14.

Ueber einen besondern Fall bei der Abwickelung krummer Flächen.

(Von Herrn Dr. *Minding* zu Berlin.)

Am Schlusse meiner Abhandlung im 19ten Bande dieses Journals ist bemerkt, daſs die Bedingungen der Abwickelbarkeit ihre einfachste Gestalt annehmen, wenn man unter p das Krümmungsmaaſs oder eine Function desselben, und unter q, q' Bogenlängen der Curven von unveränderlichem p versteht. Alsdann müssen, damit $E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + dq^2 = E'\,dp^2 + 2F'\,dp\,dq' + dq'^2$ sei, folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$E - F^2 = E' - F'^2 \quad \text{und} \quad \pm(F\,dp + dq) = F'\,dp + dq',$$

d. h. es muſs möglich sein, diesen Gleichungen durch eine Relation zwischen p, q, q' zu genügen. Wenn insbesondere die erste dieser Gleichungen *identisch* besteht, so muſs offenbar $E - F^2$ eine bloſse Function von p, ohne q, sein, also

$$E - F^2 = P^2.$$

In diesem Falle muſs die zweite Gleichung entweder irgend eine besondere Auflösung zulassen, oder integrabel sein. Die Integrabilität fordert, daſs $F \pm F'$ eine Function von $q \pm q'$, mithin $\frac{dF}{dq} = \frac{dF'}{dq'}$ sei. Folglich darf $\frac{dF}{dq}$ kein q enthalten; also muſs F von folgender Form sein: $F = Mq + N$, wo M und N bloſs von p abhängen. Auch sieht man leicht, daſs M nicht Null sein kann, wenn die Biegungen der Ebene ausgeschlossen werden; denn wäre $M = 0$, so erhielte man $F = N$, $E = P^2 + N^2$, folglich $ds^2 = (N^2 + P^2)\,dp^2 + 2N\,dp\,dq + dq^2 = P^2\,dp^2 + (N\,dp + dq)^2$, oder wenn $P\,dp = du$, $N\,dp + dq = dv$ gesetzt werden, $ds^2 = du^2 + dv^2$; alsdann wäre das Krümmungsmaaſs Null, gegen die Annahme. Nun sei φ eine unbestimmte Function von p, und $\frac{d\varphi}{dp} = \varphi'$, so geht der Ausdruck $ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + dq^2 = P^2\,dp^2 + \{(Mq + N)\,dp + dq\}^2$ durch Einführung von $q + \varphi$ anstatt q in folgenden über:

$$ds^2 = P^2\,dp^2 + \{(Mq + M\varphi + N + \varphi')\,dp + dq\}^2,$$

oder, wenn man Φ so bestimmt, dafs $M\Phi + N + \Phi' = 0$ wird,

$$ds^2 = P^2 dp^2 + (Mq\,dp + dq)^2.$$

Diese Form des Linear-Elementes deutet auf eine Umdrehungsfläche. Denn man setze $q.e^{\int Mdp} = v$, $e^{-\int Mdp} = u$, $Pdp = Udu$, wo U eine Function von u anzeigt, so wird

$$ds^2 = U^2 du^2 + u^2 dv^2.$$

Dasselbe Linear-Element geben folgende Gleichungen:

$$x = au\cos\frac{v}{a}, \quad y = au\sin\frac{v}{a}, \quad z = \int\sqrt{(U^2 - a^2)}\,du,$$

wo a eine beliebige Constante ist; sie stellen eine Umdrehungsfläche, sammt den schon im 18ten Bande S. 367 angegebenen Biegungen derselben dar. Hieraus ergiebt sich die Folgerung, dafs wenn zwei Flächen von veränderlichen Krümmungsmaafsen sich auf unzählige Arten auf einander abwickeln lassen, indem die Gleichungen zwischen den Argumenten entsprechender Puncte eine willkürliche Constante enthalten, — oder wenn die Gleichung (25.) der oben genannten Abhandlung identisch und die Gleichung (26.) integrabel ist —, dafs sich alsdann unter den Biegungen dieser Flächen allemal *Umdrehungsflächen* befinden. Auf diesen einfachen und unmittelbar anschaulichen Fall beschränkt sich also die Möglichkeit, bei Abwickelung einer Fläche von unveränderlichem Krümmungsmaafse auf eine andere, das erste Paar entsprechender Puncte in zwei Curven von unveränderlichen und gleichen Krümmungsmaafsen beliebig zu wählen.