

# ALLGEMEINE LÖSUNG DES PROBLEMS KLEINER, STATIONÄRER BEWEGUNGEN IN REIBENDEN FLÜSSIGKEITEN.

Von **Arthur Korn** (München).

Adunanza del 22 dicembre 1907.

Es sei  $\omega$  eine geschlossene Oberfläche stetiger Krümmung <sup>1)</sup>; wir suchen  $\mathfrak{z}$  in dem Innengebiet  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen  $u, v, w$  der Stelle  $(x, y, z)$  und eine in  $\tau$  harmonische Funktion  $\varphi(x, y, z)$ , welche im Innenraume den Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \Delta v = f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \Delta w = f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ 2) \theta = 0, \end{array} \right\} \text{ in } \tau,$$

und an der Oberfläche den Grenzbedingungen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ w = 0 \end{array} \right\} \text{ an } \omega$$

genügen.

Dabei sind  $f_1, f_2, f_3$  3 gegebene Funktionen der Stelle in  $\tau$ , welche in  $\tau$  (abtei-

<sup>1)</sup> d. h. wir setzen voraus, dass die Richtungskosinusse der inneren Normalen

$$\cos(vx), \quad \cos(vy), \quad \cos(vz)$$

auf  $\omega$  eindeutig und stetig sind und endliche (im allgemeinen eindeutige und stetige) erste Ableitungen haben.

<sup>2)</sup> Wir gebrauchen stets die Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ u &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

lungsweise) eindeutig und stetig sind und den Bedingungen genügen:

$$(3) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0,$$

$$(4) \quad \Delta \int_{\tau} f_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi f_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

Wir werden dieses Problem ganz allgemein lösen; die Lösung lässt sich auch auf den allgemeineren Fall ausdehnen, dass die Grenzbedingungen (2) durch die folgenden ersetzt werden:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \\ w = \bar{w} \end{array} \right\} \text{ an } \omega,$$

wo  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  gegebene Funktionen der Stelle an der Oberfläche  $\omega$  sind, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und zwar soll die Stetigkeit der ersten Ableitungen  $D_1 \bar{u}$ ,  $D_1 \bar{v}$ ,  $D_1 \bar{w}$  derart sein, dass für irgend 2 Punkte 1 und 2 der Oberfläche  $\omega$  in dem Abstände  $r_{12}$ :

$$(6) \quad \text{abs. } |D_1 \bar{u}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{v}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{w}|_1^2 \leq C r_{12}^\Lambda,$$

wo  $C$  eine endliche Konstante und  $\Lambda$  einen echten Bruch vorstellt.

Die Lösung des gestellten Problems schliesst die Lösung des folgenden hydrodynamischen Problems in sich:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} (-X) \\ \Delta v = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y} (-Y) \\ \Delta w = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial z} (-Z) \\ \theta = 0, \\ u, v, w \text{ gegeben an } \omega, \end{array} \right\} \text{ in } \tau, \quad \begin{array}{l} u, v, w \text{ Geschwindigkeitskomponenten,} \\ p \text{ hydrodynamischer Druck,} \\ k \text{ Reibungskonstante,} \\ X, Y, Z \text{ eventuell hinzukommende Kräfte,} \end{array}$$

und wir wollen daher auch das obige Problem als das Problem der kleinen, stationären Bewegungen einer reibenden Flüssigkeit bezeichnen.

Die Methode, welche ich zur Lösung des Problems einschlage, ist durchaus der Methode analog, mit Hilfe deren ich vor Kurzem die Lösung des biharmonischen Problems gegeben habe <sup>3)</sup>; die gelegentlich der Lösung dieses Problems eingeführten, von mir sogenannten biharmonischen Funktionentripel  $U_j$ ,  $V_j$ ,  $W_j$  mit den Eigenschaften:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U_j = 0 \\ \Delta V_j = 0 \\ \Delta W_j = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \tau;$$

<sup>3)</sup> A. KORN, *Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume* [Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Jahrgang 1907, S. 837-896].

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} U_j = \frac{k_j}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{B}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{B}_j \frac{d\tau}{r} \right] = \frac{k_j}{k_j - 1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \Theta_j \frac{d\tau}{r} \\ V_j = \frac{k_j}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{U}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{B}_j \frac{d\tau}{r} \right] = \frac{k_j}{k_j - 1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \Theta_j \frac{d\tau}{r} \\ W_j = \frac{k_j}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{B}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{U}_j \frac{d\tau}{r} \right] = \frac{k_j}{k_j - 1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \Theta_j \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega;$$

werden auch in der Theorie der kleinen, stationären Bewegungen einer reibenden Flüssigkeit eine wichtige Rolle spielen.

### § 1.

Wir suchen mit Hilfe der Methode der successiven Approximationen das folgende Problem zu lösen: Es sei  $\lambda$  ein reeller Parameter, wir suchen  $3$  mit ihren ersten Ableitungen in  $\tau$  eindeutige und stetige Funktionen  $u, v, w$ , welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f_1 \\ \Delta v = f_2 \\ \Delta w = f_3 \end{array} \right\} \text{ in } \tau;$$

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} u = +\lambda \left( u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right) \\ v = +\lambda \left( v + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right) \\ w = +\lambda \left( w + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right) \end{array} \right\} \text{ an } \omega.$$

Wir versuchen die Lösung in folgender Weise: Wir bilden successive die Funktionen  $u_j, v_j, w_j$  mit Hilfe der folgenden Bedingungen:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0 = f_1 \\ \Delta v_0 = f_2 \\ \Delta w_0 = f_3 \\ u_0 = v_0 = w_0 = 0, \end{array} \right\} \text{ in } \tau; \quad \text{an } \omega;$$

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_j = \Delta v_j = \Delta w_j = 0, \text{ in } \tau, \\ u_j = u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ v_j = v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ w_j = w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega \quad (j = 1, 2, \dots)$$

dann werden offenbar die Reihen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sum_j^{\infty} \lambda^j u_j, \\ v = \sum_j^{\infty} \lambda^j v_j, \\ w = \sum_j^{\infty} \lambda^j w_j \end{array} \right.$$

die Lösungen des Problems darstellen, wenn die Reihen mit ihren ersten Ableitungen in  $\tau$  konvergent sind und eindeutige und stetige Funktionen der Stelle in  $\tau$  darstellen.

Es ist von vornherein zu erwarten, dass man die Konvergenz der in Frage stehenden Reihen nur beweisen kann, wenn der absolute Wert von  $\lambda$  unter einer bestimmten, endlichen Grenze liegt.

Können wir die Konvergenz für

$$|\lambda| \leq 1$$

beweisen, so können wir auch sofort die Lösung unseres ursprünglichen Problems (1) (2) angeben, denn es wird für  $\lambda = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} u + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} = 0 \\ v + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} = 0 \\ w + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} = 0 \end{array} \right\} \text{ an } \omega;$$

somit, wenn wir

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = u + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ V = v + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ W = w + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ \varphi = -\theta \end{array} \right.$$

setzen:

$$(15') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \Delta V = f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \Delta W = f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \Theta = 0 \\ U = 0 \\ V = 0 \\ W = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \tau \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta = 0 \\ U = 0 \\ V = 0 \\ W = 0 \end{array} \right\} \text{ an } \omega.$$

Wir werden nun in dieser Abhandlung nicht bloß die Konvergenz der in Frage kommenden Reihen für

$$|\lambda| \leq 1$$

beweisen, sondern auch das Problem (10) (11) für beliebige, reelle  $\lambda$  lösen, abgesehen von den Werten

$$\lambda_j = \frac{k_j}{2 - k_j},$$

denen biharmonische Tripelfunktionen  $U_j, V_j, W_j$  von den Eigenschaften (8), (9) entsprechen; wir werden hierauf auch das allgemeinere Problem (1), (5) lösen und die Anwendungen der Entwicklungen nach biharmonischen Tripeln auf die vorliegenden hydrodynamischen Probleme besprechen.

## § 2.

Da sich aus den Gleichungen (12), (13), welche die Funktionen  $u_j, v_j, w_j$  successive definieren, successive ergibt, dass:

$$(16) \quad \begin{cases} u_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r}, \\ v_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r}, \\ w_j = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_j \frac{d\tau}{r}, \end{cases}$$

so können wir diese Definitionsgleichungen auch so schreiben:

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta u_0 = f_1 \\ \Delta v_0 = f_2 \\ \Delta w_0 = f_3 \\ u_0 = v_0 = w_0 = 0, \text{ an } \omega; \end{cases} \text{ in } \tau,$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_j = \Delta v_j = \Delta w_j = 0, \text{ in } \tau, \\ u_j = -u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r} \\ v_j = -v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{w}_j \frac{d\tau}{r} \\ w_j = -w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{v}_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_j \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega \quad (j = 1, 2, \dots);$$

damit werden wir aber auch mit einem Schlage mit den Eigenschaften dieser successiven Funktionentripel bekannt; es sind dieselben, welche wir bereits bei Gelegenheit des biharmonischen Problems kennen gelernt haben.

Wir können daher sofort das folgende Resultat aus der Theorie des biharmonischen Problems übernehmen:

Setzen wir:

$$(19) \quad \begin{cases} u'_j = \alpha_0 u_j + \alpha_1 u_{j+1} + \dots + \alpha_p u_{j+p}, \\ v'_j = \alpha_0 v_j + \alpha_1 v_{j+1} + \dots + \alpha_p v_{j+p}, \\ w'_j = \alpha_0 w_j + \alpha_1 w_{j+1} + \dots + \alpha_p w_{j+p}, \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} u' = \sum_0^\infty \lambda^j u'_j, \\ v' = \sum_0^\infty \lambda^j v'_j, \\ w' = \sum_0^\infty \lambda^j w'_j, \end{cases}$$

so können wir bei beliebig, aber von vornherein festgegebenem  $\lambda$  bei genügend grossem  $p$  stets die Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$$

so wählen, dass sie der Bedingung:

$$(21) \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_p^2 = 1$$

genügen, dass die Reihen:

$$(22) \quad \begin{cases} \theta' = \theta'_0 + \lambda \theta'_1 + \lambda^2 \theta'_2 + \dots, \\ u' = u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \dots, \\ v' = v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \dots, \\ w' = w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \dots \end{cases}$$

von der Art:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\lambda^j \theta'_j| \\ |\lambda^j u'_j| \\ |\lambda^j v'_j| \\ |\lambda^j w'_j| \end{array} \right\} \leq \text{endl. Konst. } L^j \quad (L \text{ echter Bruch}),$$

konvergieren und von der Art:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } |\theta'_1|^2 \\ \text{abs. } |u'_1|^2 \\ \text{abs. } |v'_1|^2 \\ \text{abs. } |w'_1|^2 \end{array} \right\} \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^A$$

in  $\tau$  stetig sind, so dass die durch die Gleichungen (20) definierten Funktionen  $u', v', w'$  die mit ihren ersten Ableitungen eindeutigen und stetigen Lösungen des Problems:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u' = \alpha_0 f_1 \\ \Delta v' = \alpha_0 f_2 \\ \Delta w' = \alpha_0 f_3 \end{array} \right\} \text{ in } \tau;$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \lambda u' + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau^\omega \theta' \frac{d\tau}{r} \\ v' = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \lambda v' + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau^\omega \theta' \frac{d\tau}{r} \\ w' = \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p + \lambda w' + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau^\omega \theta' \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega$$

darstellen.

Nach Lösung des Problems (25), (26) ergeben sich in bekannter Weise die Lösungen des ursprünglichen Problems (10), (11):

$$(27) \quad \begin{cases} u = \frac{P}{D}, \\ v = \frac{Q}{D}, \\ w = \frac{R}{D}, \end{cases}$$

wo:

$$(28) \quad D = (-\lambda)^p \alpha_0 + (-\lambda)^{p-1} \alpha_1 + \dots + (-\lambda) \alpha_{p-1} + \alpha_p,$$

und:

$$(29) \quad P = \begin{vmatrix} u' & \alpha & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ u_0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

analog  $Q, R$ , bei denen nur in der ersten Vertikalreihe  $u$  durch  $v$  bzw.  $w$  zu ersetzen ist. Die Lösung des ursprünglichen Problems ist somit nur in Frage gestellt, wenn  $\lambda$  zufällig eine Wurzel der Gleichung:

$$(30) \quad D = 0$$

ist. In diesen singulären Fällen werden die  $P, Q, R$  entweder identisch null, oder sie werden mit von null verschiedenen Konstanten multiplizierte biharmonische Funktionentripel, die wir durch die Gleichungen:

$$(31) \quad \begin{cases} \Delta U_k = 0 \\ \Delta V_k = 0 \\ \Delta W_k = 0 \end{cases} \quad \text{in } \tau$$

$$(32) \quad \begin{cases} U_k = \lambda_k \left( U_k + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \Theta_k \frac{d\tau}{r} \right) \\ V_k = \lambda_k \left( V_k + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \Theta_k \frac{d\tau}{r} \right) \\ W_k = \lambda_k \left( W_k + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \Theta_k \frac{d\tau}{r} \right) \end{cases} \quad \text{an } \omega,$$

$$(32') \quad U_k \cos(rx) + V_k \cos(ry) + W_k \cos(rz) = 0$$

und durch die supplementäre Gleichung:

$$(33) \quad \int_{\tau} (\Theta_k^2 + U_k^2 + V_k^2 + W_k^2) d\tau = 1$$

definieren.

Es ergibt sich, wie bei den verwandten Untersuchungen über die POINCARÉ'schen harmonischen Funktionen, dass die Wurzeln  $\lambda$  der Gleichung:

$$D = 0,$$

denen identisch verschwindende  $P, Q, R$  entsprechen, nicht Pole der Lösungen

$$u, v, w$$

sein können, dass ferner die Wurzeln  $\lambda$ , denen biharmonische Funktionentripel entsprechen, nicht Doppelwurzeln der Gleichung

$$D = 0$$

sein können, und wir erhalten somit das folgende Resultat:

Man kann für ein unterhalb einer beliebigen, endlichen Grenze liegendes  $|\lambda|$  stets eine Lösung unseres Problems (10), (11) in der Form angeben:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{U(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \\ v = \frac{V(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \\ w = \frac{W(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}, \end{array} \right.$$

wo wieder  $n$  eine endliche Zahl vorstellt,

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

bestimmte, von einander verschiedene, positive oder negative, absolut genommen unterhalb der genannten endlichen Grenze liegende Zahlen sind,  $U, V, W$  für jeden Wert von  $\lambda$ , der absolut genommen unter der genannten Grenze liegt, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen des Gebietes vorstellen und, abgesehen von konstanten Faktoren, für

$$\lambda = \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

in biharmonische Funktionentripel des Gebietes  $\tau$  mit der zugehörigen Zahl  $\lambda_k$  bzw.

$$(35) \quad k_k = \frac{2\lambda_k}{1 + \lambda_k}$$

übergehen.

Dieses Resultat beantwortet zunächst die auf die Existenz der Lösungen des Problems (10), (11) bezüglichen Fragen; was die Eindeutigkeit anbetrifft, so ist folgendes zu bemerken: Wären 2 Lösungen

$$u, v, w; \quad u', v', w'$$

des Problems vorhanden, so würde sich ergeben:

$$\begin{aligned} \Delta(u - u') &= \Delta(v - v') = \Delta(w - w') = 0, \quad \text{in } \tau \\ \left. \begin{aligned} u - u' &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} (\theta - \theta') \frac{d\tau}{r} \\ v - v' &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} (\theta - \theta') \frac{d\tau}{r} \\ w - w' &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} (\theta - \theta') \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \quad \text{an } \omega; \end{aligned}$$



d. h. 2 Lösungen des Problems (10), (11) können sich stets nur um biharmonische Tripel von einander unterscheiden, und für Werte von  $\lambda$ , denen keine biharmonischen Tripel entsprechen, ist das Problem eindeutig.

### § 3.

Wir gehen nun zu der Lösung des in der Einleitung gestellten hydrodynamischen Problems:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \Delta V &= f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \Delta W &= f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau,$$

$$U = V = W = 0, \quad \text{an } \omega, \quad \text{über.}$$

Wir haben, nach der Untersuchung des § 1, nur in dem Probleme (10), (11)

$$\lambda = -1$$

zu setzen; dann stellen

$$\begin{aligned} U &= u + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ V &= v + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ W &= w + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r}, \\ \varphi &= -\theta \end{aligned}$$

die Lösungen des gestellten hydrodynamischen Problems dar, und da:

$$u + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \dots$$

so können wir das folgende Resultat aussprechen:

I. — Es seien  $f_1, f_2, f_3, \vartheta$  in  $\tau$  (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle  $(x, y, z)$ , welche den Bedingungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0, \quad \text{in } \tau$$

$$\Delta \int_{\tau} f_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi f_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

genügen, dann kann man stets eine in  $\tau$  harmonische Funktion  $\varphi$  und  $\vartheta$  in  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen  $U, V, W$  finden, welche

in  $\tau$  den Differentialgleichungen:

$$\Delta u = f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\Delta v = f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\Delta w = f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\theta = 0$$

und an der Oberfläche  $\omega$  den Grenzbedingungen

$$u = v = w = 0$$

genügen. Wir bilden zu diesem Zwecke successive die Funktionen  $u_j, v_j, w_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) mit Hilfe der Formeln (12), (13) und setzen:

$$(36) \quad \begin{cases} u = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots \\ v = v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \dots \\ w = w_0 - w_1 + w_2 - w_3 + \dots \end{cases}$$

Dann sind:

$$(37) \quad \begin{cases} U = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \\ V = \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r}, \\ W = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} \end{cases} \quad \varphi = -\theta,$$

die gesuchten Lösungen.

In der That konvergieren die Reihen  $u, v, w$  mit ihren ersten Ableitungen in  $\tau$  absolut und gleichmässig, da die absoluten Werte der  $\lambda_k$ , denen biharmonische Funktionentripel entsprechen, stets grösser als eins sind, in strengem Sinne [Vgl. l. c. <sup>3)</sup>, S. 867].

ZUSATZ I zu I. — Die ersten Ableitungen von  $U, V, W$  sind in  $\tau$  von der Art:

$$(38) \quad \text{abs. } \left| \frac{\partial U}{\partial h} \right|_1^2, \quad \text{abs. } \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right|_1^2, \quad \text{abs. } \left| \frac{\partial W}{\partial h} \right|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\Lambda}, \quad (0 < \Lambda < 1)$$

stetig <sup>4)</sup>).

Es folgt dies unmittelbar mit Rücksicht auf die Formeln (24) und den Satz II, meiner Abhandlung: *Sur les équations de l'élasticité* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XXIV (1907), S. 9-75].

<sup>4)</sup> Falls

$$\text{abs. } |f_j|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^{\Lambda} \quad (\Lambda > 0)$$

vorausgesetzt wird, kann man auch — bei etwas engeren Annahmen über die Stetigkeit der Krümmung von  $\omega$  — die Stetigkeit der zweiten Ableitungen von  $U, V, W$  beweisen.

ZUSATZ 2 zu I. — Das in I gelöste Problem lässt ausser den angegebenen Lösungen keine weiteren mehr zu.

In der That, nehmen wir an, es seien

$$\begin{array}{cccc} U_1, & V_1, & W_1, & \varphi_1 \\ U_2, & V_2, & W_2, & \varphi_2 \end{array}$$

2 Lösungssysteme, dann folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta(U_2 - U_1) = \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial x} \\ \Delta(V_2 - V_1) = \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial y} \\ \Delta(W_2 - W_1) = \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial z} \\ \Theta_2 - \Theta_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ in } \tau,$$

$$U_2 - U_1 = V_2 - V_1 = W_2 - W_1 = 0, \text{ an } \omega;$$

multiplizieren wir die 3 ersten Gleichungen bzw. mit

$$U_2 - U_1, \quad V_2 - V_1, \quad W_2 - W_1$$

und integrieren über  $\tau$ , so ergibt sich:

$$\int_{\tau} [(U_2 - U_1)\Delta(U_2 - U_1) + (V_2 - V_1)\Delta(V_2 - V_1) + (W_2 - W_1)\Delta(W_2 - W_1)] d\tau = 0,$$

und hieraus leicht die Behauptung.

#### § 4.

Wir wollen jetzt auch das allgemeinere Problem lösen, eine in  $\tau$  harmonische Funktion  $\varphi$  und  $\vartheta$  in  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen  $U, V, W$  zu finden, welche den Bedingungen genügen:

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U = f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \Delta V = f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \Delta W = f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \Theta = 0; \end{array} \right\} \text{ in } \tau;$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \bar{U} \\ V = \bar{V} \\ W = \bar{W} \end{array} \right\} \text{ an } \omega,$$

wo  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$   $\vartheta$  an  $\omega$  gegebene, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen vorstellen, und zwar soll die Stetigkeit der ersten Ableitungen von  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  derart

sein, dass für irgend 2 Punkte 1 und 2 der Oberfläche in der Entfernung  $r_{12}$ :

$$(41) \quad \text{abs. } |D_1 \bar{U}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{V}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{W}|_1^2 \leq C \cdot r_{12}^\Lambda,$$

wo  $C$  eine endliche Konstante und  $\Lambda$  einen echten Bruch vorstellt.

Die Lösung dieses erweiterten Problems gelingt ganz ähnlich, wie die des erweiterten biharmonischen Problems [l. c. <sup>3)</sup>, S. 889].

Wir können leicht eine Potentialfunktion  $\chi$  finden, so dass an  $\omega$ :

$$(42) \quad \begin{cases} \bar{U} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \chi' \cos(vx), \\ \bar{V} = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \chi' \cos(vy), \\ \bar{W} = \frac{\partial \chi}{\partial z} + \chi' \cos(vz) \end{cases}$$

und  $\chi'$  eine mit ihren ersten Ableitungen an  $\omega$  eindeutige und stetige Funktion vorstellt, und zwar werden die ersten Ableitungen von der Art:

$$(43) \quad \text{abs. } |D_1 \chi'|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^\Lambda$$

stetig sein.

Wir lösen nun zunächst die Aufgabe:

$$(44) \quad \begin{cases} \Delta u = f_1 \\ \Delta v = f_2 \\ \Delta w = f_3 \\ \theta = 0 \end{cases} \text{ in } \tau;$$

$$(45) \quad \begin{cases} u = 2\chi' \cos(vx) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} - \left[ u + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right] \\ v = 2\chi' \cos(vy) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} - \left[ v + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right] \\ w = 2\chi' \cos(vz) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} - \left[ w + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right] \end{cases} \text{ an } \omega;$$

durch die Reihen:

$$(46) \quad \begin{cases} u = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots, \\ v = v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \dots, \\ w = w_0 - w_1 + w_2 - w_3 + \dots, \end{cases}$$

in denen wir successive die Funktionen  $u_j, v_j, w_j$  durch die Bedingungen definieren:

$$(47) \quad \begin{cases} \Delta u_0 = f_1 \\ \Delta v_0 = f_2 \\ \Delta w_0 = f_3 \end{cases} \text{ in } \tau, \quad \begin{cases} u_0 = 2\chi' \cos(vx) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} \\ v_0 = 2\chi' \cos(vy) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} \\ w_0 = 2\chi' \cos(vz) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} \end{cases} \text{ an } \omega;$$

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_j = \Delta v_j = \Delta w_j = 0, \quad \text{in } \tau, \\ u_j = u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ v_j = v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ w_j = w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega \quad (j = 1, 2, \dots);$$

dann ist die Lösung des Problems (39), (40):

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = u + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \chi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right], \\ V = v + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \chi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right], \\ W = w + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \chi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \theta \frac{d\tau}{r} \right], \\ \varphi = -\theta. \end{array} \right.$$

Für den Konvergenzbeweis der Reihen (46) und ihrer ersten Ableitungen ist in der That nicht erforderlich, dass  $u_0, v_0, w_0$  an  $\omega$  die Randwerte null, haben, sondern nur, dass  $u_0, v_0, w_0$  in dem Raume  $\tau$  durch die Formeln:

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v_0 \frac{d\tau}{r}, \\ v_0 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w_0 \frac{d\tau}{r}, \\ w_0 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v_0 \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u_0 \frac{d\tau}{r}, \end{aligned}$$

dargestellt werden können [Vgl. l. c. <sup>3)</sup>, S. 879]. Das gilt aber für die durch die Gleichungen (47) definierten Funktionen  $u_0, v_0, w_0$ .

Aus den Formeln (45), (49) können wir noch die Kombinationen:

$$\begin{aligned} 2\chi' \cos(vx) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r}, \dots \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} \right), \dots \end{aligned}$$

herausschaffen und durch Grössen ersetzen, in denn nur die direkt gegebenen Randwerte  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  vorkommen; es ist in der That:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \underbrace{[\bar{U} \cos(vx) + \bar{V} \cos(vy) + \bar{W} \cos(vz)]}_{\bar{U}_v} - \chi' \frac{d\omega}{r} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega, \dots \end{aligned}$$

somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} \right) &= - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}' \frac{d\omega}{r} \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega &- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega, \dots \\ \chi' \cos(vx) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \chi' \frac{d\omega}{r} &= \bar{U} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}' \frac{d\omega}{r} \\ - \left[ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega &- \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \right], \dots \end{aligned}$$

Wir können daher das folgende Resultat aussprechen:

II. — Es seien  $f_1, f_2, f_3$  in  $\tau$  (abteilungsweise) eindeutige und stetige Funktionen der Stelle  $(x, y, z)$ , welche den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} &= 0, \\ \Delta \int_{\tau} f_j \frac{d\tau}{r} &= -4\pi f_j \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

genügen und  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  3 mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle an  $\omega$ ; die Stetigkeit der ersten Ableitungen von  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  an  $\omega$  sei von der Art, dass für irgend zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche  $\omega$  in dem Abstand  $r_{12}$ :

$$\text{abs. } |D_1 \bar{U}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{V}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{W}|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^A, \quad (0 < A < 1),$$

dann kann man stets eine in  $\tau$  harmonische Funktion  $\varphi$  und 3 in  $\tau$  mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen  $U, V, W$  finden, welche in  $\tau$  den Differentialgleichungen:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta U &= f_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \Delta V &= f_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \Delta W &= f_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \right.$$

und an der Oberfläche den Grenzbedingungen:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \bar{U}, \\ V &= \bar{V}, \\ W &= \bar{W} \end{aligned} \right.$$

genügen. Wir bilden zu diesem Zwecke successive die Funktionen  $u_j, v_j, w_j$  mit Hilfe der Definitionsgleichungen:

$$(52) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_0 = f_1 \\ \Delta v_0 = f_2 \\ \Delta w_0 = f_3 \end{array} \right\} \text{ in } \tau, \\ \left. \begin{array}{l} u_0 = 2\bar{U} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \right], \\ v_0 = 2\bar{V} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \right], \\ w_0 = 2\bar{W} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \right], \end{array} \right\} \text{ an } \omega;$$

$$(53) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_j = \Delta v_j = \Delta w_j = 0, \text{ in } \tau, \\ u_j = u_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ v_j = v_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \\ w_j = w_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \theta_{j-1} \frac{d\tau}{r} \end{array} \right\} \text{ an } \omega \quad (j=1, 2, \dots)$$

und mit diesen Funktionen die Reihen:

$$(54) \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots, \\ v = v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \dots, \\ w = w_0 - w_1 + w_2 - w_3 + \dots; \end{array} \right.$$

dann sind die Lösungen des vorgelegten Problems die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}
 (55) \quad \left\{ \begin{aligned}
 U &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r}, \\
 V &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} w \frac{d\tau}{r}, \\
 W &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} v \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} u \frac{d\tau}{r}, \\
 \varphi &= -\theta.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Wir können wieder, genau wie zu dem Satze I., die beiden Zusätze hinzufügen:

ZUSATZ 1 zu II. — Die ersten Ableitungen von  $U, V, W$  sind in  $\tau$  von der Art:

$$(56) \quad \text{abs. } |D_1 U|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 V|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 W|_1^2 \leq \text{endl. Konst. } r_{12}^A$$

stetig.

ZUSATZ 2 zu II. — Das in II. gelöste Problem lässt ausser den angegebenen Lösungen keine weiteren mehr zu.

Die Beweise sind genau dieselben, wie für die analogen Zusätze des Satzes I.

Man kann, wie ich früher bewiesen habe [l. c. <sup>3</sup>), S. 879], zwar nicht jedes beliebige Funktionentripel  $u, v, w$  nach den biharmonischen Funktionentripeln entwickeln, man kann aber stets in den Entwicklungen (54) von einem bestimmten endlichen  $s$  an die Entwicklungen:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \theta_s - \theta_{s+1} + \dots &= c_1 \Theta_1 + c_2 \Theta_2 + \dots \\
 u_s - u_{s+1} + \dots &= c_1 \mathfrak{U}_1 + c_2 \mathfrak{U}_2 + \dots \\
 v_s - v_{s+1} + \dots &= c_1 \mathfrak{V}_1 + c_2 \mathfrak{V}_2 + \dots \\
 w_s - w_{s+1} + \dots &= c_1 \mathfrak{W}_1 + c_2 \mathfrak{W}_2 + \dots
 \end{aligned} \right. \quad (c_1, c_2, \dots \text{Konstanten})$$

beweisen, so dass wenn wir:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \Pi_k &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{W}_k \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{V}_k \frac{d\tau}{r}, \\
 X_k &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \mathfrak{U}_k \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{W}_k \frac{d\tau}{r}, \\
 P_k &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \mathfrak{V}_k \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \mathfrak{U}_k \frac{d\tau}{r}
 \end{aligned} \right.$$



setzen, die Lösungen (55) stets in der Form darstellen können:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{U}_v d\omega}{r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{(w_0 + w_1 + \dots + w_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{(v_0 + v_1 + \dots + v_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} + \sum_j c_j \Pi_j, \\ V &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{U}_v d\omega}{r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\tau} \frac{(u_0 + u_1 + \dots + u_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{(w_0 + w_1 + \dots + w_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} + \sum_j c_j X_j, \\ W &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U}_v d\omega}{r} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau} \frac{(v_0 + v_1 + \dots + v_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\tau} \frac{(u_0 + u_1 + \dots + u_{s-1})}{r} \frac{d\tau}{r} + \sum_j c_j P_j, \\ \varphi &= -(\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{s-1}) + \sum_j c_j \Theta_j, \end{aligned} \right.$$

wo die  $c_j$  Konstanten sind. Es werden somit für die Funktionen, welche den Differentialgleichungen:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u &= \Delta v = \Delta w = 0, \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \right.$$

genügen, die Entwicklungen nach den Funktionentripeln  $\Pi_j, X_j, P_j$  die Rolle spielen, welche die Entwicklung nach den POINCARÉ'schen Fundamentalfunktionen in der gewöhnlichen Potentialtheorie spielt.

## § 5.

Für die Kugel ist die Lösung des Problems:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u &= \Delta v = \Delta w = 0 \\ \Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in der Kugel;}$$

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= \bar{U}, \\ V &= \bar{V}, \\ W &= \bar{W} \end{aligned} \right.$$

besonders einfach.

Denken wir uns eine Kugel vom Radius  $R$  um den Anfangspunkt als Centrum und führen wir Polarkoordinaten  $r_1, \theta_1, \varphi_1$  durch die Transformationen:

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= r_1 \mu_1, \\ y &= r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos \varphi_1, & \mu_1 &= \cos \theta_1, \\ z &= r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \varphi_1, \end{aligned} \right.$$

ein; wir setzen:

$$(64) \quad F_j(x, y, z) = r_i^j Y_j(\mu_i, \varphi_i),$$

wo  $Y_j$  eine allgemeine Kugelfunktion  $j$ ter Ordnung vorstellt; dann sind [l. c. <sup>3</sup>), S. 893] die biharmonischen Funktionentripel für den Innenraum der Kugel die folgenden:

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_j = \frac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[ (2j+1)x F_j - r_i^2 \frac{\partial F_j}{\partial x} \right] \\ V_j = \frac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[ (2j+1)y F_j - r_i^2 \frac{\partial F_j}{\partial y} \right] \\ W_j = \frac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[ (2j+1)z F_j - r_i^2 \frac{\partial F_j}{\partial z} \right] \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \alpha_j \text{ eine Konstante, die zur} \\ \text{Befriedigung der Bedingung:} \\ \int_{\tau} (\Theta_j^2 + U_j^2 + V_j^2 + W_j^2) d\tau = 1 \\ \text{zu verwenden ist,} \end{array} \right.$$

und es wird:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_j = \frac{\alpha_j}{2j+1} \left[ j U_j - \frac{1}{2} (r_i^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial x} \right], \\ X_j = \frac{\alpha_j}{2j+1} \left[ j V_j - \frac{1}{2} (r_i^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial y} \right], \\ P_j = \frac{\alpha_j}{2j+1} \left[ j W_j - \frac{1}{2} (r_i^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial z} \right]. \end{array} \right.$$

Da man bei der Kugel  $s = 0$  setzen kann, so ergibt sich folgende Regel zur Lösung des Problems (61), (62):

Man mache an der Kugelfläche die folgenden Entwicklungen nach Kugelfunktionen:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{U} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \right] \\ = \sum_j \frac{j}{2j+1} \Xi_{j+1}(\mu, \varphi), \\ \bar{V} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \right] \\ = \sum_j \frac{j}{2j+1} H_{j+1}(\mu, \varphi), \\ \bar{W} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ - \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \right] \\ = \sum_j \frac{j}{2j+1} Z_{j+1}(\mu, \varphi), \end{array} \right.$$

und setze:

$$(68) \quad \begin{cases} U_j = \left(\frac{r_1}{R}\right)^{j+1} \Xi_{j+1}(\mu_1, \varphi_1), \\ V_j = \left(\frac{r_1}{R}\right)^{j+1} H_{j+1}(\mu_1, \varphi_1), \\ W_j = \left(\frac{r_1}{R}\right)^{j+1} Z_{j+1}(\mu_1, \varphi_1), \end{cases}$$

$$(69) \quad F_j = (2j+3) \frac{x U_j + y V_j + z W_j}{r_1^2},$$

dann sind die Lösungen des Problems:

$$(70) \quad \begin{cases} U = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ \quad + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega \right] \\ \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left[ j U_j - \frac{1}{2} (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial x} \right], \\ V = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ \quad + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{V} \cos(vx) - \bar{U} \cos(vy)}{r} d\omega \right] \\ \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left[ j V_j - \frac{1}{2} (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial y} \right], \\ W = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\omega} \bar{U}_v \frac{d\omega}{r} \\ \quad + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\omega} \frac{\bar{U} \cos(vz) - \bar{W} \cos(vx)}{r} d\omega - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\omega} \frac{\bar{W} \cos(vy) - \bar{V} \cos(vz)}{r} d\omega \right] \\ \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \left[ j W_j - \frac{1}{2} (r_1^2 - R^2) \frac{\partial F_j}{\partial z} \right]. \end{cases}$$

München, den 8 December 1907.

ARTHUR KORN.