Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen.

Von

Hans Hamburger in Berlin.

Man verdankt Riemann[1]) eine Formel, die die Koeffizientensummen Dirichletscher Reihen durch bestimmte Integrale darstellt. In den folgenden Ausführungen soll ein neuer Beweis der Riemannschen Formel angegeben werden, der einfacher als die bisher bekannten Beweise erscheint, und gleichzeitig die Gültigkeitsbedingungen der Riemannschen Formel wesentlich verallgemeinert, indem diese auf eine Klasse von Funktionen angewendet wird, die die Dirichletschen Reihen nur als speziellen Fall enthält.

§ 1.

1. Es sei $0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$ eine unendliche Folge positiver monoton wachsender Zahlen, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge beliebiger reeller oder komplexer Koeffizienten. $s = \sigma + it$ bezeichne die komplexe Veränderliche.

Dann nennt man

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe.

Setzt man voraus, daß die Reihe (1) für einen beliebigen Punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$ konvergiert, so besitzt sie bekanntlich eine Konvergenzhalbebene $\sigma > \alpha$; d. h. die Reihe konvergiert für jeden Punkt mit reellem Teil $> \alpha$ und divergiert für jeden Punkt mit reellem Teil $< \alpha$. Hierbei kann auch der Fall eintreten, daß $\alpha = -\infty$ wird; es ist aber jedenfalls

[1]) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Ges. Werke, herausgegeben von H. Weber, II. Aufl., Leipzig 1892, S. 145–153. Vgl. insbesondere S. 148–150.

immer $\alpha \leqq \sigma_0$ [2]). Über Konvergenz oder Divergenz der Reihe auf der Geraden $\sigma = \alpha$ läßt sich im allgemeinen Falle nichts aussagen. Im folgenden soll zunächst immer $\alpha \geqq 0$ vorausgesetzt werden. Doch werden wir uns von dieser Einschränkung am Ende des § 2 befreien.

In jedem endlichen abgeschlossenen Bereiche der Konvergenzhalbebene, welcher keinen Punkt der Geraden $\sigma = \alpha$ enthält, konvergiert die Dirichletsche Reihe gleichmäßig in bezug auf s und stellt dort folglich nach einem bekannten Satze von Weierstraß eine analytische Funktion $f(s)$ dar.

Im allgemeinen Falle besitzt die Dirichletsche Reihe außer der Halbebene bedingter Konvergenz noch eine solche absoluter Konvergenz $\sigma > \beta$. Es ist offenbar immer $\beta \geqq \alpha$, und zwar sind auch die Grenzfälle möglich, nämlich der Fall $\alpha = \beta$, d. h. daß die Dirichletsche Reihe entweder absolut konvergiert oder überhaupt nicht, und der Fall $\beta = +\infty$, wo die Dirichletsche Reihe in keinem Punkte absolut konvergiert, obwohl sie eine Halbebene bedingter Konvergenz hat.

2. Um zur Riemannschen Formel zu kommen, führen wir eine unstetige, aus den Koeffizientensummen der Dirichletschen Reihe gebildete, treppenförmige Funktion $A(x)$ ein, die wir, wenn A_m die Summe der $m+1$ ersten Koeffizienten

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n \tag{2}$$

bedeutet, in folgender Weise definieren:

Es sei

$$\begin{aligned} A(x) &= 0 \qquad \text{für} \quad 0 \leqq x < \lambda_0, \quad \text{wenn} \quad \lambda_0 > 0 \\ A(x) &= A_m \qquad \text{für} \quad \lambda_m < x < \lambda_{m+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

An den Stellen λ_m erleidet also die Funktion einen Sprung; sie möge dort den Wert annehmen, der in der Mitte des Sprunges gelegen ist, d. h.

$$A(\lambda_0) = \frac{a_0}{2}, \qquad A(\lambda_m) = \frac{A_{m-1} + A_m}{2} = A_{m-1} + \frac{a_m}{2}. \tag{4}$$

Dann lautet die Riemannsche Formel:

$$A(x) = \lim_{\omega = \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{f(s)}{s} e^{xs}\, ds. \tag{5}$$

---

[2]) Vgl. z. B. bezüglich dieser und der folgenden Sätze über Dirichletsche Reihen: E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, zwei Bände, — im folgenden kurz mit Landau, Handbuch, zitiert. Die allgemeinen Sätze über die Konvergenz Dirichletscher Reihen findet man im Bd. II, S. 726 ff.

Riemann beweist diese Formel für das spezielle Beispiel der Funktion

$$f(s) = \log \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + \frac{1}{2} \sum_p p^{-2s} + \ldots,$$

wo die Summen rechter Hand über sämtliche Primzahlen zu erstrecken sind. Diese Reihe ist in der Halbebene $\sigma > 1$ absolut konvergent; die Formel (5) konvergiert hier gleichfalls für $\sigma > 1$.

Der Riemannsche Beweis beruht darauf, daß das Integral (5) auf ein Fouriersches Doppelintegral zurückgeführt wird. Die genauen Bedingungen, unter denen (5) konvergiert, hat Riemann nicht näher geprüft; waren doch, wie Herr Landau in seinem Buche erwähnt[3]), damals hinreichende Bedingungen, unter denen das Fouriersche Integraltheorem gilt, noch nicht bekannt. Bedingungen, die den Riemannschen Fall umfassen, wurden erst später durch Herrn Jordan im Jahre 1883 in seinem Cours d'analyse[4]) aufgestellt. Immerhin ist unter Zuhilfenahme dieser Jordanschen Ergänzung, wie Herr Landau bemerkt, der Riemannsche Beweis für den Fall einer absolut konvergenten Dirichletschen Reihe, den Riemann im Auge hat, vollkommen schlüssig.

Die Riemannsche Formel (5) ist noch mehrfach auf anderen Wegen bewiesen worden, zunächst für denselben Bereich wie von Riemann, d. h. für $\sigma > \beta$ von Herrn Phragmén[5]), dann von Herrn Hadamard unter etwas erweiterten Voraussetzungen[6]).

Etwa gleichzeitig erschien eine Arbeit von Herrn Perron[7]). In ihr wird die Konvergenz des Integrals (5) für allgemeine Dirichletsche Reihen, wofern diese nur eine Halbebene bedingter Konvergenz $\sigma > \alpha$ besitzen, für $\sigma > \alpha$ bewiesen. Dies ist das allgemeinste unter den bisher bekannten Resultaten.

Der Perronsche Beweis, der, wie auch die Beweise der Herren Phragmén und Hadamard, im Gegensatze zu dem Riemannschen Gedankengang sich auf den Cauchyschen Integralsatz stützt, ist aber noch etwas kompliziert. Er benutzt wesentlich den schon an sich nicht einfach

---

[3]) Landau, Handbuch, Bd. II, S. 906.

[4]) C. Jordan, Cours d'analyse, Paris 1894, zweite Aufl., Bd. II, S. 233–235.

[5]) E. Phragmén, Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel. Öfversigt af Knogl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, Bd. 48 (1891 bis 1892), S. 721–744.

[6]) J. Hadamard, Sur les séries de Dirichlet, Rend. del circ. Mat. di Palermo, Bd. 25 (1908), S. 326–330.

[7]) O. Perron, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Crelles Journal, Bd. 134 (1908), S. 95–143; vgl. insbesondere S. 114–125. Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. 41, S. 828–832.

zu beweisenden Hilfssatz[8]), daß der Quotient $\frac{f(s)}{s}$ sich mit wachsendem t für $\sigma \geqq \alpha + \varepsilon$ gleichmäßig in bezug auf σ der 0 nähert.

3. Um zu unserem allgemeineren Satz zu gelangen, nehmen wir zunächst mit Hilfe der in (2), (3) und (4) definierten Funktion $A(x)$ eine einfache Umformung der Dirichletschen Reihe vor, wir setzen nämlich:

$$(6) \qquad f(s) = s\int_0^\infty A(u)e^{-su}du$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} sA_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su}du = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1}s}),$$

und man sieht unschwer, daß die Summe rechter Hand aus der Dirichletschen Reihe durch sogenannte partielle (Abelsche) Summation hervorgegangen ist, die ja bei den Schlüssen in der Theorie der Dirichletschen Reihen überhaupt eine wichtige Rolle spielt.

Nun gilt aber nach einer bekannten, leicht zu beweisenden Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihe, wenn $\alpha \geqq 0$ ist, die Abschätzung[9])

$$|A(u)| \leqq Ce^{(\alpha+\varepsilon)u}$$

für jedes noch so kleine positive ε, wo C eine Konstante bedeutet, die nur von ε abhängt. Folglich ist die Integraldarstellung (6) für $f(s)$ wegen

$$\int_0^\infty |A(u)|\,|e^{-su}|\,du \leqq C\int_0^\infty e^{(\alpha+\varepsilon-\sigma)u}du$$

mindestens für $\sigma > \alpha + \varepsilon$ *absolut* konvergent. Bezeichnet man demnach mit γ die Abszisse absoluter Konvergenz des Integrals (6), so ist jedenfalls $\gamma \leqq \alpha$, wenn $\alpha \geqq 0$ ist.

Der Fall $\gamma < \alpha$ kann auch eintreten. Im § 3 wird ein Beispiel einer Funktion angegeben, deren Integraldarstellung (6) eine absolute Konvergenzhalbebene besitzt, während die zugehörige Dirichletsche Reihe nirgends konvergiert.

Wir behaupten nunmehr die Konvergenz des Integrals (5) für $\sigma > \gamma$, wobei die Größe γ selbst auch negativ sein darf.

4. Bisher wurde $A(u)$ als Treppenfunktion angenommen; jetzt soll diese Funktion durch eine beliebige reelle Funktion $V(u)$ ersetzt werden, von der nur vorausgesetzt wird, daß sie in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist[10]).

---

[8]) Perron l. c.[7]) Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. II, S. 822—823.

[9]) Vgl. Landau, Handbuch, Bd. II, S. 732—734.

[10]) Man überzeugt sich leicht, daß für den Fall der Dirichletschen Reihe die Treppenfunktion $A(u)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist.

Ist $V(u)$ an der Stelle $u = x$ unstetig, so werde in leicht verständlicher Abkürzung

$$V(x) = \frac{V(x+0) + V(x-0)}{2} \tag{7}$$

gesetzt. Ist $\lim\limits_{u=+0} V(u)$ von 0 verschieden, so sei unter $V(0)$ der Wert

$$V(0) = \lim_{u=+0} \frac{V(u)}{2} \tag{7'}$$

verstanden.

Wir betrachten nunmehr eine Funktion von der Form

$$f(s) = s\int_0^\infty V(u)\, e^{-su}\, du, \tag{8}$$

wo das Integral rechter Hand für $\sigma > \gamma$ absolut konvergieren möge.

Dann behaupten wir, es ist für $\sigma > \gamma$

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\omega i}^{\sigma+\omega i} \frac{f(s)}{s} e^{xs}\, ds. \tag{9}$$

Im § 2 wollen wir für die Riemannsche Formel in der allgemeineren Gestalt (9) einen Beweis angeben, der sich im wesentlichen dadurch einfacher als die Perronsche Schlußweise gestaltet, daß unser Gedankengang die Benutzung des obenerwähnten Perronschen Hilfssatzes vermeidet.

Als besonders bemerkenswert dürfen wir vielleicht hervorheben, daß unser Beweis gerade den ursprünglichen Riemannschen Gedankengang wieder benutzt.

Integrale von der Form (8) haben in der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt. Bei der Fülle der Literatur beschränken wir uns darauf, auf eine Arbeit des Herrn Pincherle[11]) hinzuweisen, weil sich in dieser Arbeit ausführliche Bedingungen angegeben finden, unter denen bei allgemeinem $V(u)$ die Integraldarstellung (9) konvergiert. Herr Pincherle beweist nämlich folgenden Satz:

Ist $f(s)$ eine für $\sigma \geqq \xi$ analytische und mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes reguläre Funktion, läßt sich ferner $f(s)$ auf die Form bringen

$$f(s) = C_0 + \frac{C_1(s)}{s^\vartheta},$$

wo ϑ eine beliebige Zahl > 0, C_0 eine Konstante und $C_1(s)$ eine für $\sigma \geqq \xi$ beschränkte Funktion bedeutet, so konvergiert das Integral (9) absolut und gleichmäßig in x für $\sigma \geqq \xi$ und stellt eine für $0 \leqq \xi < \infty$ stetige Funktion $V(x)$ dar; ferner läßt sich $f(s)$ für $\sigma > \xi$ durch das Integral (8) darstellen.

[11]) S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Annales de l'École Normale Bd. 22 (1905), S. 1–68 vgl. insbesondere S. 31–36.

Man sieht, daß der von Herrn Pincherle betrachtete Fall wesentlich enger als der von uns behandelte ist, da sich ja dort wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals (9) $V(x)$ als stetige Funktion von x ergibt, also der für uns wichtigste Fall der Dirichletschen Reihen — $A(x)$ war eine unstetige Funktion — ausgeschlossen ist.

§ 2.

5. Satz: *Es sei $V(u)$ eine im Intervall $0 \leqq u < \infty$ definierte reelle Funktion von u*[12]*, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung sein möge. An Unstetigkeitsstellen sei $V(u)$ durch die Mittelbildungen (7) und (7′) des § 1 definiert.*

Es sei ferner das Integral

$$f(s) = s\int_0^\infty V(u)e^{-su}du \tag{8}$$

für $\sigma > \gamma$ absolut konvergent, dann ist

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{f(s)}{s} e^{xs}\,ds \tag{9}$$

für $\sigma > \gamma$.

Beweis. Man setze

$$\frac{f(s)}{s} = \int_0^R V(u)e^{-su}du + \int_R^\infty V(u)e^{-su}du,$$

wobei R eine positive Zahl $> x+1$ bedeuten möge, und betrachte die beiden Integrale

$$I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} ds \int_0^R V(u)e^{s(x-u)}du, \tag{10}$$

$$I_2(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} ds \int_R^\infty V(u)e^{s(x-u)}du; \tag{11}$$

dann läßt sich die behauptete Beziehung (9) in der Form schreiben

$$V(x) = \lim_{\omega=\infty}[I_1(\omega) + I_2(\omega)]. \tag{12}$$

Nun ist aber die in (12) enthaltene Behauptung bewiesen, wenn gezeigt wird, daß:

[12]) Ist $V(u)$ eine komplexe Funktion, etwa gleich $\Phi(u) + i\Psi(u)$, und sind $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ beide einzeln in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung, so läßt sich die Formel (9) beweisen, indem man die Funktionen

$$f_1(s) = s\int_0^\infty \Phi(u)e^{-su}du \quad \text{und} \quad f_2(s) = s\int_0^\infty \Psi(u)e^{-su}du$$

beide gesondert betrachtet.

I. für jedes noch so große endliche $R > x + 1$

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = V(x)$$

ist,

II. zu jeder vorgegebenen beliebig kleinen Zahl ε sich eine Zahl $R > x + 1$ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß *unabhängig von* ω

$$|I_2(\omega)| \leqq \varepsilon$$

wird.

Wir beweisen zunächst den zweiten Punkt. Da für $\sigma \geqq \gamma + \varepsilon, |t| \leqq \omega$ das Integral $\int\limits_R^\infty V(u)\, e^{s(x-u)}\, du$ gleichmäßig in s konvergiert, so kann man die Integrationsfolgen in (11) vertauschen und erhält, indem man die Integration nach s zuerst ausführt,

$$I_2(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_R^\infty V(u) \frac{e^{(\sigma+i\omega)(x-u)} - e^{(\sigma-i\omega)(x-u)}}{x-u}\, du.$$

Man erkennt unschwer, daß wegen $u - x > 1$

$$|I_2(\omega)| \leqq \frac{1}{\pi} \int\limits_R^\infty |V(u)|\, e^{\sigma(x-u)}\, du$$

wird, also unabhängig von ω abgeschätzt ist. Wegen der vorausgesetzten absoluten Konvergenz kann man jetzt R so wählen, daß $I_2(\omega)$ unabhängig von ω beliebig klein gemacht werden kann. Damit ist II. bewiesen.

6. Im Falle, daß $V(u)$ gleich einer Treppenfunktion $A(u)$ ist, also im Falle Dirichletscher Reihen, beweist man I. am einfachsten, indem man das Integral $\int\limits_0^R$ als Summe schreibt. Es ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$s \int\limits_0^R A(u)\, e^{-su}\, du = \sum_{\lambda_n < R} a_n e^{-\lambda_n s} - A(R)\, e^{-Rs}$$

Diese endliche Dirichletsche Reihe läßt sich gliedweise integrieren; wenn man die Summe rechter Hand in (10) einsetzt, so erhält man

$$I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\lambda_n < R} a_n \int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{(x-\lambda_n)s}}{s}\, ds - \frac{A(R)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{(x-R)s}}{s}\, ds. \tag{13}$$

Nach einer bekannten Formel[13]) ist aber

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{ys}}{s}\, ds = \begin{cases} 1 \text{ für } y > 0, \\ \frac{1}{2} \text{ für } y = 0, \\ 0 \text{ für } y < 0, \end{cases}$$

[13]) Vgl. etwa Landau, Handbuch, Bd. I, S. 342–345.

und wendet man diese Formeln auf die einzelnen Glieder der endlichen Summe (13) an, so ergibt sich

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = A(x).$$

Ist die Funktion $V(u)$ von allgemeinerer Gestalt, so läßt sich in folgender Weise schließen. Indem man in (10) die Integration nach s zuerst ausführt, wird

$$I_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^R V(u)\frac{e^{(\sigma+i\omega)(x-u)} - e^{(\sigma-i\omega)(x-u)}}{x-u}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^R V(u)\, e^{\sigma(x-u)}\frac{\sin\omega(x-u)}{x-u}\,du.$$

Dies ist aber nichts anderes als das aus der Theorie der Fourierreihen bekannte Dirichletsche Integral[14]) und da nach Voraussetzung $V(u)$ für $0 \leqq u \leqq R$ von beschränkter Schwankung, ferner $0 \leqq x < R$ ist, so wird

$$\lim_{\omega=\infty} I_1(\omega) = V(x).$$

Damit ist unser allgemeiner Satz vollständig bewiesen.

7. Für Dirichletsche Reihen konvergiert die Riemannsche Formel (5), wenn $\alpha < 0$ ist, nur für $\sigma > 0$. Denn die Abschätzung

$$|A(u)| \leqq C\, e^{(\alpha+\varepsilon)u},$$

aus der die absolute Konvergenz des Integrals (6)

$$f(s) = s\int_0^\infty A(u)\, e^{-su}\,du$$

für $\sigma > \alpha$ folgt, gilt nur im Falle $\alpha \geqq 0$.

Soll der Grenzwert (5) auch, wenn $\alpha < 0$ ist, in der ganzen Halbebene $\sigma > \alpha$ existieren, so muß man die Formel (5) passend abändern. Zu diesem Zwecke gehe man von der leicht zu beweisenden Beziehung

$$|f(0) - A(u)| \leqq C\, e^{(\alpha+\varepsilon)u}$$

aus, die auch für den Fall $\alpha < 0$ gilt, und folgere aus ihr, daß die Integraldarstellung

$$f(s) = f(0) + s\int_0^\infty (A(u) - f(0))\, e^{-su}\,du \tag{14}$$

mindestens für $\sigma > \alpha$ absolut konvergiert. Ist also $\sigma > \gamma$ die Halbebene absoluter Konvergenz der Integraldarstellung (14), so ist gewiß $\gamma \leqq \alpha$.

[14]) Vgl. etwa Jordan, Cours d'Analyse, 2. Aufl., Bd. II, S. 233.

Wendet man auf (14) den eben bewiesenen Satz an, so ergibt sich

$$(15)\qquad A(x)-f(0)=\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}\frac{f(s)-f(0)}{s}e^{xs}\,ds$$

für $\sigma>\gamma$; der Grenzwert (15) existiert also erst recht für $\sigma>\alpha$, wobei nunmehr über die Größe α keinerlei einschränkende Voraussetzung gemacht ist.

§ 3.

8. Zum Schluß soll ein Beispiel einer Funktion angegeben werden, für die das Integral $s\int_0^\infty A(u)e^{-su}\,du$ eine absolute Konvergenzhalbebene hat, ohne daß die zugehörige Dirichletsche Reihe für irgendeinen Wert von s konvergiert.

Dieses Beispiel erscheint theoretisch dadurch von Interesse, daß es die Existenz einer Funktion $f(s)$ beweist, für die die Riemannsche Integraldarstellung der Koeffizientensummen gilt, ohne daß die mit Hilfe dieser Koeffizienten gebildete Dirichletsche Reihe überhaupt in irgendeinem Punkte konvergiert; bisher finden sich in der Literatur nur Beispiele von Funktionen $f(s)$[15]), die sich durch für $\sigma>\alpha$ konvergente Dirichletsche Reihen darstellen lassen, während das mit Hilfe dieser Funktionen gebildete Integral (5) auch noch für $\sigma<\alpha$ konvergiert.

Es sei

$$\lambda_{2n}=\log\nu_n,\quad \lambda_{2n+1}=\log\nu_n+e^{-(\log\nu_n)^2}\qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Hierbei bedeuten die ν_n ganze, positive Zahlen, die sukzessive so bestimmt sind, daß

$$\log\nu_{n+1}=\lambda_{2n+2}>\lambda_{2n+1}=\log\nu_n+e^{-(\log\nu_n)^2}$$

wird.

Es sei ferner

$$\begin{aligned}A(u)&=0\quad\text{für}\quad 0\leqq u<\lambda_0,\quad \lambda_{2n-1}<u<\lambda_{2n},\\ A(u)&=a_{2n}=e^{(\log\nu_n)^2}\quad\text{für}\quad \lambda_{2n}<u<\lambda_{2n+1}.\end{aligned}$$

Dann ist

$$(16)\quad f(s)=s\int_0^\infty A(u)e^{-su}\,du=\sum_{n=0}^\infty s\,a_{2n}\int_{\lambda_{2n}}^{\lambda_{2n+1}}e^{-su}\,du$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\left(a_{2n}e^{-\lambda_{2n}s}-a_{2n}e^{-\lambda_{2n+1}s}\right)$$

$$(17)\qquad \sim\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-\lambda_n s},$$

wobei $a_{2n+1}=-a_{2n}$ gesetzt ist.

---

[15]) Perron, l. c.[7]) S. 126–131. Vgl. auch Landau, Handbuch, Bd. II, S. 834 bis 837.

Man erkennt leicht, daß (16) mindestens für $\sigma > 1$ absolut konvergiert; denn es ist

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leqq |s| \sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n}| (\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n}) e^{-\sigma \lambda_{2n}} \\ &\leqq |s| \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\log \nu_n)^2} e^{-(\log \nu_n)^2} e^{-\sigma \log \nu_n} \\ &= |s| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu_n^{\sigma}}. \end{aligned}$$

Diese Reihe ist aber mindestens für $\sigma > 1$ absolut konvergent.

Andererseits kann aber die Dirichletsche Reihe (17) für keinen noch so großen Wert von σ konvergieren, denn es ist

$$|a_{2n} e^{-\lambda_{2n} s}| = e^{(\log \nu_n)^2 - \sigma \log \nu_n} = e^{\log \nu_n (\log \nu_n - \sigma)},$$

also

$$\lim_{n=\infty} |a_{2n} e^{-\lambda_{2n} s}| = \infty$$

für jedes noch so große σ.

(Eingegangen am 22. Dezember 1918.)