Das Gesetz der kleinen Zahlen von Dr. L. v. Bortkewitsch. B. G. Teubner, Leipzig 1898.

Bei den Untersuchungen, betreffend die Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen an statistischen Massenerscheinungen, welche sich mit der Zeit verändern, und den Beobachtungen an Zufallsspielen hat sich die bemerkenswerte Thatsache ergeben, dass Erscheinungen von großer jährlicher Grundzahl (Versuchszahl) ein viel größeres Anschmiegen an die Eigenschaften des reinen Zufallsspieles mit unabhängigen Einzelversuchen (Ziehungen, Würfen etc.) aufweisen, wenn die jährliche Ereigniszahl — die Anzahl der günstigen Fälle — klein, als wenn sie groß ist. Bortkewitsch führt zum Belege im zweiten Capitel seiner Abhandlung vier bezügliche Beispiele an, und zwar: die Selbstmorde von Kindern unter zehn Jahren in Preußen, getrennt nach Geschlechtern, während der Jahre 1869 bis 1893, deren jährliche Ereigniszahl bei Knaben zwischen 0 und 4, bei Mädchen zwischen 0 und 5 schwankt; die weiblichen Selbstmorde in acht deutschen Staaten (Schaumburg-Lippe, Waldeck, Lübeck, Reuß ä. L., Lippe, Schwarzburg-Rudolstadt, Mecklenburg-Strelitz, Schwarzburg-Sondershausen) während der Jahre 1881 bis 1893, deren höchste Ereigniszahlen sich in diesem Zeitraume auf respective 3, 5, 4, 6, 6, 8, 10 und 10 Fälle belaufen; die tötlichen Unfälle bei elf Berufsgenossenschaften (den Berufsgenossenschaften Nr. 13, 14, 12, 20, 23, 27, 29, 40, 41, 42 und 55 gemäß den Publicationen des Reichsversicherungsamtes) während der Jahre 1875 bis 1894 mit der Maximalzahl von 14 tötlichen Unfällen (in der Berufsgenossenschaft Nr. 13) im Jahre; endlich die durch Schlag eines Pferdes im preußischen Heere Getöteten, gesondert nach Armeecorps, während der Jahre 1875 bis 1894 mit Schwankungen bis zu 3 Ereigniszahlen im Jahre.

In allen den aufgezählten Fällen wird nachgewiesen, dass die beobachtete Zahl von Jahren gleicher Ereigniszahlen mit der theoretischen Anzahl von Jahren für diese Ereigniszahlen übereinstimmt; ferner, dass der Quotient aus dem mittleren (quadratischen) Fehler der Ereigniszahlen und der Wurzel aus der mittleren Ereigniszahl von der Einheit wenig verschieden ist. Bei diesem Nachweise mussten analytische Ausdrücke zur Verwendung gelangen, welche beim Zufallsspiel mit unabhängigen Einzelversuchen, kleinen Ereigniszahlen m (kleinen Wahrscheinlichkeiten p) und großen Grundzahlen n giltig bleiben. Ein solcher ist der schon von Poisson abgeleitete Wert für die Wahrscheinlichkeit w_x von x Ereigniszahlen und für m als den wahrscheinlichsten Wert dieser Ereigniszahlen.

$$w_x = \frac{m^x e^{-m}}{1.2.3\ldots x}.$$

Bortkewitsch hat im ersten Capitel seiner Abhandlung mehrere Eigenschaften dieser Wahrscheinlichkeit, unter andern die entwickelt, dass sie für nicht zu kleine (etwa über 1000 gelegene Grundzahlen) brauchbare Resultate liefert; ferner in Anlage 3 eine Tabelle dieses Ausdruckes bei Variation von x und m reproduciert.

Um endlich zu zeigen, dass die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und aus der Theorie unabhängiger Grundzahlen abgeleiteten Resultaten eine nothwendige Folge jener kleinen Ereigniszahlen ist, vergleicht Bortkewitsch im dritten Capitel der Abhandlung die in Rede stehenden statistischen Ereignisse mit einem Zufallsspiel, in welchem in σ Serien von Versuchen mit je n Einzelversuchen die Wahrscheinlichkeit von Serie zu Serie sich ändert.

In einem so definierten Spiele ist das Verhältnis des mittleren (quadratischen) Fehlers der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\sigma$ zu dem für normale Dispersion aus dem Mittelwerte (indirect) ableitbaren mittleren (quadratischen) Fehler dieser Wahrscheinlichkeiten

$$\sqrt{1 + \frac{n-1}{p_0 q_0} \Sigma \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}}, \text{ falls } p_0 = \frac{[p]}{\sigma} \text{ und } q_0 = 1 - p_0 \text{ ist;}$$

und das Verhältnis des mittleren (quadratischen) Fehlers der Ereigniszahlen $m_1, m_2, m_3 \dots, m_\sigma$ zu dem mittleren (quadratischen) Fehler, falls dieser bei normaler Dispersion aus dem Mittelwerte berechnet worden wäre:

$$\sqrt{1 + m_0 \Sigma \frac{1}{\sigma} \left(\frac{m_i}{m_0} - 1\right)^2}, \text{ falls } m_0 = \frac{[m]}{\sigma}$$

Der letztere Ausdruck gilt auch unabhängig davon, dass die Grundzahl in jeder Versuchsserie die gleiche ist.

Die beiden eben angeschriebenen Ausdrücke bewegen sich in der That bei gleicher Änderung der Wahrscheinlichkeiten desto mehr gegen 1, je kleiner $n-1$ bezw. m_0 ist; weil ferner in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachgewiesen wird, dass zufällige Erscheinungen (mit einer Zustandsveränderung) bei einem der Einheit gleich kommenden Verhältnis jener mittleren quadratischen Fehler von normaler Dispersion sind, so ist der Satz von Bortkewitsch scheinbar erwiesen. Bortkewitsch gibt ihm den Namen des Gesetzes der kleinen Zahlen.

Die Rechnungsresultate von Bortkewitsch stehen im Einklang mit anderweitig bekannten Ergebnissen. Nicht ganz unwidersprochen kann die Deutung derselben bleiben, insbesondere die Behauptung, dass die kleinen Ereigniszahlen die Ursache für die normale Dispersion in jenen Erscheinungen seien. Ursache ist augenscheinlich ihre wechselweise Unabhängigkeit.

Aus einem vollständigen Schema zufälliger Ereignisse (Cournot, Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 75—79) ist zu folgern, dass die hypernormale und subnormale Dispersion stets durch die Abhängigkeit der Einzelversuche hervorgerufen wird. Die Beispiele von Bortkewitsch sind sämmtlich so gewählt, dass die Unabhängigkeit der Einzelereignisse von vornherein zu vermuthen steht. Einleuchtend dürfte auch sein, dass im allgemeinen bei statistischen Erscheinungen kleiner jährlicher Ereigniszahlen die Unabhängigkeit dieser häufiger beobachtet wird, als bei statistischen Erscheinungen großer Ereigniszahlen: bei ihnen wird das die Unabhängigkeit oft störende Moment der Gleichzeitigkeit nahezu eliminiert. Dass endlich Erscheinungen großer Ereigniszahlen normale Dispersion aufweisen können, ist umgekehrt bei den Untersuchungen über das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, sowie an anderen Beispielen (4. Capitel der Theorie der Statistik von Westergaard) oft genug dargelegt worden. Nach der Theorie müssen die beiden obigen Verhältniszahlen bei jedem beliebigen n respective m_0 nahe der Einheit liegen, falls jede der Abweichungen der p respective m gegen den Mittelwert genügend klein, das heißt kleiner, als etwa

$$\sqrt{\frac{p_0}{n-1}} \text{ resp. } \sqrt{m_0} \text{ ist.}$$

Rücksichtlich der Bedeutung dieses Verhältnisses für die Theorie der Stabilität statistischer Reihen wäre noch das Folgende zuerwähnen. Lexis hat das obige Verhältnis als Maßstab für die etwaige Änderung statistischer Reihen mit der Zeit vorgeschlagen. Derselbe wird zumindest für Erscheinungen kleiner Ereigniszahlen unbrauchbar, weil er bei jeder beliebigen Änderung derselben — die Unabhängigkeit in der Zeit vorausgesetzt — einen Wert nahe an 1 erhält. Seine Unbrauchbarkeit für den Fall, als einer veränderlichen statistischen Erscheinung eine kleine Grundzahl zukommt, hat Lexis selbst hervorgehoben (W. Lexis „Über die Theorie der Stabilität der statistischen Reihen“ in den Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik 1876).

Die Ergebnisse von Bortkewitsch charakterisieren zahlenmäßig eine ganze Classe von statistischen Erscheinungen, sind aber auch im allgemeinen für den gegenwärtigen Stand der Forschung in der Theorie der Statistik von Bedeutung. Sie beweisen abermals, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit großem Nutzen in der Statistik Verwendung finden kann, wenn es gelingt, bei Untersuchungen von statistischen Erscheinungen die Voraussetzungen für die Giltigkeit der Sätze in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erfüllen.

Der etwas weitgehenden Schlussbemerkung der Abhandlung: „dass jedes ausgerechnete neue Beispiel die wissenschaftliche Ueberzeugung erhärten helfe, dass allen bevölkerungs- und moralstatistischen Zahlen mathematische Wahrscheinlichkeiten oder Functionen solcher zugrunde liegen“, muss der oft citierte Ausspruch von Lexis gegenüber gestellt werden: „formell freilich kann man jeden Einzelwert einer symptomatischen Reihe als Näherungswert einer abstracten Wahrscheinlichkeitsgröße betrachten; aber, da man weiter annehmen muss, dass sich die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit selbst von Jahr zu Jahr oder von irgend einer Zeitstrecke zur andern in einer uns unbekannten Weise ändert, so ist mit solcher Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wenig gewonnen.“

In der That kann auch im vorliegenden Fall trotz der Übereinstimmung mit den Eigenschaften eines Zufallsspieles mit unabhängigen Einzelversuchen von vorausgehenden Beobachtungen auf das Eintreffen in der Zukunft auch nicht annähernd geschlossen werden. *Dr. Blaschke.*

Theoretical Mechanics. A. E. H. Love. Cambridge, university press 1897, 375 p.

Auf jeder Seite des vorliegenden Buches zeigt sich uns der Verfasser als ein ausgezeichneter Lehrer, dessen Forderungen nicht auf Vielwisserei, sondern auf gründliche Beherrschung der wichtigsten Partien der Mechanik ausgehen. Wir müssen gestehen, dass für die deutschen Verhältnisse das Buch zum Gebrauch an den Hochschulen ein zu beschränktes Gebiet behandelt.