biquadratischen von Dirichlet gegeben wurde. In der zweiten werden die Gruppen der Ordnungen p, pq, 6 und 8 nebst den zugehörigen Isomorphismengruppen als Gruppen binärer Substitutionen untersucht. Im Vorbeigehen werden nichtzykliche Gruppen als sozusagen „pseudozyklische“ Gruppen mit Verwendung der Galoisschen Imaginären als Exponenten dargestellt.

Dr. Schrutka.

F. Benneke. Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. (Festschrift des königlichen Viktoria-Gymnasiums zur 300jährigen Jubelfeier des königlichen Joachimsthalschen Gymnasiums in Berlin.) Potsdam 1907.

Auf 9 Blättern von 313 . 220 mm^2 Größe ist die konforme Abbildung der Funktion $Z = X + Yi = \log z = \log (x + y i)$ für alle Werte welche den Ungleichungen $2 \leqq X < 3$, $0 < Y < \frac{\pi}{2} \log e = 0{\cdot}682188$ genügen, dargestellt. Die x- und y-Kurven haben daher die Gleichungen $C - X = \log co \frac{Y}{\log e}$ und $C - X = \log$ sind $\frac{Y}{\log e}$; man erkennt leicht, daß die Kurven jeder Schar untereinander kongruent und gleich orientiert und die beiden Scharen zu einander symmetrisch sind. Das entsprechende Stück der z-Ebene hat die Form eines Viertelkreisringes mit den Grenzen $100 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1000$; $o \leqq \arctan \frac{y}{x} \leqq \frac{\pi}{2}$. Genügt die Zahl z diesen Bedingungen nicht so ist sie durch eine geeignet bestimmte Zahl $z_0 = z\, 10^p\, i^q$ zu ersetzen und man erhält $\log z = \log z_0 + p + 0{\cdot}682188$ i. q. Der umgekehrte Vorgang ist bei der Aufsuchung des Numerus einzuhalten. Die Parallelen zu den Achsen $X =$ const. $Y =$ const. sind durch die matten Linien eines quadratisch geteilten Papiers (wie Millimeterpapier nur mit der Seitenlänge 0·91 mm), die x- und y-Kurven durch tiefschwarze Linien dargestellt, welche im Gebiet $2 \leqq X \leqq 2{\cdot}45$ für jede ganze Zahl und für jedes Vielfache von i, im übrigen Gebiet für jeden fünften dieser Werte ausgezogen. Auf einer zehnten Tafel ist der Plan der Abbildung im Maßstab 1 : 3 zur Übersicht wiederholt. Die typographische Ausführung läßt zu wünschen übrig.

Dr. Schrutka.

Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Von Schoenflies. 2. Teil (Ber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung), X + 331 S. (Leipzig, B. G. Teubner, 1908).

Das erste Kapitel enthält neu aufgefundene Bedingungen, welche es zu entscheiden gestatten, wann zwei Mengen die gleiche Mächtigkeit haben oder welche von ihnen die größere hat; eine Reihe dieser Sätze bezieht sich speziell auf die Abschätzung der Mächtigkeit von Zahlklassen. Als Mächtigkeit aller abzählbaren, aller perfekten, aller abgeschlossenen Teilmengen eines Raums von endlicher Dimensionenzahl sowie als die aller geordneten abzählbaren Mengen wird die des Kontinuums festgestellt; das gleiche geschieht für die Mächtigkeit einiger Klassen von Funktionen und geodätischen Linien gewisser Flächen. Der Verf. sucht gewisse Paradoxien des Mengenbegriffs zu entkräften. (Die Einwände sind nach der Ansicht des Ref. nicht ganz stichhältig.)

Das zweite Kapitel berichtet über Untersuchungen solcher geordneter Mengen, die keinem ihrer resp. Abschnitte ähnlich sind; der Verf. analysiert ihre Beziehung zu Veroneses transfiniten Zahlen und zu denjenigen Klassen monoton wachsender Funktionen, deren jede die Eigenschaft hat, daß die Unendlichkeitsordnungen ihrer Funktionen verschieden und vergleichbar sind und daß sie in keiner umfassenderen Klasse derselben Art enthalten ist.

Im dritten Kapitel werden neue Beweise für die Zerlegbarkeit einer beliebigen abgeschlossenen Punktmenge in eine abzählbare und eine perfekte mitgeteilt sowie für den Satz, daß die Zentren eines Systems von Kugeln, wenn sie eine abgeschlossene Menge bilden, im Innern von Kugeln endlicher Anzahl, die dem System angehören, enthalten sind. Der Verf. zitiert eine neuerdings erfolgte Definition des Abstandes zweier Punkte mit abzählbar unendlich vielen Koordinaten, die es gestattet, die gewöhnlichen Sätze über Punktmengen auf den Fall eines Raumes von unendlich vielen Dimensionen zu übertragen. Ferner werden die Hauptresultate der neuen Inhaltsbestimmung von Punktmengen, die jeder abzählbaren Menge meßbarer Mengen und jeder komplementären Menge einer meßbaren Menge ebenfalls einen Inhalt zuordnet, entwickelt.

Das vierte Kapitel handelt von den gestaltlichen Grundbegriffen. Auf Grund des Axioms, daß jedes Dreieck ein „inneres" Gebiet eindeutig bestimme, wird derselbe Satz für einfache Polygone aufgestellt; es wird untersucht, wie Polygone, die einander durchdringen, die Ebene zerlegen und wie Polygone, deren jedes die anderen ausschließt, durch gesonderte Streckenzüge zu einem System vereinigt werden können. Die Sätze über die Teilung der Ebene bleiben aufrecht, wenn jedes Polygon abzählbar unendlich viele Strecken mit einer einzigen Häufungsstelle enthält. Nach der Definition von „Abstand" und „Flächenzahl" wird zu einer beliebigen, in einem endlichen Kreis gelegenen Menge eine approximierende Polygonalfigur konstruiert und darauf die Definition der Zusammenhangszahl eines „Gebietes" gegründet (darunter eine Punktmenge verstanden, die zu jedem ihrer Punkte auch die Punkte einer um ihn beschriebenen Kreisfläche enthält und zu je zweien ihrer Punkte auch die Punkte einer aus Strecken in endlicher Zahl bestehenden Verbindung derselben enthält): approximiert man nämlich die Menge der Begrenzungspunkte des Gebietes G durch eine polygonale Figur, so kommt dem System der Gebiete, welche von dem in G enthaltenen Teile der polygonalen Figur begrenzt werden, eine gewisse Zusammenhangszahl zu, die bei verstärkter Annäherung variiert; die obere Grenze dieser Zusammenhangszahlen wird als Zusammenhangszahl von G bezeichnet. Daraus folgt, daß einfach zusammenhängende Gebiete von innen durch einfache Polygone approximiert werden können. Die geschlossene Linie wird auf folgende Art definiert: Die Punkte der Ebene sollen in drei Klassen: A, J und T, zerfallen; 1. je zwei Punkte von A gehören einer zusammenhängenden Teilmenge von A an (d. h. einer solchen abgeschlossenen Teilmenge, die sich nicht in zwei abgeschlossene Teile zerlegen läßt); das entsprechende gilt für J; T soll 2. abgeschlossen, 3. in einem endlichen Kreis enthalten, 4. mit der Gesamtheit der gemeinsamen Grenzpunkte von J und A identisch sein; dann heißt T eine geschlossene Kurve.[1]) Man kann beweisen: 1. Um jeden Punkt von A gibt es eine aus lauter Punkten von A bestehende

[1]) Die in § 10, Satz XI, gemachte Voraussetzung, daß T zusammenhängend sei, dürfte nicht nötig sein, dagegen muß man hier und bei Satz XII und XV hinzufügen, daß T in einem endlichen Kreise liegt.

Kreisfläche (entsprechend für J), 2. T ist perfekt, 3. zusammenhängend und enhält 4. von keiner Kreisfläche alle Punkte. Wenn man die Voraussetzungen 1, 2, 3 und die Schlußfolgerung 1 als erfüllt annimmt, so folgt, daß die Menge T eine geschlossene Kurve enthält, die J und A trennt. Daraus ergibt sich weiter, daß in der Grenzmenge T eines einfach zusammenhängenden, in einem endlichen Kreis enthaltenen Gebietes sich alle Punkte einer geschlossenen Kurve befinden müssen und daß die Menge T das Gebiet vollständig bestimmt Geht man von den in den Voraussetzungen 2 und 3 und in den Folgerungen 3 und 4 enthaltenen Eigenschaften der Menge T aus, so folgt, daß die übrigen Punkte der Ebene in „Gebieten" endlicher oder abzählbar unendlicher Mannigfaltigkeit vereinigt sind. Diese Sätze werden auf den Raum übertragen. — Es folgen die Resultate neuerer Untersuchungen über die Gestalt der Punktmengen, in welchen Reihen analytischer Funktionen gleichmäßig konvergieren können, und über die Wertmengen, die solche Funkionen bei Stellen ihrer natürlichen Grenzen annehmen.

Die Hauptresultate des fünften Kapitels beziehen sich auf die Eigenschaften derjenigen Mengen, deren Punkte sich den Punkten einer gegebenen Menge umkehrbar eindeutig und stetig zuordnen lassen: Jedem Grenzpunkte der gegebenen entspricht ein Grenzpunkt der zugeordneten Menge; ist die gegebene Menge abgeschlossen, perfekt, zusammenhängend, so hat die zugeordnete die entsprechende Eigenschaft; ist die gegebene Menge eine geschlossene Kurve oder eine solche samt ihrer begrenzten Fläche, so gilt für die zugeordnete das gleiche (für den Fall, daß die gegebene Menge aus den Punkten eines Kreisumfanges besteht, werden mehrere Beweise dieser Tatsache gegeben). Der Verf. nennt solche geschlossene Kurven „einfach", deren Punkte von innen und außen „erreichbar" sind, d. h. sich mit einem beliebigen inneren oder äußeren Punkte durch einen Streckenzug verbinden lassen, der ganz im Innern, resp. Äußern verläuft und dessen Ecken, in höchstens abzählbarer Menge, sich nur bei dem Kurvenpunkte häufen können. (Im folgenden Kapitel wird bewiesen, daß die Erreichbarkeit von außen die von innen nach sich zieht und umgekehrt; ferner, daß jede abgeschlossene, in einem endlichen Kreise gelegene Punktmenge, die keinen zusammenhängenden Bestandteil enthält, mindestens einer einfachen, geschlossenen Kurve angehört.) Jede einfache geschlossene Kurve geht bei umkehrbar eindeutiger, stetiger Abbildung in eine ebensolche über und läßt sich ihrerseits durch eine solche Abbildung aus einem Kreise gewinnen. Einfach zusammenhängende Gebiete gehen in ebensolche über; wird die Grenze mit abgebildet und ist jeder ihrer Punkte von dem Gebiet aus erreichbar, so gilt dasselbe für das Bild. Bildet die gegebene Menge den Umfang eines Kreises (vgl. Kap. 6, III), so kann man eine umkehrbar eindeutige, stetige Zuordnung angeben, welche unter Aufrechterhaltung der Korrespondenz der Grenzen auch das Innere des Kreises auf das Innere der entsprechenden Kurve abbildet. Die Zusammenhangszahl eines Gebietes bleibt stets erhalten. Der Verf. dehnt diese Sätze summarisch auf den Raum aus. Die Dimension bleibt in dem Sinne erhalten, daß der vollen Umgebung eines Punktes des Raumes von m Dimensionen bei umkehrbar eindeutiger und stetiger Abbildung nicht die volle Umgebung eines Punktes in einem Raum von mehr als m Dimensionen entsprechen kann.

Dieser Satz ist bekanntlich nicht richtig, wenn die Zuordnung stetig und eindeutig ist, ohne umkehrbar eindeutig zu sein. Aber auch bei diesen

Transformationen (5. u. 6. Kap.) gilt: Einem Grenzpunkt entspricht wieder ein Grenzpunkt, einer abgeschlossenen oder zusammenhängenden Menge eine resp. gleichartige (einer perfekten im allgemeinen nicht); jeder abgeschlossene Teil der zugeordneten Menge entspricht einem passend zu bestimmenden abgeschlossenen Teile der gegebenen Menge. Ist diese speziell eine Strecke, so lassen sich ihr alle die und nur die zusammenhängenden Gebietsgrenzen stetig zuordnen, deren Punkte aus jedem Teile des Gebietes (den sie begrenzen helfen) erreichbar sind. Jedes stetige Bild einer Strecke („stetige Kurve") liegt in einem endlichen Kreis, ist perfekt und zusammenhängend; es kann eine Fläche sein, und zwar gilt der aus einer umfangreichen Untersuchung erhaltene Satz: Dafür, daß ein ebenes, in einem endlichen Kreis enthaltenes Kontinuum C stetiges und eindeutiges Bild einer Strecke sei, ist es notwendig und hinreichend, daß aus jedem Gebiet G, welches keinen Punkt von C enthält, jeder gemeinsame Grenzpunkt von G und C erreichbar sei, und daß die Anzahl jener Gebiete G, in welcher der Maximalabstand zweier Punkte über einer beliebig gegebenen Grenze liegt, endlich sei. — Es folgt eine Untersuchung über die Beschaffenheit mehrfacher Punkte der stetigen Kurven; es gibt solche, deren sämtliche Punkte von der Ordnung der Mächtigkeit des Kontinuums vielfach sind.

Das sechste Kapitel enthält noch ein Referat über neuere Untersuchungen der Länge von Kurven und des Inhaltes krummer Flächen sowie der Frage, wann die Differenz der Inhalte zweier Polygone, die eine geschlossene Kurve von innen und außen approximieren, unter jede Grenze gebracht werden kann.

Im siebenten Kapitel wird über einige Arbeiten berichtet, welche die Analogie zwischen Mengen von Punkten und Mengen von Funktionen oder Kurven in Evidenz setzen. Versteht man für eine Menge von Funktionen (z. B. einer reellen Variablen) unter einem Grenzelement eine gleichmäßig erreichte Grenzfunktion, so gilt der Satz: Dafür, daß jede unendliche Teilmenge einer Funktionenmenge ein Grenzelement habe, ist es notwendig und hinreichend, daß die Funktionen sämmtlich zwischen endlichen Grenzen liegen und gleichmäßig stetig sind (d. h.: konvergiert die Punktfolge $x_1 \ldots x_2 \ldots$ gegen den Punkt x, so konvergieren für alle Funktionen der Menge die Funktionswerte $f(x_n)$ gleichmäßig gegen $f(x)$, sobald $n = \infty$ wird). Um die Punktmengensätze auf Mengen von Bahnkurven anwenden zu können, sind Festsetzungen getroffen worden, wann zwei analytisch definierte Bahnkurven als zusammenfallend angesehen werden sollen und wie der Abstand verschiedener Bahnkurven zu verstehen ist. Man ist zu Systemen von Funktionen und Kurven gelangt, die den Charakter von Punktmengen tragen, indem man von den allgemeinsten Mannigfaltigkeiten ausging, in denen Grenzelemente definiert sind, und sukzessive der Gesamtheit, der die betrachteten Mengen angehören sollten, immer weitere Merkmale des Kontinuums der Punkte beilegte.

Das achte Kapitel enthält Korrekturen zum ersten Teile des Berichtes und Notizen über Arbeiten, die in der neuesten Zeit Anwendung der Mengenlehre auf die Funktionen reeller Veränderlicher gebracht haben. *F.*

Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht. Von Crantz. 2 Teile („Aus Natur und Geisteswelt" Nr. 120 u. 205), 126 + 127 *S.*, Leipzig, B. G. Teubner, 1906 u. 1908.