Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi*).

Nota di

E. Bertini a Pisa.

In molti lavori geometrici si applica, come noto, il seguente teorema: — *Qualunque curva piana (semplice o composta) si può, con una trasformazione birazionale, trasformare in un'altra fornita di soli punti doppi:* — ma non vi è fatto alcun cenno, per quanto mi consta, di una esplicita dimostrazione del teorema stesso. Forse si ritiene facile stabilirlo o con considerazione analoga a quella accolta da Noether per la riduzione di una superficie ad un'altra dotata soltanto di curva doppia e di punti tripli**), ovvero riferendo la curva piana

*) Parmi utile riprodurre dalla *Rivista matematica* diretta da G. Peano (Vol. I, 1891, pag. 22) questa mia breve Nota, contenente una dimostrazione semplice ed esente da ogni obiezione di un teorema geometrico importante; tanto più che lo stesso argomento fu posteriormente trattato in altre pubblicazioni, nelle quali non è fatto alcun cenno di quella Nota. Citeró le *Traité d'Analyse* del sig^r. Picard, ove (a pag. 366 del t^0. II) è esposta una dimostrazione che l'autore stesso riconosce non del tutto soddisfacente: la Nota del sig^r. Simart: *Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques* (Comptes rendus, t^e. 116, 8 Mai 1893): e la Nota del sig^r. Poincaré: *Sur les transformations birationelles des courbes algébriques* (ivi, t^e. 117, 3 Juillet 1893). A proposito di quest' ultimo lavoro osserverò anche che il dubbio espresso colle parole: „Il est peu vraisemblable qu'il existe des courbes gauches dont toutes les cordes doubles soient triples", è già risoluto; cioè non esistono curve gobbe di cui ogni corda sia trisecante (cfr. Bertini, *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica.* (Atti della R. Accad. delle scienze di Torino, vol. XXVI, 1890), ultima parte della nota al n^0 3).

**) Noether, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (Sitzungsberichte der k. Ak. der Wiss. zu Berlin, 1888) § I. Cfr. anche Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen*, I, pag. 664—65.

univocamente ad una curva di un iperspazio e poi proiettando quest'ultima da uno spazio arbitrario sul piano.

Comunque, espongo qui una dimostrazione del teorema, che mi pare semplice e rigorosa, ottenuta coll'aiuto d'una trasformazione piana doppia.

La data curva piana si trasformi dapprima (con una trasformazione cremoniana del suo piano) in un'altra Γ con soli punti multipli ordinari $A, A_1, A_2, \ldots A_r$. Si consideri uno A di tali punti e una rete di cubiche per A e per altri sei punti del piano $B_1, B_2, \ldots B_6$ indipendenti fra loro e dalla curva Γ. In particolare occorre che, fissati cinque di essi $B_1, B_2, \ldots B_5$, il sesto B_6 sia scelto esternamente a certi quattro luoghi $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$. Uno Λ_1 di questi luoghi è quello del nono punto base di un fascio di cubiche, di cui gli altri otto punti base sono $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e due punti di Γ, uno C fisso (preso arbitrariamente), l'altro C_1 variabile. Un altro luogo Λ_2 è quello del nono punto base di un fascio di cubiche che passano per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e toccano Γ in un punto variabile. Un terzo luogo Λ_3 è costituito di r cubiche, ciascuna delle quali è pure descritta dal nono punto base di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5$ e tangenti in $A_i (i = 1, 2, \ldots r)$ ad una retta variabile intorno a questo punto. E infine il quarto luogo Λ_4 è composto di r curve, ciascuna generata dal nono punto di un fascio di cubiche per $A, B_1, B_2, \ldots B_5, A_i$ e per un punto variabile di Γ.

Nella trasformazione piana doppia, a cui dà origine la rete di cubiche per $A_1, B_1, B_2, \ldots B_6$ *) la curva Γ (del piano semplice) si trasforma in una curva Γ_1 (del piano doppio) univocamente, perchè B_6 è esterno a Λ_1 (onde C non può avere per punto congiunto alcun punto C_1 di Γ). Inoltre, per essere B_6 esterno a Λ_2, la trasformata Γ_1 non avrà regressi. La curva Γ_1 possederà invece un certo numero di punti doppi provenienti dai fasci della detta rete, di cui i due rimanenti punti base sono sopra Γ. Possederà altresì singolarità corrispondenti ai punti $A_1, A_2, \ldots A_r$, le quali saranno della stessa natura di queste e quindi singolarità ordinarie, perchè B_6 è esterno a Λ_3, cioè i punti A_i non giacciono sulla curva doppia del piano semplice, e perchè B_6 è esterno a Λ_4, cioè A_i non è congiunto ad alcun punto di Γ**). Ed è chiaro che Γ_1 non ha altre singolarità,

*) Cfr., ad es., De Paolis, *Le trasformazioni piane doppie* (Memorie della R. Accad. dei Lincei, serie 3ª, Vol. I°) n. 28.

**) Nell'enunciato del teorema a pag. 668 delle citate *Vorlesungen* di Clebsch-Lindemann non si ha riguardo alla possibilità di questi due casi. Per mantenere in quell'enunciato la locuzione «*in derselben Weise*», occorre escludere non soltanto i punti multipli che sono nei punti base della rete delle Φ, ma anche quelli che sono sulla jacobiana della rete (cioè sulle curve fondamentali e sulla ricordando che ad A corrisponde una retta e però alle direzioni di Γ uscenti da A, punti distinti di questa retta, e di più che nel piano semplice non esistono curve fondamentali.

Si perviene al teorema eliminando nello stesso modo successivamente le singolarità di Γ_1 corrispondenti ad $A_1, A_2, \ldots A_i$.

Pavia, 21 febbraio 1891.

---

curva doppia) e quelli che sono congiunti a punti della curva nella involuzione del piano semplice.

[Die Methode von Bertini kommt geometrisch zu reden darauf zurück, die Ebene, in welcher uns die Curve mit singulärem Punkte gegeben ist, als eindeutige Abbildung einer Fläche 3. Ordnung zu betrachten, dadurch die Curve in eine Raumcurve zu verwandeln und letztere hinterher wieder von einem hinreichend allgemeinen Punkte aus auf eine andere Ebene zu projiciren. In dieser Form ist mir der Ansatz noch von Clebsch her bekannt, der mir denselben im Herbst 1869 mündlich mittheilte. Ich erwähne dies nur, weil ich gerade in letzter Zeit in meinen Vorlesungen und Vorträgen wiederholt daran angeknüpft hatte. Die Leser der Annalen werden darum Hrn. Bertini für seine ausführliche Darstellung nicht geringeren Dank wissen.]

F. Klein.