Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet.

Von

P. Gordan und M. Nöther.

Die Bedeutung des identischen Verschwindens der Hesse'schen Determinante einer algebraischen Form ist von Hesse, zunächst im 42. Bande, dann im 56. Bande des Crelle'schen Journals, dahin ausgesprochen worden: dass die Beziehungen, welche zwischen den partiellen Differentialquotienten, den Polaren, der Form herrschen müssen, *lineare* seien, oder, was dasselbe ist, dass sich die homogene Form von r Variabeln durch *lineare* Transformation auf eine solche von weniger als r Variabeln zurückführen lasse. Aber auch der zweite Beweis, welcher ein System linearer Gleichungen in unvollständiger Weise auflöst, ist seit lange als unzulässig erkannt worden*).

Trotz der sehr verschiedenartigen Methoden, welche sich zur Behandlung des Problems darbieten, hat bisher die Frage nach der Richtigkeit des Hesse'schen Satzes nicht entschieden werden können. Nur für die den binären und den quadratischen Formen, bei welchen der Satz selbstverständlich richtig ist, nächststehenden beiden Fälle, den der *ternären cubischen* und den der *quaternären cubischen* Formen, ist durch H. Pasch auf dem Wege von Determinantenrelationen ein Beweis des Satzes erbracht worden**). Und ferner hat der eine von

---

*) Wie dem einen von uns (N.) vor längerer Zeit von H. Christoffel mitgetheilt wurde, sind die Mängel des Beweises gleich nach Erscheinen des zweiten Hesse'schen Aufsatzes bemerkt worden, und wurde von H. Weierstrass ein Zweifel an der Richtigkeit des Satzes geäussert. Von den unten folgenden Resultaten hat H. Christoffel die eindeutige Umkehrbarkeit der Formeln (10) des § 2. bei jener Gelegenheit angegeben. Die falschen Beweise sind übrigens in die meisten Lehrbücher übergegangen, so in Brioschi's Determinanti, in Salmon-Fiedler's Algebra der linearen Transformationen, etc.

**) S. Crelle-Borch. 80, p. 169.

uns, durch Betrachtung des Verhaltens der Determinante einer reducibeln Form in Bezug auf deren Factoren und der zwischen den Polaren bestehenden Relation, die *ternären* Formen überhaupt erledigt*). Endlich ist hier zu bemerken, dass früher auch H. Sylvester den Fall von linearen Relationen zwischen den Polaren behandelt hat**), indem er dieselben in die entsprechenden Coefficientenrelationen aufgelöst hat; wobei er indess nicht auf die Bedeutung der in der Hesse'schen Determinante enthaltenen Coefficientenaggregate eingeht.

Bei der Wichtigkeit, welche die Hesse'sche Covariante einer Form für diese hat, haben wir die Untersuchung wieder aufgenommen, indem wir die Frage nach denjenigen Formen gestellt haben, deren Determinante identisch verschwindet. Dabei hat sich nun der Hesse'sche Satz als im Allgemeinen *unrichtig* erwiesen, vielmehr ist unser Resultat:

Der Hesse'sche Satz gilt, wie selbstverständlich für die binären, so auch für alle ternären und quaternären Formen, dagegen nicht mehr für die Formen von mehr als vier Variabeln und von höherer als der zweiten Ordnung. Für diese höhern Fälle lassen sich ganze Classen von Formen aufstellen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden.

Der Weg, auf welchem wir die Untersuchung***) führen werden, ist zunächst die Betrachtung einer linearen partiellen Differentialgleichung, welcher die Form f und deren Polaren Genüge leisten. Die Coefficienten dieser Gleichung sind nicht direct gegeben, sondern selbst wieder Functionen, die durch ein System partieller Differentialgleichungen definirt werden. Eine der wesentlichen Aufgaben war, aus der Zahl der Lösungen dieses Systems diejenigen auszuscheiden, welche *ganze* Functionen der Variabeln sind. Und dies geschieht hier, wenn auch nicht für den allgemeinsten Fall, durch Betrachtung einer an sich interessanten Art von *rationalen Transformationen* der Variabeln, zu welchen die Functionen unseres Systems Veranlassung geben, nämlich solcher, bei welchen die Transformationsdeterminante und eine Reihe ihrer Unterdeterminanten *identisch* verschwinden. Insbesondere werden auf diesem Wege in § 8. die quinären Formen vollständig erledigt.

---

*) Gordan „Ueber einen Satz von Hesse", Sitzungsber. der phys.-med. Soc. Erlangen, v. 13. Dec. 1875.

**) Philos. Magazine, Ser. IV, vol. 5 (1853).

***) Ein Auszug aus derselben ist schon in den Sitzungsber. der phys.-med. Soc. Erlangen, v. 10. Jan. 1876, mitgetheilt worden.

§ 1.

Problemstellung. Definition der Functionen $h^{(i)}$.

Die ganze algebraische homogene Form der r Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_r,$$

welche wir der Untersuchung zu Grunde legen, bezeichnen wir mit

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \cdots x_r).$$

Von dieser Form setzen wir voraus, dass die Determinante ihrer zweiten partiellen Differentialquotienten

$$(2) \qquad \Delta_f = \Sigma \pm f_{11} f_{22} \cdots f_{rr}$$

und die Unterdeterminanten derselben bis zu irgend einer bestimmten Ordnung hin identisch, für alle Werthsysteme der x, verschwinden.

Da die Determinante Δ_f gleichzeitig Functionaldeterminante der ersten partiellen Differentialquotienten

$$f_1, f_2, \cdots f_r$$

von f ist, so sagt das Verschwinden von Δ_f aus, dass zwischen diesen Grössen f_i wenigstens *eine*, für alle Werthsysteme der x identische Relation besteht. Dieselbe muss algebraisch und homogen sein, da sie durch Elimination aus homogenen algebraischen Gleichungen erhalten werden kann. Eine solche irreducible Relation von möglichst niedriger Dimension in den f_i sei bezeichnet mit

$$(3) \qquad \pi(f_1, f_2, \cdots f_r) = 0,$$

und wir setzen

$$(4) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial f_i} = \pi_i.$$

Sei ferner ϱ der grösste gemeinsame Factor aller π_i. Dann setzen wir weiter

$$(5) \qquad \pi_i = \varrho\, \xi_i = \varrho\, h^{(i)}(x),$$

wo nun die ξ_i *ganze* Functionen $h^{(i)}(x)$ der x *ohne gemeinschaftlichen Factor* sind.

Man kann hier bemerken, dass, im Falle die ersten Unterdeterminanten Δ_{ik} von Δ_f nicht Null sind, diese sich wie die Quadrate und Producte von r Grössen verhalten, die mit den eben definirten Grössen $h^{(i)}$ übereinstimmen. Wenn die $h^{(i)}$ Constanten gleich werden, so hat man den Satz Hesse's. Wir haben daher nur die Möglichkeit des andern Falles, dass die $h^{(i)}$ Functionen der x werden, zu untersuchen.

§ 2.

Differentialgleichungen der $h^{(i)}$. Definition der Functionen Φ.

Wir werden nun eine Classe von Functionen, die in unserem Probleme eine wichtige Rolle spielen, durch eine lineare partielle Differentialgleichung definiren.

Unter der im Folgenden durchgängig festgehaltenen Bezeichnung

$$\sum_j \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} y_j = F_y$$

betrachten wir die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \Phi_\xi = 0.$$

Die derselben genügenden homogenen *ganzen Functionen der* x nennen wir *Functionen* Φ.

Wir werden zunächst eine Reihe von Lösungen und Eigenschaften, dann ein vollständiges System von Lösungen dieser Gleichung aufstellen. Da sich (3) in die Form

$$(3') \qquad f_\pi = 0 \text{ oder } f_\xi = 0$$

setzen lässt, so folgt, dass f selbst eine der Functionen Φ ist.

Ferner ergiebt sich durch Differentiation von (3) die wiederum in allen x identische Gleichung

$$(7) \qquad 0 = \Sigma \pi_i f_{iy} \equiv \varrho f_{y\xi} \quad \text{(für jedes } y);$$

d. h. auch alle *Polaren* f_y von f sind Functionen Φ. Dieselben würden sogar, im Falle nur *eine* Relation zwischen den f_y existirte, ein vollständiges System von Lösungen der Gleichung (6) bilden. Weitere Lösungen sind die Functionen π_i, als Functionen der f_y:

$$\pi_{i\xi} = 0.$$

Jetzt können wir aber die Functionen Φ noch anders auffassen:

Die Functionen $\Phi(x)$, *gebildet für die Argumente* $x + \lambda\xi$, *sind unabhängig von* λ:

$$(8) \qquad \Phi(x + \lambda\xi) = \Phi(x).$$

Denn man hat, wenn Φ von der Ordnung ν,

$$\Phi(x + \lambda\xi) = \Phi + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2}\Phi_{\xi^2} + \cdots + \frac{\lambda^\nu}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu}\Phi_{\xi^\nu}.$$

Setzt man aber in $\Phi_\xi = 0$ den identisch verschwindenden Ausdruck Φ_π an Stelle von Φ, so ergiebt sich wegen $\pi_{i\xi} = 0$:

$$\Phi_{\pi\xi} = 0, \text{ oder } \Phi_{\xi^2} = 0, \quad \left(\text{wo } \Phi_{\xi^2} \equiv \sum_{ik} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k}\xi_i\xi_k\right)$$

und ebenso, indem man Φ_{π^2} etc. einsetzt:

$$\Phi_{\xi^3} = 0, \cdots \Phi_{\xi^\nu} = 0.$$

Der Satz gilt übrigens für jede, auch nicht ganze Lösung von (6).

Diese Auffassung führt sodann noch zu einer zweiten wichtigen Eigenschaft der Functionen Φ:

Ist eine solche ganze Function Φ das Product zweier ganzen Functionen

$$\Phi = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

so sind auch die Factoren selbst Functionen Φ, also Lösungen von (6)*).

Denn offenbar müssen, wie $\Phi(x+\lambda\xi)$ selbst, auch $\varphi(x+\lambda\xi)$ und $\psi(x+\lambda\xi)$ von λ unabhängig sein, und man hat auch:

$$\varphi_\xi = 0, \quad \varphi_{\xi^2} = 0, \cdots; \qquad \psi_\xi = 0, \quad \psi_{\xi^2} = 0, \cdots.$$

Aus diesem Satze ergeben sich nun weitere Lösungen von (6). Nach (5) sind auch die $h^{(i)}(x)$, als Factoren der x_i, Lösungen, oder

(9) $$h^{(i)}_\xi = 0,$$

und man hat

(9') $$\xi_i = h^{(i)}(x) = h^{(i)}(x+\lambda\xi),$$

woraus insbesondere

(9'') $$h^{(i)}(\xi) = 0.$$

Endlich bilden wir noch die Functionen Φ:

$$x_i\xi_k - x_k\xi_i,$$

die sich durch Einsetzen in (6) als Lösungen ergeben Aus diesen letztern Lösungen können wir auch ein *vollständiges* System solcher zusammensetzen. Denn sei, wie wir annehmen wollen, ξ_r nicht identisch $= 0$, so betrachten wir das System von Lösungen:

(10) $$\begin{cases} \eta_1 = x_1 - \dfrac{\xi_1}{\xi_r} x_r, \\ \eta_2 = x_2 - \dfrac{\xi_2}{\xi_r} x_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{r-1} = x_{r-1} - \dfrac{\xi_{r-1}}{\xi_r} x_r. \end{cases}$$

Jede Function Φ wird eine homogene ganze rationale Function der Grössen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}$.

Denn bildet man: indem man noch

$$0 = \eta_r = x_r - \frac{\xi_r}{\xi_r} x_r$$

setzt, die Function Φ für die Argumente η:

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, \eta_r),$$

---

*) Es ist für manche Anwendungen beachtenswerth, dass dieser Satz für alle ganzen Lösungen irgend einer linearen partiellen Differentialgleichung gilt, deren Coefficienten nur selbst Lösungen der Gleichung sind.

so fallen aus der Entwicklung alle Potenzen von $\frac{x_r}{\xi_r}$ heraus, und man hat:

(11) $$\Phi(x_1, x_2, \cdots x_{r-1}, x_r) \equiv \Phi(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, 0).$$

Und ebenso drückt sich jede Lösung durch die η allein aus. Die η bilden also ein vollständiges System von einander unabhängiger Lösungen. Und die Gleichung (6) hat daher die Eigenschaft, genau so integrirt zu werden, als ob deren Coefficienten constant wären, nämlich durch das System (10). Als Bedingung hiefür sind nur die Gleichungen (9) aufgetreten. Im Folgenden haben wir aber nur von den Lösungen Φ Gebrauch zu machen.

Wir wollen noch einer Eigenschaft des Systems (10) Erwähnung thun. Die Gleichungen derselben lassen sich auch *rational* umkehren. Denn da auch die Functionen ξ_i oder $h^{(i)}(x)$ ganze Functionen der η sind, so erhält man aus (10) auch

$$x_i = \eta_i + \frac{h^{(i)}(\eta)}{h^{(r)}(\eta)} x_r, \quad (i = 1, 2, \cdots r-1),$$

also auch die $x_1, x_2, \cdots x_r$ rational ausgedrückt in den neuen Variabeln $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}, x_r$.

In (9) haben wir Gleichungen für die unbekannten Functionen $h^{(i)}$ allein erhalten. Wir haben uns zunächst zu der Discussion dieser Gleichungen zu wenden, um dann aus ihren Lösungen mittelst der Gleichungen (3′) und (7) zugehörige Functionen f zu finden.

§ 3.

Transformationsproblem der $h^{(i)}$.

Das System der Gleichungen (9)

$$h_\xi^{(i)} = 0$$

hat genau die Form, wie es schon bei Jacobi*) auftritt und kann leicht allgemein integrirt werden. Wir bedürfen indessen in den folgenden Entwicklungen dieser allgemeinen Integration nicht. Es möge daher nur kurz angedeutet werden, dass die Integration dadurch geschieht, dass man neue Functionen der $h^{(i)}$ und x, aus welchen man, indem man sie Constanten gleich setzt, die $h^{(i)}$ zu berechnen hat, als *abhängige* Variable, die $h^{(i)}$ aber ausser den x als unabhängige Variable einführt. Für die neueingeführten Functionen erhält man dann nur wieder die Gleichung (6), deren Lösungen in (10) gegeben sind, und man findet hieraus als allgemeinste Lösungen des Systems (9):

$$h^{(i)}(x) = \psi^{(i)}(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{r-1}),$$

wo die $\psi^{(i)}$ irgend welche Functionen der η sein können.

---

*) Crelle J. II, p. 321.

Aus diesen Gleichungen, welche zur Bestimmung der Functionen $h^{(i)}$ hinreichen, ergeben sich aber dieselben im Allgemeinen nicht als *ganze* rationale Functionen der x. In dem letztern Falle müssen jedenfalls die $\psi^{(i)}$ *ganze* Functionen der η sein; und die Gleichungen (9″) zeigen weiter, dass, sollen die $h^{(i)}$ keinen Factor gemein haben, wenigstens zwei Relationen zwischen den Functionen $h^{(i)}$ allein bestehen müssen, nämlich eben die Gleichungen (9″).

Um aber die *ganzen* Functionen $h^{(i)}$ überhaupt auszuscheiden, wenigstens für einen besonders wichtigen Fall, stellen wir Betrachtungen an, die in ein anderes Gebiet, in das der *Transformationen* gehören und an die Gleichungen (9′) anknüpfen.

Diese Gleichungen

$$(9') \qquad \xi_i = h^{(i)}(x) = h^{(i)}(x + \lambda\xi),$$

in welchen wir von jetzt an die $h^{(i)}$ immer als *ganze* rationale Functionen auffassen, liefern Beziehungen zwischen dem *Werthgebiet der* x und *dem der* ξ. Das Werthgebiet der x umfasst alle möglichen Werthcombinationen der $r-1$ Verhältnisse der r Grössen x und hat daher $r-1$ Dimensionen; das der Verhältnisse der ξ ist dagegen ein beschränktes, da nach (9″) wenigstens zwei Gleichungen zwischen den ξ bestehen; es möge μ Dimensionen haben, wo also μ höchstens $= r-3$ ist. Wir bemerken noch, dass dieses Gebiet der ξ ein irreducibles ist.

Zu jedem Werthsystem der x gehört nach (9′) im Allgemeinen, d. h. wenn für dieses x nicht alle $h^{(i)}(x)$ verschwinden, eindeutig *ein* Werthsystem der Verhältnisse der ξ. Zu diesem gehören aber umgekehrt *unendlich viele* Werthsysteme der Verhältnisse der x, und zwar, wenn x' irgend eines der zu ξ' gehörenden Werthsysteme ist, insbesondere alle von der Form

$$x' + \lambda\xi',$$

für irgend ein λ. Wir werden im Folgenden der Kürze halber die Gesammtheit solcher zusammengehörigen Werthsysteme $x + \lambda\xi$ als *Reihe* $(x\xi)$ bezeichnen.

Hieraus folgt zunächst, dass sich das ganze Werthgebiet der x in ∞^{r-2} Reihen $(x\xi)$, der Form $x + \lambda\xi$, zerlegt. Und da die Verhältnisse der r Grössen x nur von den μ Parametern des ξ-Gebietes abhängen, so müssen zu irgend einem ξ' im Allgemeinen $\infty^{r-\mu-2}$ solcher Reihen $(x'\xi')$ zugehören. Die Gesammtheit dieser zu ξ' gehörenden Reihen $(x'\xi')$ bezeichnen wir als *das Gebilde* $\varphi^{(\xi')}$. Es hat $r-\mu-1$ Dimensionen.

Bei diesem Entsprechen treten aber auch unter den x Ausnahmeelemente auf. Es sind diejenigen Werthsysteme x, welche alle Functionen $h^{(i)}(x)$ gleichzeitig zu 0 machen, und welche wir als die *Funda-*

mentalwerthsysteme y bezeichnen wollen, von denen höchstens ∞^{r-3} existiren können:

$$h^{(i)}(y) = 0; \quad \text{für jedes } i.$$

Zu denselben gehören auch die Werthsysteme ξ selbst, wegen

$$h^{(i)}(\xi) = 0,$$

diese bilden einen *Theil* der y (oder sie können auch, insbesondere für $\mu = r - 3$, *alle* y bilden). Einem solchen y kann *ein* ξ oder können *unendlich viele* der ξ entsprechen; diese findet man, indem man die Ausdrücke

$$\xi_i = h^{(i)}(y + \varepsilon y')$$

nach aufsteigenden Potenzen von ε ordnet und dann ε gegen 0 convergiren lässt, während man den Verhältnissen der y' alle möglichen Werthe giebt. Auch hier bleibt der Satz gelten, dass, wenn auf diese Weise zusammengehörige Werthsysteme y und ξ gefunden sind, zu demselben ξ auch die ganze Werthreihe $(y\xi)$ oder $y + \lambda\xi$ gehört; denn der Satz gilt für die Werthreihe $(y + \varepsilon y') + \lambda\xi$.

Es können auch noch umgekehrt, wie unter den x, so auch unter den ξ Ausnahmeelemente auftreten. Während die Gleichungen

$$\xi_k' h^{(i)}(x) - \xi_i' h^{(k)}(x) = 0$$

bei willkürlich gegebenen ξ', welche nur dem ξ-Gebiete angehören müssen, für die Verhältnisse der x $\infty^{r-\mu-1}$ Auflösungen, das $\varphi^{(\xi')}$-Gebilde, zulassen, kann sich für *specielle* Werthsysteme ξ' die Zahl der Auflösungen erhöhen. Indessen kann es, wenn man von denjenigen ξ absieht, deren zugehörige x in höherer Dimension nur in das Fundamentalgebiet der y fallen, höchstens $\infty^{\mu-2}$ solcher geben, bei denen dieses eintritt, da bei $\infty^{\mu-1}$ solcher speciellen ξ' die zugehörigen $\varphi^{(\xi')}$-Gebilde schon das ganze x-Gebiet erfüllen würden.

§ 4.

Verhalten der $h^{(i)}$.

Nach Gleichung (8) setzen sich auch die Werthsysteme, für welche *irgend* eine der Functionen Φ verschwindet, nur aus Werthreihen $(x\xi)$, nämlich aus ∞^{r-3} solcher, zusammen. Mit einer von den übrigen ∞^{r-2} Werthreihen $(x\xi)$, die überhaupt existiren, hat $\Phi(x) = 0$ kein Werthsystem gemein, ausser dem betreffenden ξ, wegen

$$\Phi(\xi) = 0.$$

Wie sich die Werthsysteme, für welches irgend eines der $h^{(i)}$ verschwindet, z. B.

$$h \equiv \Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) = 0$$

ist, zusammensetzen, können wir noch genauer verfolgen. Dieselben bestehen aus zwei Theilen, a) aus sämmtlichen Fundamentalwerthsystemen x, für die h unabhängig von den α_i, also sämmtliche $h^{(i)}(x)$ verschwinden; und b) aus den von a_i abhängigen Werthsystemen x. Für diese letztern muss zugleich werden

$$\xi' \equiv \Sigma a_i \xi_i = 0,$$

d. h. man erhält nur $\infty^{\mu-1}$ der Werthsysteme ξ und die zugehörigen x. Da auch umgekehrt *nur* die Bedingung $\xi' = 0$ vorliegt, so erhält man auch *alle* x dieser $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde. Daher setzen sich die Werthsysteme b) zusammen aus $\infty^{\mu-1}$ der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde; *und* $h = 0$ *besteht auch nur aus diesen*, da die unter a) genannten nur zur Dimension $r-3$ aufsteigen, also keinen selbständigen Factor von h bilden können und schon unter den in b) bezeichneten enthalten sein müssen.

Wir mögen noch bemerken, dass man die in a) bezeichneten Fundamentalwerthsysteme y dadurch erhalten kann, dass man die Gleichungen aller Gebilde $\varphi^{(\xi)}$, für deren ξ *nicht* $\Sigma \alpha_i \xi_i = 0$ ist, verbindet mit der Gleichung

$$\Sigma a_i h^{(i)}(x) = 0.$$

Man sieht dabei, dass in jedem Gebilde $\varphi^{(\xi)}$ $\infty^{r-\mu-2}$ der Werthsysteme y liegen, welche sich auf $\infty^{r-\mu-3}$ Reihen $(y\xi)$ vertheilen; oder zu jedem ξ gehören im Allgemeinen $\infty^{r-\mu-3}$ Fundamentalreihen $(y\xi)$; im Ganzen ∞^{r-3} solcher Reihen, die indess zusammen nur ein Gebiet von $r-3$ Dimensionen füllen dürfen, da die $h^{(i)}$ keinen Factor gemein haben sollen; und in der That haben wir gesehen, dass schon $\infty^{\mu-1}$ der ξ-Werthsysteme das ganze Fundamentalgebiet y liefern. In besondern Fällen oder für specielle der ξ kann sich sogar die Anzahl der zugehörigen Fundamentalreihen $(y\xi)$ noch erhöhen.

Während die Functionen h sich nur aus den sämmtlichen Werthsystemen von $\infty^{\mu-1}$ der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde zusammensetzen, entstehen die Functionen Φ im Allgemeinen dadurch, dass nach irgend einem Gesetze aus sämmtlichen ∞^{μ} $\varphi^{(\xi)}$-Gebilden je $\infty^{r-\mu-3}$ Werthreihen $(x\xi)$ herausgenommen werden. —

Die Annahme, dass die ξ nur ein Werthgebiet von μ Dimensionen ($\mu \overline{\gtrless} r-3$) bilden sollen, können wir auch analytisch ausdrücken. Hiernach dürfen die r Functionen $h^{(i)}(x)$ nur von $\mu+1$ Combinationen der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_r$, die wir mit

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

bezeichnen wollen, homogen abhängen. Nimmt man also die $(\mu+1)$-reihigen Determinanten aus dem unvollständigen Systeme

$$\begin{array}{cccc} h_{i_1}^{(1)} & h_{i_1}^{(2)} & \cdots & h_{i_1}^{(r)} \\ h_{i_2}^{(1)} & h_{i_2}^{(2)} & \cdots & h_{i_2}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{i_{\mu+1}}^{(1)} & h_{i_{\mu+1}}^{(2)} & \cdots & h_{i_{\mu+1}}^{(r)} \end{array},$$

wo

$$h_{i_k}^{(i)} = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_{i_k}}$$

gesetzt ist und $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ irgend eine Combination von $\mu+1$ verschiedenen Zahlen aus $1, 2, \cdots r$ bedeutet, so verhalten sich dieselben wie die entsprechenden Determinanten aus dem unvollständigen Systeme:

$$\begin{vmatrix} h_{A_1}^{(1)} & h_{A_1}^{(2)} & \cdots & h_{A_1}^{(r)} \\ h_{A_2}^{(1)} & h_{A_2}^{(2)} & \cdots & h_{A_2}^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{A_{\mu+1}}^{(1)} & h_{A_{\mu+1}}^{(2)} & \cdots & h_{A_{\mu+1}}^{(r)} \end{vmatrix}.$$

In diesem Systeme sind die $h^{(i)}$ als Functionen von

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

aufgefasst und es ist in diesem Sinne

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial A_k} = h_{A_k}^{(i)}$$

gesetzt. Da nun der Proportionalitätsfactor die Determinante der A_k nach den entsprechenden x_i ist, und da dieselbe, wenn die A_k von nicht weniger als $\mu+1$ Combinationen der x abhängen sollen, bei allgemeiner Annahme der Combination $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ nicht verschwinden kann, so können dann auch jene Determinanten der h nach den x_i nicht alle verschwinden, und sie werden von der besondern Combination $i_1, i_2, \cdots i_{\mu+1}$ ganz unabhängig. Dagegen werden *die $(\mu+2)$-reihigen Determinanten*, die aus dem obigen Systeme dadurch entstehen, dass man eine weitere Horizontalreihe

$$h_{i_{\mu+2}}^{(1)} \quad h_{i_{\mu+2}}^{(2)} \quad \cdots \quad h_{i_{\mu+2}}^{(r)}$$

hinzufügt, *sämmtlich verschwinden.*

§ 5.

Das h-Problem bei einfach unendlichem Werthgebiete der $h^{(i)}$.

Für den Fall, dass das Werthgebiet der ξ ein *einfach* unendliches ist, können wir die sämmtlichen Functionen $h^{(i)}(x)$, welche den Gleichungen (9′) genügen, wirklich angeben. Sei also $\mu = 1$.

In diesem Falle besteht ein $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde aus $r-2$ Dimensionen und kann daher durch *eine* Gleichung zwischen den Variabeln x dargestellt werden, die wir ebenfalls bezeichnen mit:

$$\varphi^{(\xi)} = 0.$$

Ferner können hier die Werthsysteme, für welche eines der $h^{(i)}$ verschwindet, nämlich

$$\Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) = 0$$

ist, nur aus denen einer endlichen Zahl von $\varphi^{(\xi)}$-Gebilden bestehen, oder man muss eine Identität haben:

$$\Sigma \alpha_i h^{(i)}(x) \equiv \varphi^{(\xi')} \cdot \varphi^{(\xi'')} \cdots, \tag{12}$$

wo die ξ', ξ'', $\cdots$ diejenigen Werthsysteme ξ sind, für welche

$$\Sigma \alpha_i \xi_i = 0$$

ist. *Die Functionen* $\varphi^{(\xi)}$, als Factoren einer Function $h^{(i)}$, *gehören also hier auch zu den in* § 2. *definirten Functionen* Φ.

Hieraus folgt zunächst, dass

$$\varphi^{(\xi')}_{\xi_0} = 0$$

ist für alle diejenigen Werthsysteme x, welche zu dem beliebigen constanten Werthsysteme ξ_0 gehören, d. h. also für alle diejenigen Werthsysteme x, welche $\varphi^{(\xi_0)}$ zu 0 machen; es muss also eine Identität existiren:

$$\varphi^{(\xi')}_{\xi_0} \equiv \varrho\, \varphi^{(\xi_0)}, \tag{13}$$

wo ϱ eine ganze Function der x oder auch 0 sein kann. Dabei sind ξ' und ξ^0 zwei willkührlich gegebene Werthsysteme aus dem ξ-Gebiet.

Nun ist aber

$$\varphi^{(\xi')}_{\xi'} \equiv 0,$$

bei constantem ξ' für *alle* Werthe von x. Denn da die Werthsysteme, für welche $\varphi^{(\xi')} = 0$ wird, nur aus Werthreihen $(x\xi')$ der Form $x + \lambda \xi'$ bestehen, so kann die Gleichung

$$\varphi^{(\xi')}(x + \lambda \xi') = \varphi^{(\xi')}(x) + \lambda \varphi^{(\xi')}_{\xi'} + \cdots = 0,$$

wenn man x *beliebig* annimmt, nur die Wurzel $\lambda = \infty$ haben, woraus folgt, dass die Coefficienten von λ, von λ^2 etc. identisch verschwinden müssen.

Daher folgt weiter, indem man von $\varphi^{(\xi')}_{\xi'}$ die Polare nach ξ_0 nimmt, dass auch

$$\varphi^{(\xi')}_{\xi'\xi_0} \equiv 0, \quad \text{für alle } x;$$

und Gleichung (13) liefert jetzt:

$$(\varrho \varphi^{(\xi_0)})_{\xi'} \equiv 0, \quad \text{für alle } x.$$

Aus dieser Gleichung schliesst man nun, genau wie in (8) des § 2., dass

$$\varrho(x + \lambda \xi') \cdot \varphi^{(\xi_0)}(x + \lambda \xi') \equiv \varrho(x) \cdot \varphi^{(\xi_0)}(x)$$

ist, für jedes x, dass also entweder $\varrho \equiv 0$ ist, d. h.

$$\varphi_{\xi_0}^{(\xi')} \equiv 0, \tag{14}$$

oder dass $\varphi_{\xi'}^{(\xi_0)} \equiv 0$ ist, was, da ξ' und ξ_0 beliebige Grössen des ξ-Gebiets waren, wiederum auf Gleichung (14) führt.

In unserem Falle besteht also ein Gebilde $\varphi^{(\xi)}$ nicht nur aus Werthreihen $(x\xi)$, sondern auch aus solchen $(x\xi')$, wo ξ' irgend ein Werthsystem des ξ-Gebiets vorstellt.

Nach Gleichung (12) hat man nun auch für irgend eine der Functionen $h^{(i)}(x)$:

$$h_{\xi'}^{(i)} \equiv 0,$$

bei *constantem* ξ' und *beliebigem* x.

Seien

$$\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(r-s)}$$

irgend welche linear von einander unabhängige constante Werthsysteme des ξ-Gebiets, in der Zahl, dass sich alle ξ linear und homogen aus diesen $r-s$ zusammensetzen lassen; also:

$$h_{\xi^{(k)}}^{(i)} \equiv 0.$$

Dann hat man auch für irgend ein y von der Form

$$y = \alpha_1 \xi^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(2)} + \dots + \alpha_{r-s} \xi^{(r-s)}$$

die Identität

$$h_y^{(i)} \equiv 0,$$

woraus

$$h^{(i)}(x + \lambda y) \equiv h^{(i)}(x)$$

und

$$h^{(i)}(y) \equiv 0.$$

Daher muss zunächst $s > 1$ sein, da sonst die $h^{(i)}(x)$ ein Gebiet von ∞^{r-2} Werthsystemen, also einen Factor gemein haben würden.

Zu diesen y, welche hier die Fundamentalwerthsysteme des x-Gebiets bilden, gehören auch alle ξ selbst. Da dieselben also linear und homogen von $r-s$ Parametern abhängen, *so müssen zwischen denselben* s ($\geqq 2$) *lineare Relationen existiren*, welche man durch Elimination der $r-s$ Parameter findet, etwa

$$h^{(1)}(x) = 0, \quad h^{(2)}(x) = 0, \quad \dots \quad h^{(s)}(x) = 0.$$

Unser Gleichungssystem $h_{\xi^{(k)}}^{(i)} \equiv 0$ geht dann in folgendes über:

$$\sum_j \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} \xi_j^{(k)} = 0, \quad \text{von } j = s+1 \text{ bis } j = r,$$
$$(k = 1, 2, \dots r-s).$$

Dies sind, bei gegebenem i, $r-s$ Gleichungen, homogen in den $r-s$ Grössen

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j}.$$

Die Determinante der Coefficienten

$$\Sigma \pm \xi_{s+1}^{(1)} \; \xi_{s+2}^{(2)} \cdots \xi_r^{(r-s)}$$

verschwindet nicht, da die Werthsysteme $\xi^{(1)}, \cdots \xi^{(r-s)}$ linear von einander unabhängig sein sollen. Daher folgt:

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = s+1, s+2, \cdots r),$$

d. h. die Grössen

$$h^{(s+1)}(x), \; h^{(s+2)}(x), \cdots h^{(r)}(x)$$

sind Functionen von $x_1, x_2, \cdots x_s$ *allein.*

Umgekehrt können aber, wenn die Functionen $h^{(1)}, h^{(2)}, \cdots h^{(s)}$ identisch 0 sind, die Functionen $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ *ganz willkührliche* ganze homogene Functionen von $x_1, x_2, \cdots x_s$ sein, und man wird immer ein System von Lösungen der Gleichungen (9') haben.

Damit dann noch ausserdem, wie es in diesem § angenommen war, das Werthgebiet der ξ ein einfach unendliches wird, müssen für $s < \frac{r}{2}$, zu den von selbst bestehenden $r-2s$ identischen Relationen zwischen den $r-s$ Functionen $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$, noch $s-2$ beliebige weitere Relationen hinzugenommen werden. Für $s = 2$ insbesondere hat man also ohne weitere Relationen schon den Fall des einfach unendlichen Werthgebiets der ξ.

Für $s \geqq \frac{r}{2}$, in welchem Falle keine Relationen von selbst bestehen, hat man, wenn die ξ *eine* Dimension bilden sollen, noch $r-s-2$ beliebige Relationen zwischen den $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ anzunehmen.

§ 6.

Das f-Problem für den Fall, dass mehrere der $h^{(i)}$ verschwinden.

Indem wir jetzt zur Aufsuchung von Functionen f übergehen, deren Determinante Δ_f identisch verschwindet, werden wir dieses Problem in dem Umfange erledigen, als es die im Vorhergehenden gefundenen Lösungen des h-Problems der Gleichungen (9') gestatten.

Wir haben für die Function f die Gleichungen

$$f_\xi = 0, \quad f_{i\xi} = 0.$$

Differentiirt man die erstere Gleichung nach den Variabeln x, so ergiebt sich mit Hülfe des zweiten Systems Gleichungen:

$$(15) \qquad f_1 h_k^{(1)} + f_2 h_k^{(2)} + \cdots + f_r h_k^{(r)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots r),$$

wo

$$h_k^{(i)} = \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x_k}$$

ist.

Dieses System linearer partieller Differentialgleichungen für die Function f genügt, mit Hinzunahme der Bedingung, dass f eine *ganze* Function sein soll, zur Definition einer Function f, deren Déterminante Δ_f identisch verschwindet. Denn indem man die Gleichungen des Systems der Reihe nach mit den Variabeln $x_1, \cdots x_r$ multiplicirt und dieselben addirt, ergeben sich wieder umgekehrt die genügenden Gleichungen

$$f_\xi = 0, \quad f_{i\xi} = 0.$$

Die Gleichungen (15) zeigen, dass nicht alle möglichen ganzen Lösungen des in (9') gestellten h-Problems zu zugehörigen Functionen f führen; dass vielmehr, da die Gleichungen (15) mit einander verträglich sein müssen, eine Reihe weiterer Bedingungsgleichungen für die Functionen $h^{(i)}(x)$ auftreten. Wir beschränken uns nun bei dieser Untersuchung auf die im vorigen § gefundenen Lösungen $h^{(i)}$, die zugleich alle für $\mu = 1$ möglichen Lösungen umfassen.

Hiernach setzen wir voraus, dass

$$(16) \quad \begin{cases} \xi_1 \;\; = h^{(1)}(x) = 0, \quad \xi_2 = h^{(2)}(x) = 0, \cdots \xi_s = h^{(s)}(x) = 0, \\ \xi_{s+1} = h^{(s+1)}(x_1, x_2, \cdots x_s), \qquad\qquad \cdots \xi_r = h^{(r)}(x_1, x_2, \cdots x_s) \end{cases}$$

sind, wo die $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ ganze homogene Functionen gleicher Ordnung der Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_s$ sind.

Die Relation $f_\xi = 0$, welche zwischen den Polaren von f besteht, wird dann eine solche zwischen $f_{s+1}, f_{s+2}, \cdots f_r$ allein:

$$\pi(f_{s+1}, f_{s+2}, \cdots f_r) = 0.$$

da sonst $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\cdots \xi_s = 0$ Relationen von niedrigerer Dimension in den f_i, als π, bildeten, die nach der Annahme über π nicht existiren.

Für $s = r - 1$ folgt hier

$$f_r \equiv 0,$$

eine lineare Relation zwischen den Polaren. Ebenso folgt für $s = r - 2$ eine Relation zwischen f_{r-1} und f_r allein, die, als *binäre*, ebenfalls linear sein muss. In diesen beiden Fällen (wie für $s = 1$) gilt also der von Hesse gegebene Satz. Sei also

$$2 \leqq s < r - 2.$$

Das System der Gleichungen (15) wird hier

$$(17) \quad f_{s+1} h_k^{(s+1)} + f_{s+2} h_k^{(s+2)} + \cdots + f_r h_k^{(r)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots s),$$

ein System von s linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen für die eine abhängige Variable f und die $r - s$ unabhängigen Variabeln

$$x_{s+1}, x_{s+2}, \cdots x_r,$$

in welches die Variabeln

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

nur wie Constanten eingehen, also ein System mit *constanten* Coefficienten $h_k^{(i)}$. In diesem System (17) müssen nun noch die $h^{(i)}$ so bestimmt werden, dass sich die Gleichungen (17) als lineare mit einander vertragen, was wenigstens für $r-s<s$ zu Bedingungen für die $h^{(i)}$ führt.

Wir nehmen jetzt wieder an, dass das Werthgebiet der ξ ein μ-fach unendliches ist.

Sei nun *erstens* $s<\frac{r}{2}$.

Die ξ würden dann, ohne weitere Bedingungen für die Functionen $h^{(i)}(x)$, ein Gebiet von $s-1$ Dimensionen bilden. Damit sich dasselbe auf μ Dimensionen reducire, müssen zu den obigen Bestimmungen für die $h^{(i)}$ (in (16)) noch $s-\mu-1$ beliebige Beziehungen zwischen den $h^{(s+1)}, \cdots h^{(r)}$ hinzutreten. Diese Functionen $h^{(i)}(x)$ hängen dann homogen von nur $\mu+1$ Combinationen der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ ab, die wir wieder mit

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

bezeichnen wollen.

Es folgt dann, dass in dem System (17) $s-\mu-1$ der Gleichungen von den übrigen $\mu+1$ linear abhängig sind (nämlich durch lineare Relationen verbunden, die unabhängig sind von den Variabeln x_{s+1}, $x_{s+2}, \cdots x_r$). Denn es verschwinden, wie schon am Ende des § 3. bemerkt ist, sämmtliche $(\mu+2)$-reihige Determinanten, welche man aus den Coefficienten $h_k^{(i)}$ von irgend $\mu+2$ der Gleichungen des Systems (17) bilden kann, während die aus irgend $\mu+1$ der Gleichungen gebildeten $(\mu+1)$-reihigen Determinanten Grössen proportional sind, welche von der Wahl dieser $\mu+1$ Gleichungen unabhängig sind.

Sei *zweitens* $s \gtreqless \frac{r}{2}$.

Die ξ aus den Gleichungen (16) sind dann zunächst an Zahl ∞^{r-s-1} Das System (17) liefert also dann *entweder:*

$$f_{s+1}=0, \quad f_{s+2}=0, \cdots f_r=0,$$

d. h. man hat den von Hesse gegebenen Satz, *oder* es müssen noch wenigstens alle $r-s$-reihigen Determinanten aus den Coefficienten des Systems (17) verschwinden, d. h. die $h^{(i)}$ dürfen nur von höchstens $r-s-1$ Combinationen der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ homogen abhängen, und von den Gleichungen (17) bleiben nur $r-s-1$ von einander unabhängig. Sollen sodann die ξ nur ein Gebiet von μ Dimensionen bilden, so müssen weiterhin $r-s-\mu-2$ Relationen zwischen den $h^{(i)}(x)$ beliebig angenommen werden können, also muss sein

$$\mu \leqq r-s-2.$$

Alsdann hängen die Functionen $h^{(i)}(x)$ wieder von $\mu+1$ Combinationen

$$A_1, A_2, \cdots A_{\mu+1}$$

der Grössen $x_1, x_2, \cdots x_s$ homogen ab; und es sind nur $\mu + 1$ der Gleichungen des Systems (17) linear von einander unabhängig.

Die $\mu + 1$ linear von einander unabhängigen Gleichungen des Systems (17) bilden nun $\left(\text{für } s < \frac{r}{2} \text{ oder } \geqq \frac{r}{2}\right)$, da die Coefficienten des Systems wie Constanten eingehen, ein *vollständiges* System linearer partieller Differentialgleichungen. Um dasselbe zu integriren, braucht man nur

$$r - s - \mu - 1$$

von einander unabhängige Lösungen für f zu kennen, aus denen sich dann durch Zusammensetzung mit den Lösungen

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

die allgemeinste Lösung für f ergiebt. Jene Lösungen sind aber direct anzugeben.

Seien mit

$$P_{i,k}$$

irgend welche Functionen der Grössen

$$x_1, x_2, \cdots x_s$$

oder Constanten bezeichnet, und sei

$$Q = \begin{vmatrix} x_{s+1} & x_{s+2} & \cdots & x_r \\ h^{(s+1)}_{A_1} & h^{(s+2)}_{A_1} & \cdots & h^{(r)}_{A_1} \\ h^{(s+1)}_{A_2} & h^{(s+2)}_{A_2} & \cdots & h^{(r)}_{A_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h^{(s+1)}_{A_{\mu+1}} & h^{(s+2)}_{A_{\mu+1}} & \cdots & h^{(r)}_{A_{\mu+1}} \\ P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,r-s} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,r-s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{r-s-\mu-2,1} & P_{r-s-\mu-2,2} & \cdots & P_{r-s-\mu-2,r-s} \end{vmatrix},$$

in welchem Ausdruck für $r - s - \mu - 2 = 0$ keine Reihen $P_{i,k}$ auftreten sollen und wo wieder die $h^{(i)}$ als Functionen der A_k aufgefasst sind und

$$\frac{\partial h^{(i)}}{\partial A_k} = h^{(i)}_{A_k}$$

gesetzt ist.

Diese Grösse Q ist nun eine Lösung des Systems (17).

Seien also weiter

$$Q_1, Q_2, \cdots Q_{r-s-\mu-1}$$

$r - s - \mu - 1$ verschiedene Grössen, die aus Q dadurch hervorgehen sollen, dass man für die $P_{i,k}$ verschiedene Functions- oder Werthsysteme annimmt. *Die allgemeinste Lösung des Systems* (17) *ist dann*

(18) $$f = \varphi(Q_1, Q_2, \cdots Q_{r-s-\mu-1}, \; x_1, x_2, \cdots x_s)$$
wo φ eine *beliebige* Function der angegebenen Argumente darstellt.

Wählt man insbesondere die $P_{i,k}$ als Constanten, oder als solche Functionen von $x_1, \cdots x_s$, dass die in den Q_i auftretenden Determinanten der $P_{i,k}$ keinen Factor gemein haben, so müssen, damit f eine *ganze* Function der Variabeln wird, auch die Q_i und die Function φ als *ganze* Functionen genommen werden.

§ 7.

Ternäre und quaternäre Formen. Specielle Fälle.

Wir behandeln im Folgenden noch einige specielle Fälle, als Anwendung des Vorhergehenden.

a) Die *ternären* Formen f lassen sich schon durch die Gleichung (9″) des § 2. direct erledigen. Denn wenn die Grössen
$$\xi_i = h^{(i)}(x)$$
hier noch Functionen der Variabeln x wären, so würde ihr Gebiet nur ein einfach unendliches sein können, und nach (9″) würden die Functionen $h^{(i)}(x)$ einen *Factor* gemein haben müssen, gegen die Annahme in § 1. Daher ist die Relation (3) zwischen den Polaren f_i eine *lineare* mit constanten Coefficienten, was der von Hesse ausgesprochene Satz ist. Verschwinden insbesondere auch alle ersten Unterdeterminanten von Δ_f, so existiren zwei lineare Relationen (3), und f wird die Potenz einer linearen Form.

b) Die *quaternären* Formen f sind durch die Entwicklungen der §§ 2—5. ebenfalls vollständig erledigt. Sollen hier nämlich die ξ Functionen der Variabeln x sein, so kann ihr Werthgebiet nur ein *einfach* unendliches sein. Denn wäre dasselbe ein zweifach unendliches, so würden wegen
$$h^{(i)}(\xi) = 0$$
die Functionen $h^{(i)}$ einen Factor gemein haben müssen, was gegen die Annahme des § 1. ist.

Aber für diesen Fall, dass die ξ *eine* Dimension bilden, liefert § 5. *alle* Lösungen f. Man hat dann in (16) $r=4$, also $s=r-2=2$ zu setzen und erhält eine Relation zwischen f_3 und f_4 allein, die, wie schon dort erwähnt, als binäre *linear* sein muss. Auch für die *quaternären* Formen gilt also der Satz Hesse's immer.

Da unser Beweisgang auch bei dem Verschwinden von Unterdeterminanten der Hesse'schen Determinante Δ_f von f unverändert bestehen bleibt, so können wir weiter schliessen, dass *eine, zwei* oder *drei* von einander unabhängige lineare Relationen zwischen den Polaren von f existiren werden, je nachdem nur Δ_f oder auch sämmtliche erste, oder endlich auch sämmtliche zweite Unterdeterminanten von Δ_f identisch verschwinden; dass sich also unter diesen verschiedenen Bedingungen die Form f durch lineare Transformation auf eine solche von bezügl. 3, 2 oder 1 Variabeln reduciren lässt.

c) Wir erwähnen noch der einfacheren Form, in welche man die Lösungen (18) in einem speciellen Falle, insbesondere für $s=r-\mu+2$, $s<\frac{r}{2}$ setzen kann.

Seien die Grössen

$$P_1,\ P_2,\ \cdots\ P_{r-s}$$

beliebige ganze homogene Functionen gleicher Ordnung von

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_s,$$

und sei

$$Q=x_{s+1}P_1+x_{s+2}P_2+\cdots+x_rP_{r-s}.$$

Eine allen Bedingungen genügende Function f ist dann

$$f=\varphi(Q,x_1,x_2,\cdots x_s),$$

wo φ eine beliebige ganze Function von Q, x_1, x_2, $\cdots$ x_s ist, nur der Art, dass dieselbe homogen wird in den Variabeln

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_r.$$

Denn zwischen den Polaren

$$f_{s+1},\ f_{s+2},\ \cdots\ f_r,$$

die bezüglich mit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\cdot P_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial Q}P_2,\ \cdots\ \frac{\partial\varphi}{\partial Q}P_r$$

übereinstimmen, werden, da $r-s>s$ ist, $r-2s$ von allen Variabeln unabhängige identische Relationen stattfinden, die im Allgemeinen nicht linear sein werden.

Dieser Fall erschöpft insbesondere alle *quinären* Formen, bei denen das Werthgebiet der ξ ein einfach unendliches sein soll, indem man $r=5$, $s=2$ setzt.

§ 8.

Quinäre Formen.

In § 7. c) haben wir alle quinären Formen f angegeben, welche auf ein *einfach* unendliches Werthgebiet der ξ führen. Für die quinären Formen wäre nur noch der Fall eines *zweifach* unendlichen Werthgebiets der ξ möglich. Wir erledigen nun diesen Fall, indem wir nachweisen werden, dass keine Formen f solcher Art existiren. Dabei werden indess noch einige, in dem Vorhergehenden nicht enthaltene Betrachtungen nothwendig.

Sei in § 3.:

$$r=5,\quad \mu=2.$$

Das zu irgend einem ξ' des zweifach unendlichen ξ-Gebiets gehörige

$\varphi^{(\xi)}$-Gebilde hat hier zwei Dimensionen und besteht aus einfach unendlich vielen Werthreihen $(x'\xi')$. Jedes dieser $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde enthält (nach § 4.) im Allgemeinen eine endliche Zahl von Werthreihen $(y\xi')$, welche alle Fundamentalwerthsysteme des x-Gebietes umfassen. Und da diese Werthsysteme y auch nur ein Gebiet von 2 Dimensionen bilden können, so wird hier das irreducible ξ-Gebiet jedenfalls ein *endlicher* Theil des y-Gebiets und *besteht also ebenfalls* nur, wie jenes, *aus Werthreihen der Form* $(\xi'\xi'')$. Es giebt wenigstens einfach unendlich viele solcher Werthreihen, die wir mit $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$, $\cdots$ bezeichnen wollen. Man sieht sogar, dass die zu *allgemeinen* Werthsystemen α, α', α'' $\cdots$ der bel. Werthreihe $(\alpha\alpha')$ gehörigen Fundamentalreihen

$$(\alpha y),\ (\alpha' y'),\ (\alpha'' y'')\cdots$$

kein von dem ξ-Gebiet verschiedenes y-Gebiet bilden können; denn dasselbe würde für unendlich viele andere Werthreihen

$$(\beta\beta'),\ (\gamma\gamma')\cdots$$

ebenso gelten und das entstehende y-Gebiet würde mit dem irreducibeln ξ-Gebiet alle zweifach unendlich vielen Werthsysteme desselben gemein haben.

Wir werden nun zunächst nachweisen, dass zwischen den Functionen $\xi_i = h^{(i)}(x)$ entweder wenigstens *eine lineare* Relation besteht, oder dass der Satz Hesse's gilt.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Gesammtheit der $\varphi^{(\xi)}$-Gebilde, welche zu irgend einer Werthreihe des ξ-Gebiets, etwa zu

$$(\alpha\alpha'),$$

gehören. Diese liefern zusammengenommen ein Gebilde, das durch *eine* Gleichung dargestellt werden kann:

$$\mathsf{A} = 0,$$

wo A eine Function Φ ist (siehe § 4.). Wenn $\Sigma a_i\xi_i = 0$ eine Gleichung ist, welche durch alle Werthsysteme der Reihe $(\alpha\alpha')$ befriedigt wird, so ist A ein Factor von $\Sigma a_i h^{(i)}(x)$.

Das Gebiet $\mathsf{A} = 0$ muss also sämmtliche Werthsysteme des ξ-Gebiets enthalten. Wenn nun ein von $(\alpha\alpha')$ verschiedenes Werthsystem β desselben zum $\varphi^{(\alpha)}$-Gebilde gehört, so ist auch die ganze Werthreihe $(\alpha\beta)$ unter den Fundamentalwerthen y enthalten. Es ergeben sich hier nur zwei mögliche Fälle:

a) entweder hat man von jedem Werthsystem α, α', α'' $\cdots$ aus ausser der Werthreihe $(\alpha\alpha')$ noch wenigstens je eine weitere Werthreihe, bez.

$$(\alpha\beta),\ (\alpha'\beta'),\ (\alpha''\beta''),\ \cdots,$$

welche sämmtlich dem ξ-Gebiet angehören müssen, oder

b) man hat von wenigstens *einem* Werth α der Werthreihe $(\alpha\alpha')$ aus einfach unendlich viele Werthreihen

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\beta_1),\ (\alpha\beta_2),\ \cdots,$$

welche dem ξ-Gebiet angehören.

Wir haben diese beiden Fälle besonders zu behandeln.

Fall a)

Im Falle a) haben *sämmtliche* Werthsysteme ξ, da ja die Werthreihe $(\alpha\alpha')$ irgend eine des ξ-Gebiets war, die Eigenschaft, dass von ihm wenigstens zwei Werthreihen $(\xi\xi')$ und $(\xi\xi'')$ ausgehen.

Nehmen wir die allgemein gewählte Reihe $(\alpha\alpha')$ heraus. Die sämmtlichen übrigen Reihen

$$(\beta\beta'),\ (\gamma\gamma'),\ \cdots$$

haben entweder *alle* je ein Werthsystem mit $(\alpha\alpha')$ gemein, oder nicht.

Im ersten Falle wird eine Werthreihe $(\gamma\gamma')$ ebensowohl ein Werthsystem mit der Reihe $(\beta\beta')$, als mit der $(\alpha\alpha')$, gemein haben, sie ist daher von der Form

$$(\alpha+\lambda\alpha')+\varrho(\beta+\mu\beta'),$$

und da auch β' schon linear von α, α', β abhängt, so sind sämmtliche Werthsysteme des ξ-Gebiets in der Form

$$\alpha+\lambda\alpha'+\varrho\beta$$

enthalten.

Wenn zweitens $(\alpha\alpha')$ und $(\beta\beta')$ kein Werthsystem gemein haben, so bilde man alle zu den verschiedenen α, α', α'', $\cdots$ von $(\alpha\alpha')$ gehörigen Reihen

$$(\alpha\gamma),\ (\alpha'\gamma'),\ (\alpha''\gamma'')$$

des ξ-Gebiets. Diese müssen zusammen auch die Reihe $(\beta\beta')$ enthalten; es muss also unendlich viele derselben geben, welche je einen Werth dieser $(\beta\beta')$-Reihe enthalten, und da diese zusammen schon ein irreducibles zweifach unendliches Gebilde darstellen, so ergiebt sich so schon das ganze ξ-Gebiet. Irgend ein Werth γ'' dieses Gebiets ist folglich in der Form

$$\alpha''+\varrho\beta'',$$

d. h.

$$(\alpha+\lambda\alpha')+\varrho(\beta+\mu\beta')$$

enthalten.

Hieraus folgt aber, da die ξ linear und homogen von höchstens vier Parametern abhängen, dass im Falle a) zwischen den Functionen $\xi_i = h^{(i)}(x)$ wenigstens *eine* lineare Relation besteht. Wir wollen nun nachweisen, dass für solche Functionen $h^{(i)}$, welche zu unserm f-Problem gehören, diese eine Relation noch eine zweite lineare mit sich führt.

Sei die hier gefundene lineare Relation bezeichnet mit

$$h^{(1)}(x) = 0.$$

Wir entwickeln dann f nach Potenzen von x_1:

$$f = x_1^\mu A + x_1^{\mu+1} B,$$

wo A eine homogene Function der Variabeln x_2, x_3, x_4, x_5 allein ist.

Nun hat man zwischen f_2, f_3, f_4, f_5 eine identische Relation

$$\Pi(f_2, \cdots f_5) = 0,$$

von der wir, wenn der Hesse'sche Satz nicht gültig sein soll, annehmen müssen, dass sie *nicht linear* ist.

Als identische Relation gilt dieselbe auch für die Glieder niedrigster Ordnung in x_1, also, wenn man $\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_i$ setzt:

$$\Pi(A_2, A_3, A_4, A_5) = 0,$$

d. h. A ist eine quaternäre Form mit verschwindender Hesse'scher Determinante. Aber jede Relation, welche in diesem Falle zwischen den Polaren von A besteht, muss nach § 7. b) auf *lineare* zurückführbar sein. Da nun $\Pi(A_2, \cdots A_5) = 0$ an sich keine solche und der Ausdruck Π auch nicht reducibel ist, so muss es nothwendig wenigstens *zwei* lineare Relationen zwischen den A_i geben, mit deren Hülfe Π identisch erfüllt wird. Daher ist A entweder eine *binäre* Form oder die *Potenz* eines linearen Ausdrucks in x_2, x_3, x_4, x_5, und besteht in beiden Fällen nur aus *linearen* Factoren.

Der Ausdruck

$$\frac{f}{x_1^\mu} = A + x_1 B$$

ist, als Factor von f, eine Function Φ (§ 2.), man hat also:

$$A(\xi) + \xi_1 B(\xi) = 0,$$

und wegen $\xi_1 = 0$:

$$A(\xi) = 0.$$

Es verschwindet daher einer der linearen Factoren von $A(\xi)$, was eine weitere in den Grössen ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 *lineare Relation* liefert. Wir wollen dieselbe mit $\xi_2 = 0$ bezeichnen.

Sei also jetzt

$$h^{(1)}(x) = 0, \quad h^{(2)}(x) = 0,$$

Das System (15) des § 6. liefert dann die 5 Gleichungen:

$$f_3 h_k^{(3)} + f_4 h_k^{(4)} + f_5 h_k^{(5)} = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots 5),$$

aus welchen entweder

$$f_3 = 0, \quad f_4 = 0, \quad f_5 = 0,$$

also der Hesse'sche Satz, folgt, oder das Verschwinden sämmtlicher dreireihiger Determinanten aus den Differentialquotienten der $h^{(3)}$, $h^{(4)}$,

$h^{(5)}$. Dieses letztere sagt aus, dass zwischen den Functionen $h^{(i)}$ noch eine weitere, von allen Variabeln unabhängige identische Relation existirt, dass also das Werthgebiet der ξ kein *zweifach* unendliches sein kann.

Damit ist der Fall a) als nicht existirend erwiesen.

Fall b)

Das ξ-Gebiet enthält hier die einfach unendlich vielen Werthreihen

$$(\alpha\beta),\ (\alpha\beta_1),\ (\alpha\beta_2),\ \cdots,$$

welche alle dasselbe Werthsystem α enthalten, und besteht als irreducibles auch nur aus denselben.

Sei

$$\xi = \lambda\alpha + \beta.$$

Die Gleichung

$$f_\xi \equiv \lambda f_\alpha + f_\beta = 0$$

gilt, wenn ξ gegeben ist, für die ∞^2 Werthsysteme x des zu ξ gehörigen $\varphi^{(\xi)}$-Gebildes. Für dieselben gilt dann auch die durch Differentiation nach λ daraus entstehende Gleichung

$$f_{1\xi}\frac{dx_1}{d\lambda} + f_{2\xi}\frac{dx_2}{d\lambda} + \cdots f_{5\xi}\frac{dx_5}{d\lambda} + f_\alpha = 0,$$

und da auch für dieselben Werthsysteme

$$f_{i\xi} = 0$$

ist, so hat man auch für alle x des $\varphi^{(\xi)}$-Gebildes identisch:

$$f_\alpha = 0.$$

Nun war hier β, also auch ξ, irgend ein Werthsystem des ξ-Gebiets. Daher ist die Gleichung

$$f_\alpha = 0,$$

in welcher α constant ist, identisch für *alle* Werthsysteme x überhaupt, was aber der Hesse'sche Satz ist.

Erlangen, im Mai 1876.