'_2 - \xi_2 X'_1 + X_1 \xi'_2 - X_2 \xi'_1) + \mu^2 (X_1 X'_2 - X_2 X'_1) = C \cos I. \tag{48}$$

Dalla (46) si trovano

$$X_1 \xi'_2 - X'_1 \xi_2 = -X_1^2 \rho', \; X_2 \xi'_1 - X'_2 \xi_1 = X_2^2 \rho', \; \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1 = \rho^2,$$

e quindi

$$\rho^2 - \mu r^2 \rho' = C \cos I - \mu^2. \tag{49}$$

Sostituendo il valore di ρ' dalla (45) si trova

$$\rho^2 - \mu^2 r^4 q = C \cos I - \mu^2, \tag{50}$$

una relazione integrale fra le coordinate.

Si possono introdurre coordinate polari mediante la sostituzione

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= r \cos \theta, & \bar{x}_1 &= s \cos \omega, \\ X_2 &= r \sin \theta, & \bar{x}_2 &= s \sin \omega. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Secondo la (46) si avrà

$$\xi_1 = p \sin \theta, \qquad \xi_2 = -p \cos \theta, \tag{52}$$

e le equazioni differenziali (35 a) e (38) sono rispettivamente equivalenti a

$$r'' - \frac{1}{r^3} + \left(\frac{m_x}{r_1^3} + \frac{2}{r^3}\right) r = 0, \quad r^2\,\theta' = 1, \tag{53}$$

e

$$s'' - \frac{C^2 \cos^2 I}{s^3} + \frac{2+m}{r_1^3}\, s = 0, \quad s^2\,\omega' = C \cos I; \tag{54}$$

dove, secondo la (47),

$$r_1^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \left(\frac{1}{2} r\right)^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - 2\mu\,(\bar{x}_1 X_1 + \bar{x}_2 X_2) + \mu^2 r^2 + \frac{1}{4} r^2.$$

Si può scrivere

$$r_1^2 = s^2\,(1 + \sin^2\omega \tan^2 I) + \left(\frac{1}{4} - \mu^2\right) r^2$$

giacchè dalle (40) e (47) si può ricavare

$$\bar{x}_1 X_1 + \bar{x}_2 X_2 = \mu\, r^2.$$

Quest'ultima relazione si può anche scrivere così:

$$s \cos(\theta - \omega) = \mu\, r. \tag{55}$$

Si avrà dunque

$$\left.\begin{aligned} R^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 &= \frac{1}{4} - \mu^2 + \mu^2 \sec^2\psi\,(1 + \operatorname{sen}^2\omega \tan^2 I) = \\ &= \frac{1}{4} + \mu^2\,(\tan^2\psi + \sec^2\psi \operatorname{sen}^2\omega \tan^2 I), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

dove

$$\psi = \theta - \omega. \tag{57}$$

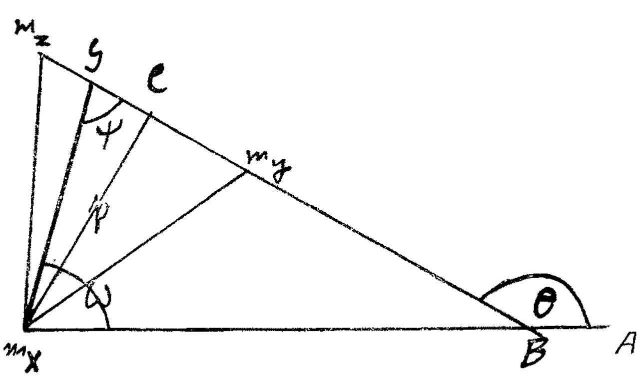

Fig. 1.

La figura rappresenta la proiezione del triangolo sul piano dei due primi assi. p e s sono le distanze dal vertice m_x alla proiezione C del punto medio ed alla proiezione G del baricentro della base. Gli angoli $A\,m_x\,G$ e $A\,B\,C$ saranno rispettivamente eguali a ω e θ, cosicchè $m_x\,G\,B$ sarà eguale a ψ.

Sarà

$$C\,G = \mu\, r,$$

e quindi

$$\frac{p}{\mu\, r} = \tan\psi, \quad \frac{s}{\mu\, r} = \sec\psi, \tag{58}$$

la quale ultima relazione coincide colla (56).

Ormai si può scrivere

$$\rho = \frac{\xi_1}{X_2} = \frac{p}{r} = \mu \tan\psi. \tag{59}$$

Poichè

$$q = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{1}{R^3}\right)$$

si avrà

$$r^4\, q = r\left(1 - \frac{1}{R^3}\right).$$

La sostituzione di questi valori nella (50) dà

$$r = \left(-\frac{C\cos I}{\mu^2} + \sec^2\psi\right)\frac{R^3}{R^3 - 1} \tag{60}$$

e

$$s = \mu\, r \sec\psi. \tag{61}$$

Abbiamo dunque trovato una soluzione per r e s come funzioni di ψ e ω, cioè come funzioni di θ e ω. Ma θ e ω non sono indipendenti. Infatti dalle (53) e (54) si trova

$$\frac{d\,\omega}{d\,\theta} = C\cos I\,\frac{r^2}{s^2} = \frac{C\cos I}{\mu^2}\cos^2\psi$$

onde

$$\frac{d\,\psi}{d\,\theta} = 1 - \frac{C\cos I}{\mu^2}\cos^2\psi. \tag{62}$$

Questa equazione ha la soluzione costante

$$\cos^2\psi = \frac{\mu^2}{C\cos I}$$

che corrisponde alle soluzioni equilaterali di Lagrange, come vedremo più tardi. Per la discussione degli altri casi poniamo

$$\frac{C \cos I}{\mu^2} = 1 - \alpha^2. \tag{63}$$

Sarà

$$\tan \psi = \alpha \tan \alpha (\theta - \theta_0) \tag{64}$$

l'integrale di (62), dove α può essere o reale o puramente immaginario, ma non eguale a zero, e dove la costante d'integrazione θ_0 dev'essere reale in ogni caso perchè i valori reali di θ e di ψ si possano corrispondere.

Giacchè

$$\omega = \theta - \psi,$$

si avrà

$$\operatorname{sen} \omega \sec \psi = \operatorname{sen} \theta - \cos \theta \tan \psi = \operatorname{sen} \theta - \alpha \cos \theta \tan \alpha (\theta - \theta_0),$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4} + \mu^2 [\alpha^2 \tan^2 \alpha (\theta - \theta_0) + (\operatorname{sen} \theta - \alpha \cos \theta \tan \alpha (\theta - \theta_0))^2 \tan^2 I], \\ r &= \alpha^2 \sec^2 \alpha (\theta - \theta_0) \frac{R^3}{R^3 - 1}, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

cosicchè tutte le coordinate sono date come funzioni di θ.

In tutto quest'argomento non abbiamo utilizzato la prima equazione delle (53). Ponendo $u = \frac{1}{r}$, ed introducendo θ come variabile indipendente invece di t, questa equazione diventa

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + u = 2 + \frac{m_x}{R^3}.$$

Dalla (65) si trae

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \alpha (\theta - \theta_0) \left(1 - \frac{1}{R^3}\right). \tag{66}$$

L'eliminazione di R^3 fra le ultime due equazioni dà l'equazione lineare per u,

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + [1 + m_x \alpha^2 \sec^2 \alpha (\theta - \theta_0)] u = 2 + m_x. \tag{67}$$

Per dimostrare la non esistenza delle soluzioni isosceli, basta far vedere che la (66) non può soddisfare alla (67).

Le singolarità dei coefficienti di (67) sono i valori

$$\theta = \theta_0 + (2n+1)\frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{e} \quad \infty,$$

fra i quali l'ultimo è una singolarità essenziale, mentre gli altri sono poli. Di più, questi punti sono singolarità dello stesso genere per R^2 e zeri per u. D'altra parte gli zeri di R^2 sono poli di u. Se esistono zeri di R^2 nella parte finita del piano θ, la (66) non può soddisfare alla (67) poichè la (67) è lineare e ha questi punti come punti regolari. Basta dunque dimostrare che R^2 ha degli zeri finiti.

Supponiamo prima che α sia reale, e mettiamo in evidenza le parti reale ed immaginaria di θ, mediante la sostituzione

$$\theta = u + i v, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Si ha

$$\cos(u + i v) = \cos u \cosh v - i \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v,$$

$$\tan(u + i v) = \frac{\tan u + i \tanh v}{1 - i \tan u \tanh v},$$

e quindi

$$\lim_{v=\infty} \tan(u + i v) = \frac{\tan u + i}{1 - i \tan u} = i,$$

$$\lim_{v=\infty} \frac{\cos(u + i v)}{\cosh v (\cos u - i \operatorname{sen} u)} = 1.$$

Evidentemente, dunque, si può scegliere v abbastanza grande perchè la differenza fra R^2 e la funzione

$$f = \frac{1}{4} + \mu^2 [-\alpha^2 - (1-\alpha)^2 \tan^2 I (\cos u - i \operatorname{sen} u)^2 \cosh^2 v]$$

diventi minore che δ, essendo il valore assoluto di δ piccolo a piacere. Ma, se $\tan I \neq 0$, $\alpha \neq 1$, si può, per ogni valore di u, scegliere v in modo che il valore assoluto di questa funzione f superi qualunque numero finito. Gli zeri di R^2 non possono, dunque, essere all'infinito. Se α è razionale, R^2 è una funzione periodica di θ senza singolarità essenziale nella parte finita del piano. Deve dunque avere zeri in ogni striscia di larghezza P parallela all'asse immaginario, se designamo con P il suo periodo. Non avendo zeri all'infinito, R^2 deve dunque aver zeri nella parte finita del piano. Questi zeri esisteranno ancora se α è irrazionale, poichè R^2 è funzione continua di θ e α.

Si può vedere facilmente che esistono zeri anche nel caso eccezionale $\tan I = 0$. Infatti, l'equazione $R^2 = 0$, che corrisponde a questo caso, si riduce ad una equazione quadratica nella quale il coefficiente del termine quadratico non si annulla. Discuteremo più tardi il caso $\alpha^2 = 1$.

Consideriamo adesso il caso in cui α sia puramente immaginario. Ponendo $\alpha = \beta i$, l'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$\frac{1}{4} + \mu^2 [\beta^2 \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) + \{ \tan \theta + \beta \tanh \beta (\theta - \theta_0) \}^2 \cos^2 \theta \tan^2 I] = 0,$$

onde

$$\left[\frac{1}{4} + \mu^2 \{ \beta^2 \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) + \tan^2 I \}\right] \tan^2 \theta + 2\beta \mu^2 \tanh \beta (\theta - \theta_0) \tan^2 I \tan \theta +$$
$$+ \frac{1}{4} + \beta^2 \mu^2 \sec^2 I \tanh^2 \beta (\theta - \theta_0) = 0.$$

Si ha

$$\tanh (x + i y) = \frac{\tanh x + i \tan y}{1 + i \tanh x \tan y},$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty} \tanh (x + i y) = 1,$$

indipendentemente dal valore di y. Ponendo

$$\theta = 2 k \pi + \omega$$

si può dunque prendere k tanto grande che la quantità $\tanh \beta (\theta - \theta_0)$ sia tanto vicina all'unità quanto si voglia. L'equazione $R^2 = 0$ diventerà dunque

$$\left[\frac{1}{4} + \mu^2 (\beta^2 + \tan^2 I)\right] \tan^2 \omega + 2 \beta \mu^2 \tan^2 I \tan \omega + \frac{1}{4} + \beta^2 \mu^2 \sec^2 I = \lambda \quad (68)$$

dove λ si può rendere piccolo a piacere, scegliendo abbastanza grande il numero intero k. Se $\lambda = 0$ questa equazione (68) si può certamente soddisfare con due valori di $\tan \omega$. Da teoremi noti della teoria delle funzioni implicite segue che esistono soluzioni della (68) anche se λ è diverso da zero ma abbastanza piccolo.

Se $\alpha^2 = 1$, la costante $C \cos I$ si annulla. Se $\cos I \neq 0$, $C = 0$, si possono applicare le equazioni del caso generale senza modificazioni essenziali. Se, invece, $\cos I = 0$, si avrà $\tan I = \infty$ e alcune di quelle equazioni non valgono più. Si avrà in questo caso $\omega = 0$ o $\omega = 180^0$, cosicchè

$$r = \sec^2\theta \frac{R^3}{R^3 - 1}, \quad u = \cos^2\theta\left(1 - \frac{1}{R^3}\right) \tag{69}$$

e

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + [1 + m_x \sec^2\theta] u = 2 + m_x. \tag{70}$$

L'espressione (65) per R^2 non vale più. Il baricentro in questo caso si muove, rispetto ad m_x, nel piano del primo e del terzo asse. Porremo dunque

$$\bar{x}_1 = \sigma\cos\varphi, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \sigma \operatorname{sen}\varphi$$

ciò che dà, secondo le (39),

$$\sigma^2\varphi' = C. \tag{71}$$

Si trova

$$\frac{r_1^2}{r^2} = R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{r^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{4} + \frac{p^2}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\tan^2\varphi$$

o

$$R^2 = \frac{1}{4} + \mu^2\tan^2\theta + \mu^2\sec^2\theta\tan^2\varphi. \tag{72}$$

Poichè

$$\varepsilon^2\theta' = 1$$

si avrà

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = C\frac{r^2}{\sigma^2} = C\frac{r^2}{s^2}\cos^2\varphi = \frac{C}{\mu^2}\cos^2\varphi\cos^2\theta,$$

ciò che dà

$$\tan\varphi = \frac{C}{2\mu^2}\left[\theta + \theta_0 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right], \tag{73}$$

se $\cos\varphi \neq 0$; dove θ_0, costante d'integrazione, dev'essere reale (*). Sostituendo la (73) nella (72) si trova

$$\left.\begin{aligned} R^2 = \Bigg[\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\mu^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\mu^2\right)\cos 2\theta + \\ + \frac{C^2}{16\mu^2}\{2(\theta_0 + \theta) + \operatorname{sen} 2\theta\}^2\Bigg]\sec^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

e resta da dimostrare che R^2 ha degli zeri finiti.

(*) Se $\cos\varphi = 0$, deve annullarsi la costante C; caso che discuteremo più tardi.

A questo scopo poniamo

$$2\theta = u + i v.$$

L'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$0 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\mu^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\mu^2\right)(\cos u \cosh v - i \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v)$$
$$+ \frac{C^2}{16\mu^2}[2\theta_0 + u + \operatorname{sen} u \cosh v + i\{v + \cos u \operatorname{senh} v\}]^2.$$

Sia

$$\frac{16\mu^2}{C^2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\mu^2\right) = \alpha^2, \quad \frac{16\mu^2}{C^2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\mu^2\right) = \beta^2,$$

cosicchè α^2 e $\beta^2 < \alpha^2$ saranno due numeri positivi.

L'equazione $R^2 = 0$ si divide in due, cioè

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 + \beta^2 \cos u \cosh v + (2\theta_0 + u + \operatorname{sen} u \cosh v)^2 - (v + \cos u \operatorname{senh} v)^2, \\ 0 &= -\frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v + (2\theta_0 + u + \operatorname{sen} u \cosh v)(v + \cos u \operatorname{senh} v). \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Per ogni valore reale di θ_0, le soluzioni reali, se esistono, delle (75) daranno uno o più punti del piano u, v. Se θ_0 varia, il luogo di questi punti sarà una curva la cui equazione si ottiene eliminando θ_0, ciò che dà

$$\alpha^2 + \beta^2 \cos u \cosh v + \left(\frac{\frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v}{v + \cos u \operatorname{senh} v}\right)^2 - (v + \cos u \operatorname{senh} v)^2 = 0. \quad (76)$$

Se designamo con u, v le coordinate di un punto della (76), il valore corrispondente di θ_0 si può calcolare dall'equazione

$$2\theta_0 = -u - \operatorname{sen} u \cosh v + \frac{\frac{1}{2}\beta^2 \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v}{v + \cos u \operatorname{senh} v}. \quad (77)$$

Poichè $\alpha^2 > \beta^2$, il primo membro della (76) è positivo per $v = 0$, e se $\cos u \neq 0$, esso è negativo per $v = \infty$. Per ogni valore di u per il quale $\cos u$ non si annulla, esisterà dunque almeno un valore di v soddisfacente alla (76), e per mezzo della (77) un valore reale corrispondente di θ_0. Se $\cos u$ tende verso zero, un ramo della curva (76) si allontana verso l'infinito. Poniamo

$$y = v + \cos u \operatorname{senh} v,$$

il che permette di scrivere invece della (76) la seguente

$$y^4 - \beta^2 \coth v \,.\, y^3 + \left(\frac{1}{4}\beta^4 + \beta^2 v \coth v - \alpha^2\right) y^2 - \frac{1}{2}\beta^4 v \,.\, y -$$

$$- \frac{1}{4}\beta^4 (\mathrm{senh}^2 v - v^2) = 0.$$

Per i valori molto grandi di v predomina l'ultimo termine, cosicchè $y = v + \cos u \,\mathrm{senh}\, v$ tende verso $\pm \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2 \,\mathrm{sen}\, h\, v}$, ciò che ha per consegnenza che il limite di $2\,\theta_0$ sia $\pm \infty$.

Si può dimostrare adesso che le (75) hanno almeno una soluzione finita e reale per ogni valore reale di θ_0. Giacchè $2\,\theta_0$ ha $\pm \infty$ per limite quando $\cos u$ tende verso zero, scegliendo abbastanza grande il numero n si potrà trovare un intervallo per u, tale che i valori corrispondenti di θ_0 riempiano l'intervallo da $n\pi$ a $(n+1)\pi$; e questo fatto basta per dimostrare il nostro teorema se il dato valore di θ_0 sta in questo intervallo. In caso contrario basta l'addizione di un multiplo adatto di 2π alla quantità u per far vedere che si può sempre soddisfare alle (76) e (77) per qualunque dato valore di θ_0.

Se fosse $\theta_0 = \infty$, sarebbe $\tan \varphi = \infty$, e secondo l'equazione

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{C}{\mu^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta\,,$$

φ dovrebbe essere costante. Giacchè si ha

$$\sigma^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

C dovrebbe annullarsi. Abbiamo già fatto la discussione del caso $C = 0$, $\cos I \neq 0$. Se, invece, $C = \cos I = 0$, si avrà, secondo la (71) o $\sigma = 0$ o $\varphi' = 0$. Ma, se m_y non è eguale a m_z, σ non può essere eguale a zero. Poichè abbiamo già trattato il caso $m_y = m_z$, resta soltanto la possibilità $\varphi' = 0$. Dunque φ dev'essere costante e l'espressione (72) di R^2 sarà applicabile; ma questa espressione evidentemente ha degli zeri nella parte finita del piano.

Resta a discutere il caso $\alpha = 0$, finora escluso.

In questo caso avremo

$$\tan \psi = \frac{1}{(\theta_0 - \theta)},$$

ciò che dà per R^2, r e u le espressioni seguenti

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{4} + \mu^2\left[\frac{1}{(\theta_0-\theta)^2} + \left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\theta}{\theta_0-\theta}\right)^2 \tan^2 I\right], \\ r &= \frac{1}{(\theta_0-\theta)^2}\,\frac{R^3}{R^3-1}, \quad u = (\theta_0-\theta)^2\left(1-\frac{1}{R^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

L'equazione differenziale per u diventa

$$\frac{d^2 u}{d\,\theta^2} + \left[1 + \frac{m_r}{(\theta_0-\theta)^2}\right] u = 2 + m_x,$$

la cui unica singolarità, $\theta = \theta_0$, è uno zero di u e un polo per R^2. Anche in questo caso R^2 ha degli zeri nella parte finita del piano, del che si può facilmente convincersi ponendo prima $\theta = u + i\,v$, e poi $u = k\,\pi$, dove k è un numero intero. L'equazione $R^2 = 0$ diventa

$$\frac{1}{4} - \mu^2 \operatorname{senh}^2 v \tan^2 I = \lambda$$

ove λ si può rendere piccolo a piacere, scegliendo abbastanza grande il numero intero k. Come sopra, si conclude che esistono soluzioni di quest'equazione se $\tan I \neq 0$. L'esistenza delle soluzioni nel caso $\tan I = 0$ è evidente.

Abbiamo ridotto la ricerca delle soluzioni isosceli del problema dei tre corpi all'equazione (62), ed abbiamo trovato una contraddizione in ogni caso nel quale la funzionè ψ non sia costante. In questo ultimo caso sarà

$$\sec^2\psi = \frac{C\,\cos I}{\mu^2}$$

o

$$\mu^2 \tan^2\psi = C\cos I - \mu^2,$$

e quindi

$$\rho^2 = C\cos I - \mu^2.$$

Ma per la (50) si ha

$$\rho^2 - \mu^2\, r^4\, q = C\cos I - \mu^2,$$

cosicchè

$$\mu^2 r^4 q = 0.$$

Il triangolo, dunque, dev'essere equilatero.

Se tutte le masse del sistema sono diverse fra loro, le uniche soluzioni isosceli sono, dunque, le soluzioni equilaterali del LAGRANGE; *e non esistono nè soluzioni cilindriche, nè soluzioni nelle quali l'orbita di uno dei corpi sia linea asintotica sopra una delle rigate del problema.*

The University of Chicago,
12 Agosto, 1912.