SUR UN PROBLÈME D'ABEL.

Par M. **Marcel Riesz** (Györ).

(Extrait de deux lettres à M. G. MITTAG-LEFFLER).

Adunanza del 10 luglio 1910.

I.

. . . .

Je me hâte de vous communiquer que le texte français d'un passage de votre conférence de Rome, sur lequel je me suis permis une légère remarque, peut être maintenu presqu'entièrement. Le texte qui se trouve dans votre lettre et qui correspond à l'original suédois comporte une restriction qui n'est pas nécessaire: c'est la condition de LIPSCHITZ. En effet je viens de démontrer le théorème suivant (en parlant toujours, pour fixer les idées, de la méthode de votre troisième Note):

Désignons par α et $\alpha'(<\alpha)$ deux quantités positives. Si la branche fonctionnelle $FA^{(\alpha)}(x)$ s'approche indéfiniment d'une valeur déterminée, quand x, de l'intérieur de la figure $V^{(\alpha)}$ décrite autour de la demi-droite entre l'origine et un sommet, tend vers ce sommet, l'expression $c_0+\sum_{\mu=1}^{\infty} G_\mu(x\,|\,\alpha')$ reste convergente si l'on y introduit l'affixe du sommet et elle exprime par conséquent la valeur de la branche fonctionnelle en ce point.

Le théorème que je viens d'énoncer, suppose essentiellement $\alpha'<\alpha$. Dans le cas $\alpha'=\alpha$ je peux donner des exemples qui le mettent en défaut.

Pour démontrer cet énoncé je vais d'abord établir le théorème qui suit.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe, continue dans le domaine D

$$|z|\leqq R \qquad\qquad (R>1),$$

$$\vartheta\leqq\arg(z-1)\leqq 2\pi-\vartheta \qquad\qquad \left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right),$$

et sur son contour, qui soit régulière dans le domaine D excepté au point $z=1$. Dans ces conditions, le développement taylorien de la fonction autour du point $z=0$

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

est convergent pour $z=1$. De plus, il converge uniformément sur la circonférence $|z|=1$.

Désignons par Γ une courbe fermée, renfermant le point $z=0$, composée d'un arc de cercle de centre $z=0$, de rayon r $(1<r<R)$, et des deux demi-droites

$$(1)\qquad\qquad \arg(z-1)=\pm\,\vartheta.$$

On a

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{1-z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz,$$

Γ' désignant une courbe quelconque renfermant le point $z=0$ et intérieure à la courbe Γ. En tenant compte de la continuité de $f(z)$ au point $z=1$ on conclut

$$(2)\qquad a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{1-z}\left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1\right)dz.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité,

$$f(1) = 0.$$

Pour démontrer notre théorème, il nous suffira de montrer que l'intégrale (2) tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Désignons les points d'intersection du cercle de rayon r et des demi-droites (1) par z_1 et $\bar{z}_1$. Étant donnée une quantité positive ε, aussi petite qu'elle soit, nous pouvons choisir le rayon $r > 1$, assez rapproché de 1 pourqu'on ait

$$(3)\qquad |f(z)| < \varepsilon$$

pour les points de notre domaine D satisfaisant à l'inégalité

$$|z-1| \leqq |z_1 - 1|.$$

Ayant fixé r, on peut choisir ν assez grand pour qu'on ait, pour toute valeur de $n > \nu$, sur l'arc de rayon r

$$(4)\qquad \left|\int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{f(z)}{1-z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz\right| < \varepsilon',$$

ε' étant donné d'avance.

n désignant maintenant un nombre déterminé $> \nu$, soit z_0 le point du segment $(1, z_1)$ tel que

$$|z_0 - 1| = \frac{1}{n}.$$

On a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_{z_0}^{z_1} \frac{f(z)}{1-z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz\right| < \varepsilon n \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{|z|^{n+1}}\,|dz| \\ &= \varepsilon n \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{|z|^{n+1}}\frac{|dz|}{d|z|}\,d|z| < \frac{\varepsilon n}{\cos\vartheta}\int_{z_0}^{z_1}\frac{1}{|z|^{n+1}}\,d|z| \\ &= \frac{\varepsilon n}{\cos\vartheta}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{|z_0|^n} - \frac{1}{|z_1|^n}\right) < \frac{\varepsilon}{\cos\vartheta}.\end{aligned}\right.$$

De même,

$$(6)\qquad \left|\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}_1} \frac{f(z)}{1-z}\frac{1}{z^{n+1}}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\cos\vartheta}.$$

D'ailleurs l'intégrale

$$\int_{z_0}^{\bar{z}_0} \frac{f(z)}{1-z}\,dz,$$

prise sur Γ dans le sens positif, est plus petite que $2\pi\varepsilon$, car elle est égale à l'intégrale prise sur l'arc de cercle intérieur au domaine D, de centre $z = 1$, passant par les points z_0 et $\bar{z}_0$ et sur cet arc

$$\left|\int \frac{f(z)}{1-z}\,dz\right| < \varepsilon \int \left|\frac{dz}{1-z}\right| < 2\pi\varepsilon. \tag{7}$$

Les inégalités (3), (4), (5), (6) et (7) montrent, qu'aussi petite que soit la quantité positive η, on peut choisir n assez grand pour qu'on ait

$$\left|\int_{z_0}^{\bar{z}_0} \frac{f(z)}{1-z}\left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1\right)dz\right| < \eta,$$

l'intégrale étant prise sur Γ dans le sens positif. Passons maintenant à l'intégrale rectiligne prise sur le segment $(1, z_0)$

$$\left|\int_1^{z_0} \frac{f(z)}{1-z}\left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1\right)dz\right|$$
$$= \left|\int_1^{z_0} f(z)\left(\frac{1}{z^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{z}\right)dz\right| < (n+1)\varepsilon \int_1^{z_0} |dz| < \frac{n+1}{n}\varepsilon < 2\varepsilon.$$

De même

$$\left|\int_1^{\bar{z}_0} \frac{f(z)}{1-z}\left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1\right)dz\right| < 2\varepsilon;$$

donc enfin nous avons établi que la quantité

$$|a_0 + \cdots + a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{1-z}\left(\frac{1}{z^{n+1}} - 1\right)dz\right|$$

tend vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$.

[Le même raisonnement montre que la convergence de la série

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

est uniforme sur le cercle de rayon 1].

Cela posé, le théorème que j'énonce au commencement de ma lettre sur la convergence de vos séries de polynômes se démontre facilement grâce à la forme que vous avez donnée au reste de ces séries. Cette forme montre très nettement qu'à tout théorème concernant la convergence ou la divergence des séries entières, correspond un théorème concernant la convergence ou la divergence de vos séries de polynômes.

Pour faire la démonstration, supposons que le sommet en question soit le point $x = 1$. Effectuons la transformation conforme du plan de la variable u, sur le plan de la variable x, par la fonction génératrice

$$x = f(u \mid \alpha')$$

de votre troisième Note. La figure $V^{(\alpha')}$ correspond au cercle de centre o et de rayon 1 du plan des u. Comme la fonction $FA^{(\alpha)}(x)$ est régulière à l'intérieur et sur le contour de la figure génératrice $V^{(\alpha)}$, excepté au point $x = 1$, la fonction $\Phi(u) = F[f(u \mid \alpha')]$ est régulière dans tout le cercle

$$|u| \leqq 1$$

excepté aux points $u = 1$ et $u = -1$. [Ce dernier point est singulier parce que $u = -1$ est un point singulier de la fonction $f(u \mid \alpha')$]. Cependant, la fonction $\Phi(u)$ est finie et continue dans tout le cercle et sur tout son contour, y compris les points $u = \pm 1$. De plus, la fonction $FA^{(\alpha)}(x)$ est supposée régulière aussi à l'intérieur de la figure génératrice $V^{(\alpha)}$, où $\alpha > \alpha'$, et elle est continue aussi lorsque le point x tend vers $x = 1$ en restant à l'intérieur de cette figure. La fonction $\Phi(u)$ est donc certainement régulière dans un voisinage de $u = 1$ délimité par des demi-droites formant avec l'axe réel les angles $\pm \vartheta \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$. De plus, elle est continue lorsque la variable u tend dans ce voisinage vers $u = 1$. Donc, enfin, on pourra tracer une courbe fermée Ω composée des segments de droite ci-dessus et d'une courbe ouverte touchant extérieurement le cercle de centre 0 et de rayon 1 au point $u = -1$, n'ayant que ce point commun avec le cercle et dans laquelle $\Phi(u)$ ait les propriétés suivantes:

Elle est finie et continue dans tout l'intérieur de la courbe et y est régulière, excepté aux points $u = \pm 1$. La forme du reste de votre série de polynômes sera donc

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{\Phi(u)-\Phi(1)}{1-u}\cdot\left(\frac{1}{u^{n+1}}-1\right)du.$$

Une très légère modification du raisonnement que nous avons fait pour la courbe Γ, prouve que cette intégrale tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On voit, dans quel cas très général le problème d'ABEL est résoluble par votre méthode.

Je remarque encore que la condition de continuité peut être remplacée par des conditions beaucoup plus générales, comme je l'ai indiqué dans ma Note: *Sur les séries de* DIRICHLET *et les séries entières* [1]).

Paris, 24 Mai 1910.

MARCEL RIESZ.

II.

. . . .

Je vous suis très reconnaissant de m'avoir observé qu'un passage de ma lettre (uniformité de la convergence) vous paraissait obscur. J'avais raison de dire que dans les conditions indiquées la convergence est uniforme, mais j'avais bien tort de ne pas en donner la démonstration détaillée. Mon excuse est que dans cette publication c'est l'application que j'avais principalement en vue. Comme le raisonnement (que je m'imaginais

---

[1]) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CXLIX (2e semestre 1909), pp. 909-912.

beaucoup plus simple, ne l'ayant jamais mis sur papier) me semble assez délicat, je me permets de vous le donner dans cette lettre. Dans un prochain travail je vais réunir mes deux raisonnements.

. . . .

J'ajoute qu'il n'était pas inutile de remarquer que je parlais de la méthode de votre troisième Note. Il est tout à fait essentiel que les deux arcs de la figure génératrice forment au point 1 un angle $(\alpha\pi)$ qui diminue avec α. Ce n'est pas le cas pour les méthodes basées sur l'intégrale de LAPLACE-ABEL dépendant d'un paramètre α. Et en effet je peux construire une fonction continue dans tout le domaine $|z| \leqq 1$ régulière en tout point, excepté le point $z = 1$, dont le développement taylorien n'est sommable au point $z = 1$ par aucune des méthodes de LAPLACE-ABEL, aussi petit que soit le paramètre α.

. . . .

En reprenant les notations de ma dernière lettre, on a

$$(1) \qquad f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}}{z - x}\,dz = I_n(x),$$

x désignant un point quelconque de la circonférence

$$|x| = 1,$$

différent de $x = 1$. Nous allons démontrer que cette intégrale tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il suffit évidemment d'effectuer la démonstration pour les points situés sur la demi-circonférence supérieure.

Nous désignons les droites

$$\arg(z - 1) = \pm \pi$$

par d et $\bar{d}$. Nous supposons de nouveau

$$(2) \qquad f(1) = 0.$$

Nous fixons de nouveau le point z_1 sur la droite d, de manière que l'on ait

$$(3) \qquad |f(z)| \leqq \varepsilon$$

pour les points de notre domaine satisfaisant à l'inégalité

$$(4) \qquad |z - 1| \leqq |z_1 - 1|.$$

Après avoir fixé le point z_1 et par conséquent le rayon r, nous déterminons le nombre n de façon à satisfaire aux trois conditions suivantes:

$$A) \qquad \frac{1}{n} < r - 1.$$

$$B) \qquad \left|\frac{f(z)}{z - x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}\right| < \varepsilon',$$

z désignant un point quelconque de l'arc de rayon r, et x un point quelconque de la circonférence de rayon 1.

C) Désignons en outre par x_n le point de la circonférence $|x| = 1$ qui est à la distance $\frac{1}{n}$ de la demi-droite *d* et imposons enfin à *n* la condition suivante:

$$|x_n - 1| + \frac{1}{n} \leqq |z_1 - 1|.$$

Dans cette condition tout cercle décrit avec le rayon $\frac{1}{n}$ autour d'un point quelconque de l'arc $(x_n, 1)$ est intérieur au cercle qui est décrit autour de $x = 1$ et qui passe par z_1. Donc on a, en vertu de (3),

$$|f(z)| \leqq \varepsilon \tag{5}$$

dans tous ces divers cercles. (Évidemment, nous ne considérons que la partie de ces cercles qui est intérieure au domaine Γ).

Les conditions *A*), *B*) et *C*) étant remplies pour un certain nombre ν, le sont pour tout nombre

$$n \geqq \nu.$$

n étant choisi de cette manière, envisageons l'intégrale $I_n(x)$, x désignant un point quelconque ($\neq 1$) de la demi-circonférence supérieure. Pour les points x situés sur l'arc $(-1, x_n)$ on a

$$|I_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{z}_1}^{1} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{1}^{z_1} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz\right|$$
$$\leqq r\varepsilon' + \frac{\varepsilon n}{2\pi}\left(\int_{\bar{z}_1}^{1} \frac{1}{|z|^{n+1}}|dz| + \int_{1}^{z_1} \frac{1}{|z|^{n+1}}|dz|\right).$$

Or, d'après le raisonnement de ma lettre la somme de ces intégrales est $< \frac{2}{n \cos \vartheta}$. Donc on a, pour tous ces points x,

$$|I_n(x)| < \frac{2\varepsilon}{\cos \vartheta} + r\varepsilon' < \eta_n, \tag{6}$$

η_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Passons maintenant aux points x situés sur l'arc $(x_n, 1)$ (excepté les extrémités de cet arc). Traçons autour d'un point quelconque de cet arc un cercle de rayon $\frac{1}{n}$ qui va couper le contour Γ en deux points ξ_n et ξ'_n. Ces points seront situés [2]) sur le segment $(1, z_1)$, ou bien le point ξ_n sera situé sur ce segment, tandis que ξ'_n sera situé sur le segment $(1, \bar{z}_1)$. (Dans le premier cas c'est le point supérieur que nous désignons par ξ_n). On a, en tout cas,

$$|I_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_n}^{\xi'_n} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz\right|$$
$$\leqq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_n}^{\xi'_n} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n} \frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} dz\right|,$$

[2]) En vertu de *A*) aucun des cercles ne coupe l'arc de rayon *r*.

ce dernier chemin d'intégration se composant d'un ou de deux segments de droites, et le premier, de l'arc de cercle de rayon r et des segments de droites. La première intégrale est, d'après le raisonnement que nous venons de faire,

$$< r\varepsilon' + \frac{2\varepsilon}{\cos\vartheta};$$

donc il ne nous reste qu'à évaluer la seconde intégrale. On a de nouveau

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_n}^{\xi'_n} f(z)\frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}-1}{z-x}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_n}^{\xi'_n}\frac{f(z)}{z-x}dz\right|$$
$$\leqq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n}\frac{f(z)}{z}\left[\left(\frac{x}{z}\right)^n + \cdots + \left(\frac{x}{z}\right) + 1\right]dz\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n}\frac{f(z)}{z-x}dz\right|.$$

La longueur du chemin d'intégration de ξ_n à ξ'_n est

$$< \frac{4}{n}.$$

Par conséquent, la première intégrale est

$$< \frac{2\varepsilon}{\pi}\,\frac{n+1}{n} < 2\varepsilon.$$

D'ailleurs, on a

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n}\frac{f(z)}{z-x}dz\right| = \left|f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}dz\right| \leqq |f(x)| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}dz\right|,$$

en désignant par C l'arc de cercle de rayon $\frac{1}{n}$ décrit autour du point x, joignant les points ξ_n et ξ'_n et situé à l'intérieur du domaine Γ. Or on a, d'après (3),

$$|f(x)| < \varepsilon$$

et d'après (5)

$$|f(z)| < \varepsilon$$

le long de l'arc C. Il en résulte

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-x}dz\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_C\frac{|dz|}{|z-x|} < \varepsilon,$$

donc enfin

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi'_n}^{\xi_n}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}dz\right| < 3\varepsilon.$$

Paris, 12 Juin 1910.

MARCEL RIESZ.