Singuläre Systeme linearer Volterrascher Integralgleichungen.

Von

J. Horn in Darmstadt.

Die Methode, die ich in den beiden Abhandlungen „Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen“ (Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 309—329 und 25 (1916), S. 74—83) und „Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen“ (Jahresber. 25 (1916), S. 301—325) auf ein System linearer Differentialgleichungen mit Unbestimmtheitsstelle angewandt habe, läßt sich nach geeigneter Umgestaltung auf ein singuläres System linearer Volterrascher Integralgleichungen übertragen.

Es seien die Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ aus den Integralgleichungen

$$\int_0^x \sum_{\beta=1}^m H_{\alpha\beta}(x, y)\, \varphi_\beta(y)\, dy = f_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

zu bestimmen. Die analytischen Funktionen $H_{\alpha\beta}(x, y)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ seien an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ regulär und die Determinante $|H_{\alpha\beta}(x, x)|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ verschwinde für $x = 0$, ohne identisch zu verschwinden; die analytischen Funktionen $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ seien an der Stelle $x = 0$ regulär. Durch Differentiation der vorgelegten Integralgleichungen erhält man die Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^m H_{\alpha\beta}(x, x)\, \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial H_{\alpha\beta}(x, y)}{\partial x}\, \varphi_\beta(y)\, dy = f_\alpha'(x) \quad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

denen wir die Form geben:

$$x^{k+1} \varphi_\alpha(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^m K_{\alpha\beta}(x, y)\, \varphi_\beta(y)\, dy = g_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

wir verstehen unter k eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ und setzen $K_{\alpha\beta}(x, y)$ in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$, $g_\alpha(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ regulär voraus. Durch nochmalige Differentiation ergeben sich unter Anwendung der Bezeichnung

$$-P_{\alpha\beta}(x) = K_{\alpha\beta}(x, x) + \delta_{\alpha\beta}(k+1)x^k, \quad -Q_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\partial K_{\alpha\beta}(x, y)}{\partial x},$$
$$R_\alpha(x) = g'_\alpha(x)$$

die Integraldifferentialgleichungen

$$(\mathrm{A}^*) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\varphi_\beta(y)\,dy + R_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Die Funktionen

$$P_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} x^\lambda, \quad Q_{\alpha\beta}(x, y) = \sum_{\lambda, \mu = 0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^\mu,$$
$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda$$

sind in der Umgebung von $x = 0$ bzw. $x = 0$, $y = 0$ regulär. Die Wurzeln $a_1, \ldots, a_m$ der Gleichung $|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\,\delta_{\alpha\beta}| = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ werden, soweit nichts anderes angegeben ist, voneinander und *von Null verschieden* vorausgesetzt. Durch eine lineare Transformation von $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sei erreicht, daß $a_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_\alpha$, $a_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ $(\alpha \gtrless \beta)$ ist.

Aus den homogenen Integralgleichungen

$$\int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} H_{\alpha\beta}(x, y)\varphi_\beta(y)\,dy = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

gehen die homogenen Integraldifferentialgleichungen

$$(\mathrm{A}) \qquad x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\varphi_\beta(y)\,dy \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

hervor, mit denen wir uns vorzugsweise beschäftigen. Wenn die Funktionen $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ identisch verschwinden, haben wir das System linearer Differentialgleichungen

$$x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

welches unter der Voraussetzung $k > 0$ in den beiden oben angeführten Arbeiten vermittels der Laplaceschen Transformation behandelt ist; es hat $x=0$ als Unbestimmtheitsstelle vom Rang k, während dort $x=\infty$ die singuläre Stelle war[1]).

Im zweiten Teil der Arbeit „Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen" (Journ. f. Math. 146 (1915), S. 95—115) ist die Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

mit dem in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ regulären Kern

$$H(x,y)=\sum_{\lambda,\mu=0}^{\infty} a_{\lambda\mu}\,x^\lambda y^\mu$$

unter der Annahme, daß $a_{00}=0$, $a_{10}+a_{01}=0$, $a_{10}\neq 0$, $a_{20}+a_{11}+a_{02}\neq 0$[2]) ist, daß $f(x)$ in der Umgebung von $x=0$ regulär und $f(0)=0$, $f'(0)=0$ ist, auf die Form

$$x^2\frac{d\varphi(x)}{dx}+(1-ax)\varphi(x)=\int_0^x F(x,y)\varphi(y)\,dy+G(x)$$

gebracht worden, wo $F(x,y)$ und $G(x)$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ bzw. $x=0$ regulär sind. Nachdem a. a. O. eine partikuläre Lösung dieser Gleichung als Laplacesches Integral dargestellt worden ist, bleibt noch die homogene Integralgleichung

$$\int_0^x H(x,y)\varphi(y)\,dy = 0$$

oder die daraus hergeleitete Gleichung

$$x^2\frac{d\varphi(x)}{dx}+(1-ax)\varphi(x)=\int_0^x F(x,y)\varphi(y)\,dy$$

durch ein Laplacesches Integral zu lösen. Wir behandeln hier eine all-

---

[1]) Den Fall $k=0$, in welchem $x=0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit des Differentialgleichungssystems ist, habe ich ohne einschränkende Voraussetzungen über die Wurzeln der Gleichung $|a_{\alpha\beta}^{(0)}-s\,\delta_{\alpha\beta}|=0$ unter Benutzung der Elementarteiler der Determinante $|a_{\alpha\beta}^{(0)}-s\,\delta_{\alpha\beta}|$ in den Math. Ann. 39 (1891), S. 391 behandelt.

[2]) Im ersten Teil der Abhandlung „Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen" (Journ. f. Math. 140 (1911), S. 120—158) ist die obige Integralgleichung unter der Annahme $a_{00}=0$, $a_{10}+a_{01}=0$, $a_{10}\neq 0$ vermittels einer Methode aufeinanderfolgender Näherungen behandelt. Den Fall $a_{\lambda\mu}=0$ $(\lambda+\mu<m)$, $a_{m0}+a_{m-1,1}+\dots+a_{0m}\neq 0$, wo $m\geq 1$ ist, haben schon Volterra, Holmgrén und Lalesco betrachtet (vgl. die Zitate im Journ. f. Math. 140 (1911), S. 120); ihm entspricht in der Theorie der linearen Differentialgleichungen die von L. Fuchs u. a. behandelte singuläre Stelle der Bestimmtheit.

gemeinere Aufgabe. Auf die Entwicklung der Laplaceschen Integrale in konvergente Fakultätenreihen gehen wir hier nicht ein.

Im I. Abschnitt betrachten wir das System homogener Gleichungen (A) für den Fall $k=1$ (§§ 1—4); wir kommen im II. Abschnitt auf die obenerwähnten Untersuchungen über Systeme linearer Differentialgleichungen zurück, die wir in verschiedenen Richtungen abändern (§§ 5—6), um im III. Abschnitt ihre Ausdehnung auf das System homogener Gleichungen (A) für $k>1$ vornehmen zu können (§§ 7—8). Sodann wird im IV. Abschnitt die noch erforderliche partikuläre Lösung eines Systems nichthomogener Gleichungen (A^*) für beliebiges $k>0$ ermittelt (§ 9). Im V. Abschnitt werden Systeme homogener und nichthomogener Gleichungen (A) und (A^*) mit $k=0$ kurz berührt (§ 10).

I. Homogene Gleichungen, $k=1$.

§ 1.

Indem wir zunächst den Fall $k=1$ behandeln, betrachten wir die Gleichungen

$$(A_1) \qquad x^2\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx}=\sum_{\beta=1}^{m}P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x)+\int_0^x\sum_{\beta=1}^{m}Q_{\alpha\beta}(x,y)\varphi_\beta(y)\,dy \qquad (\alpha=1,\ldots,m),$$

welche durch Reihen von der Form

$$\varphi_\alpha(x)=e^{-\frac{a}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}A_{\alpha n}x^{r+n} \qquad (\alpha=1,\ldots,m),$$

wo a eine der voneinander und von 0 verschiedenen Zahlen $a_1,\ldots,a_m$ ist, formal befriedigt werden. Es sei z. B. $a=a_1$. Zur Berechnung der zugehörigen Reihen führen wir die Gleichungen (A_1) durch die Substitution

$$\varphi_\alpha(x)=e^{-\frac{a_1}{x}}\Phi_\alpha(x)$$

über in

$$x^2\frac{d\Phi_\alpha(x)}{dx}=\sum_{\beta=1}^{m}(P_{\alpha\beta}(x)-a_1\delta_{\alpha\beta})\Phi_\beta(x)+\int_0^x\sum_{\beta=1}^{m}Q_{\alpha\beta}(x,y)e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}}\Phi_\beta(y)\,dy,$$

setzen $\Phi_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{\alpha n}x^{r+n}$ und vergleichen die Koeffizienten von x^{r+n} ($n=0,1,2,\ldots$). Wir stoßen hierbei auf Integrale

$$J_\mu=\int_0^x y^{r+\mu}e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}}\,dy \qquad (\mu=0,1,2,\ldots),$$

die konvergent sind, wenn der Integrationsweg den Nullpunkt innerhalb der Halbebene $\left|\arg y - \arg a_1\right| < \frac{\pi}{2}$ verläßt; denn wenn y längs eines solchen Weges nach 0 geht, ist

$$\lim\left|e^{-\frac{a_1}{y}}\right| = \lim e^{-\frac{|a_1|}{|y|}\cos(\arg a_1 - \arg y)} = 0.$$

Durch partielle Integration erhält man die Rekursionsformel

$$J_\mu = \frac{1}{a_1}x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1}J_{\mu+2},$$

deren wiederholte Anwendung zu der formalen Reihenentwicklung

$$J_\mu = \frac{1}{a_1}x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1^2}x^{r+\mu+3} + \frac{(r+\mu+2)(r+\mu+3)}{a_1^3}x^{r+\mu+4} - \ldots$$

führt, die wir an die Stelle des Integrals setzen. Durch Vergleichung der Koeffizienten von x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, ... erhält man die Gleichungen

$$0 = (a_\alpha - a_1)A_{\alpha 0},$$

$$r A_{\alpha 0} = (a_\alpha - a_1)A_{\alpha 1} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 0},$$

$$(r+1)A_{\alpha 1} = (a_\alpha - a_1)A_{\alpha 2} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + \sum_\beta a_{\alpha\beta}^{(2)} A_{\beta 0} + \frac{1}{a_1}\sum_\beta b_{\alpha\beta}^{(0,0)} A_{\beta 0},$$

. . . .

Da $a_2, \ldots, a_m$ von a_1 verschieden sind, ergibt das erste Gleichungssystem $A_{\alpha 0} = 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$, während A_{10} beliebig ist; das zweite System ergibt

$$r = a_{11}^{(1)}, \quad A_{\alpha 1} = -\frac{a_{\alpha 1}^{(1)}}{a_\alpha - a_1}A_{10} \qquad (\alpha = 2, \ldots, m);$$

aus der ersten Gleichung des dritten Systems folgt

$$A_{11} = \sum_{\beta=2}^{m} a_{1\beta}^{(1)} A_{\beta 1} + a_{11}^{(2)} A_{10} + \frac{1}{a_1} b_{11}^{(0,0)} A_{10},$$

während man aus den übrigen Gleichungen dieses Systems $A_{\alpha 2}$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ berechnet. Man berechnet $A_{1,j-1}$ aus der ersten Gleichung des $(j+1)$-ten Systems, d. h. durch Vergleichung der Koeffizienten von x^{r+j}, $A_{\alpha,j-1}$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ aus der α-ten Gleichung des j-ten Systems, also durch Vergleichung der Koeffizienten von x^{r+j-1}. Wenn man also in den Gleichungen für $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ die Funktion Φ_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ durch $A_{\alpha 0}x^r + A_{\alpha 1}x^{r+1} + \ldots + A_{\alpha,j-1}x^{r+j-1}$ ersetzt, bleiben in der ersten dieser Gleichungen nur die Potenzen x^{r+j+1}, x^{r+j+2}, ... stehen, in den übrigen Gleichungen außerdem x^{r+j}.

Wir nehmen die ganze positive Zahl j so groß an, daß $\bar{r} + j > 0$ ist, wo $\bar{r}$ der reelle Teil von r ist, und setzen, wenn $j > 0$ ist,

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a_1}{x}}(A_{\alpha 0}x^r + A_{\alpha 1}x^{r+1} + \ldots + A_{\alpha, j-1}x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x))$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m).$$

Durch die Substitution $\Phi_\alpha(x) = \sum_{p=0}^{j-1} A_{\alpha p} x^{r+p} + \psi_\alpha(x)$ gehen die Gleichungen für die $\Phi_\alpha(x)$ über in

$$x^2 \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m}(P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta})\psi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\, e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \psi_\beta(y)\, dy + \Omega'_\alpha + \Omega''_\alpha,$$

$$\Omega'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m}(P_{\alpha\beta}(x) - a_1\delta_{\alpha\beta})\sum_{p=0}^{j-1} A_{\beta p} x^{r+p} - \sum_{p=0}^{j-1}(r+p) A_{\alpha p} x^{r+p+1},$$

$$\Omega''_\alpha = \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\, e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \sum_{p=0}^{j-1} A_{\beta p} y^{r+p}\, dy = \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{j-1} b_{\alpha\beta}^{(\lambda, \mu)} A_{\beta p} x^\lambda J_{\mu+p}.$$

Vermittels der für $\mu < j-1$ gültigen Formel

$$J_\mu = \frac{1}{a_1}x^{r+\mu+2} - \frac{r+\mu+2}{a_1^2}x^{r+\mu+3} + \ldots + (-1)^{j-\mu-2}\frac{(r+\mu+2)\ldots(r+j-1)}{a_1^{j-\mu-1}}x^{r+j}$$
$$+ (-1)^{j-\mu-1}\frac{(r+\mu+2)\ldots(r+j)}{a_1^{j-\mu-1}} J_{j-1}$$

drücken wir $J_{\mu+p}$ $(\mu + p < j-1)$ durch $x^{r+p+\mu+2}, \ldots, x^{r+j}, J_{j-1}$ aus. Dann erscheint Ω''_α als Summe von Gliedern Konst. $x^{r+\iota+2}$ $(\iota = 0, 1, 2, \ldots)$ und Konst. $x^\lambda J_{j+\varkappa-1}$ $(\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$. (Da die formale Reihenentwicklung von J_{j-1} mit x^{r+j+1} beginnt, werden die Glieder mit $x^{r+2}, \ldots, x^{r+j}$ nicht geändert, wenn man J_{j-1} durch J_j, dann J_j durch J_{j+1} usw. ersetzt.) Oder anders ausgedrückt, Ω''_α besteht aus

$$\int_0^x S_\alpha(x, y)\, e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}}\, dy,$$

wo

$$S_\alpha(x, y) = \sum_{\lambda, \mu = 0}^{\infty} d_\alpha^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^{r+j+\mu-1}$$

in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ konvergent ist, und aus einer mit x^{r+2} multiplizierten Potenzreihe von x. Man hat demnach

$$\Omega'_\alpha + \Omega''_\alpha = R_\alpha(x) + \int_0^x S_\alpha(x, y)\, e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}}\, dy$$

unter Einführung der in der Umgebung von $x = 0$ konvergenten Reihe

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^{r+j+\lambda}, \quad c_1^{(0)} = 0;$$

die Glieder mit x^r, x^{r+1}, $\ldots$, x^{r+j-1} und für $\alpha = 1$ das Glied mit x^{r+j} fallen auf Grund der Berechnung von r, $A_{\alpha 0}, \ldots, A_{\alpha, j-1}$ fort. Es gelten also die Gleichungen

$$(\mathrm{B}_1) \qquad x^2 \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} (P_{\alpha\beta}(x) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} \psi_\beta(y)\, dy$$
$$+ R_\alpha(x) + \int_0^x S_\alpha(x, y) e^{\frac{a_1}{x} - \frac{a_1}{y}} dy \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Wir führen die für alle t konvergenten Reihen ein:

$$F_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \qquad G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} \frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)!},$$
$$M_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} \frac{t^{r+j+\lambda-1}}{\Gamma(r+j+\lambda)}, \qquad N_\alpha^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\alpha^{(\lambda,\mu)} \frac{t^{r+j+\mu}}{\Gamma(r+j+\mu+1)}.$$

Die Laplacesche Transformation

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

führt, wenn man zunächst formal rechnet[3]), auf das System linearer Integralgleichungen

$$(\mathrm{C}_1) \qquad (t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t F_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau)\, d\tau + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)}(t-\tau)}{t+a_1} w_\beta(\tau)\, d\tau$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\mathfrak{t}+a_1} d\mathfrak{t} \int_0^{\mathfrak{t}} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\mathfrak{t}-\tau) w_\beta(\tau)\, d\tau + M_\alpha(t) + \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1}$$
$$+ \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1} d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Durch Vertauschung der Integrationen nach τ und $\mathfrak{t}$ erhält man

$$\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\mathfrak{t}+a_1} \int_0^{\mathfrak{t}} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\mathfrak{t}-\tau) w_\beta(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_0^t w_\beta(\tau)\, d\tau \int_\tau^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\mathfrak{t}+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\mathfrak{t}-\tau)\, d\mathfrak{t}.$$

[3]) Vgl. den Übergang von (C_1) zu (B_1) in § 4.

Die Integralgleichungen (C_1) schreiben sich demnach:

$$(D_1) \qquad (t - a_\alpha + a_1) w_\alpha(t)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t \left\{ F_{\alpha\beta}(t-\tau) + \frac{G_{\alpha\beta}^{(0)}(t-\tau)}{t+a_1} + \int_\tau^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau)\,dt \right\} w_\beta(\tau)\,d\tau$$

$$+ M_\alpha(t) + \frac{N_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1} + \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Wenn wir diese Gleichungen in der Form

$$(e) \qquad \begin{cases} t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau)\,d\tau + f_1(t), \\ w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau)\,d\tau + f_\alpha(t) \qquad (\alpha = 2, \ldots, m) \end{cases}$$

schreiben, sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \rho = 1, \ldots, m)$ regulär, wenn man von den Punkten $-a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ absieht; es ist

$$f_{11}(0,0) = F_{11}(0,0) = a_{11}^{(0)} = r.$$

Wenn man

$$f_\alpha(t) = t^{r+j-1} h_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

setzt, sind auch die Funktionen $h_\alpha(t)$ abgesehen von $-a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ im Endlichen regulär; es ist $h_1(0) = 0$.

Im Falle $j = 0$ setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a_1}{x}} \psi_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

die Funktionen $R_\alpha(x)$, $S_\alpha(x, y)$, $M_\alpha(t)$, $N_\alpha^{(\lambda)}(t)$, $f_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots m)$ verschwinden jetzt identisch

§ 2.

Wir betrachten das System linearer Integralgleichungen (e). Der einfach zusammenhängende abgeschlossene Bereich $\mathfrak{R}$ enthalte den Punkt $t = 0$; jeder Punkt t von $\mathfrak{R}$ könne mit $t = 0$ durch einen in $\mathfrak{R}$ verlaufenden Weg l verbunden werden, dessen Länge $\int_0^t |d\tau| = T$ unter einer endlichen Schranke $\mathfrak{l}$ liegt. Die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ und $t^{-s+1} f_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, wo s statt $r + j$ geschrieben ist, seien regulär, wenn t und τ dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehören. Der die Punkte 0 und t verbindende Integrationsweg kann irgendwie in $\mathfrak{R}$ verlaufen; er wird nötigenfalls durch einen äquivalenten Weg l ersetzt, dessen Länge kleiner als $\mathfrak{l}$ ist. Wir knüpfen an Jahresber.

d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213—216 an und benutzen die dortigen Bezeichnungen. Es ist stets $\mathfrak{k}T \leqq |t| \leqq T$, wo $0 < \mathfrak{k} \leqq 1$ ist, und

$$|t^{r-1}| \leqq \varkappa T^{\bar{r}-1}, \qquad |t^{-r}| \leqq \varkappa' T^{-\bar{r}},$$

wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ endliche positive Konstante sind[4]).

Durch Auflösung der $m-1$ letzten Gleichungen (e) nach $w_2(t), \ldots, w_m(t)$ erhält man

$$w_\alpha(t) = \int_0^t F_\alpha(t, \tau) w_1(\tau)\, d\tau + E_\alpha(t) \qquad (\alpha = 2, \ldots, m);$$

dabei ist für $\alpha = 2, \ldots, m$

$$E_\alpha(t) = f_\alpha(t) + \sum_{\beta=2}^{m} \int_0^t S_{\alpha\beta}(t, z) f_\beta(z)\, dz,$$

$$F_\alpha(t, \tau) = f_{\alpha 1}(t, \tau) + \sum_{\beta=2}^{m} \int_\tau^t S_{\alpha\beta}(t, z) f_{\beta 1}(z)\, dz.$$

Durch Einsetzung in die erste Gleichung (e) ergibt sich

$$t w_1(t) = \int_0^t F(t, \tau) w_1(\tau)\, d\tau + E(t);$$

dabei ist

$$E(t) = f_1(t) + \sum_{\beta=2}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t, \mathrm{t}) E_\beta(\mathrm{t})\, d\mathrm{t},$$

$$F(t, \tau) = f_{11}(t, \tau) + \sum_{\beta=2}^{m} \int_\tau^t f_{1\beta}(t, \mathrm{t}) F_\beta(\mathrm{t}, \tau)\, d\mathrm{t}.$$

Die Funktionen $t^{-s+1} E_\alpha(t)$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ und $t^{-s} E(t)$ sind in $\mathfrak{R}$ regulär. Sämtliche hier auftretenden Funktionen von t und τ sind regulär, wenn t und τ in $\mathfrak{R}$ liegen.

Die Integralgleichung für $w_1(t)$ geht durch Differentiation über in

$$t \frac{dw_1(t)}{dt} = (F(t, t) - 1) w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} w_1(\tau)\, d\tau + \frac{dE(t)}{dt}.$$

Wir setzen

$$F(0, 0) = f_{11}(0, 0) = r, \qquad F(t, t) = r + t\psi(t),$$

$$L(t, \tau) = \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} e^{-\int_\tau^t \psi(\mathrm{t})\, d\mathrm{t}}, \qquad K(t) = \frac{dE(t)}{dt} e^{-\int_0^t \psi(\mathrm{t})\, d\mathrm{t}},$$

$$w_1(t) = W(t) e^{\int_0^t \psi(\mathrm{t})\, d\mathrm{t}}$$

[4]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 27 (1918), S. 51.

Die Funktionen $\psi(t)$, $t^{-s+1}K(t)$, $L(t,\tau)$ sind regulär, wenn t und τ in $\mathfrak{R}$ liegen. Es gilt die Gleichung

$$t\frac{dW(t)}{dt}=(r-1)W(t)+\int_0^t L(t,\tau)W(\tau)d\tau+K(t),$$

welche wir durch aufeinanderfolgende Näherungen lösen, indem wir setzen:

$$t\frac{dW_\nu(t)}{dt}=(r-1)W_\nu(t)+\Phi_\nu(t) \qquad (\nu=0,1,2,\ldots),$$

$$\Phi_0(t)=K(t),\quad \Phi_\nu(t)=\int_0^t L(t,\tau)W_{\nu-1}(\tau)d\tau \qquad (\nu=1,2,\ldots).$$

Die Differentialgleichung für $W_0(t)$ hat, wenn $j>0$ und also s von r verschieden ist, eine partikuläre Lösung, welche gleich dem Produkt aus t^{s-1} und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von t ist. Unter der Annahme, daß $W_{\nu-1}(t)$ gleich dem Produkt aus $t^{s+\nu-2}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion ist, ist $\Phi_\nu(t)$ gleich einer mit $t^{s+\nu-1}$ multiplizierten regulären Funktion. Dann hat die Differentialgleichung für $W_\nu(t)$ eine mit $t^{s+\nu-1}$ multiplizierte reguläre Funktion als partikuläre Lösung. Da $\bar{s}-\bar{r}+\nu=j+\nu>0$ ist, erhält man eine solche Lösung in der Form

$$W_\nu(t)=t^{r-1}\int_0^t t^{-r}\Phi_\nu(t)dt \qquad (\nu=0,1,2,\ldots).$$

Wenn t und τ in $\mathfrak{R}$ liegen, möge $|K(t)|\leqq K$, $|L(t,\tau)|\leqq L$ sein. Wir nehmen an, in $\mathfrak{R}$ sei

$$|W_{\nu-1}(t)|\leqq \mathfrak{C}_{\nu-1}T^{\bar{s}+\nu-2}.$$

Dann ist

$$|\Phi_\nu(t)|\leqq\frac{L\mathfrak{C}_{\nu-1}T^{\bar{s}+\nu-1}}{\bar{s}+\nu-1},$$

$$|W_\nu(t)|\leqq\frac{\varkappa\varkappa' L\mathfrak{C}_{\nu-1}}{\bar{s}+\nu-1}T^{\bar{r}-1}\int_0^T T^{\bar{s}-\bar{r}+\nu-1}dT=\frac{\varkappa\varkappa' L\mathfrak{C}_{\nu-1}T^{\bar{s}+\nu-1}}{(\bar{s}+\nu-1)(\bar{s}-\bar{r}+\nu)}$$

oder

$$|W_\nu(t)|\leqq\mathfrak{C}_\nu T^{\bar{s}+\nu-1},\qquad \mathfrak{C}_\nu=\mathfrak{C}_{\nu-1}\cdot\frac{\varkappa\varkappa' L}{(\bar{s}+\nu-1)(\bar{s}-\bar{r}+\nu)}.$$

Daher ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}|t|^{-\bar{s}+1}|W_\nu(t)|$ in $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergent. Die Reihe $W(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}W_\nu(t)$, welche eine mit t^{s-1} multiplizierte, in t reguläre Funktion darstellt, genügt der Integraldifferentialgleichung für $W(t)$. Die Integralgleichungen (e) werden durch die Funktionen

$$w_1(t) = W(t)e^{\int\limits_0^t \psi(t)dt}, \quad w_\alpha(t) = E_\alpha(t) + \int\limits_0^t F_\alpha(t,\tau)w_1(\tau)d\tau \quad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

befriedigt; $t^{-s+1} w_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ ist in $\mathfrak{R}$ regulär.

Im Falle $j = 0$ sind die Integralgleichungen (e) homogen; sie haben eine Lösung $w_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ von solcher Beschaffenheit, daß $t^{-r+1} w_\alpha(t)$ in $\mathfrak{R}$ regulär ist[5]).

§ 3.

Nach dem im § 2 bewiesenen Satze besitzen die Integralgleichungen (D_1) eine Lösung $w_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, für welche $t^{-r-j+1} w_\alpha(t)$, abgesehen von $t = -a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ und ∞, überall regulär ist. In einem um $t = 0$ beschriebenen Kreis, der keine der singulären Stellen $-a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ enthält, gilt die konvergente Entwicklung

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Denn wenn man diese Reihen für die $w_\alpha(t)$ in die Gleichungen (C_1) einsetzt, erhält man dieselben Rekursionsformeln wie durch Einsetzung der Reihen

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

in die Gleichungen (B_1).

Die in den Gleichungen (A) auftretenden Potenzreihen $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ seien für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$ konvergent, also, wenn $\sigma > \frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\sigma} < \varrho$ ist, für $x = \frac{1}{\sigma}$ bzw. $x = \frac{1}{\sigma}$, $y = \frac{1}{\sigma}$ absolut konvergent. Dasselbe gilt dann auch für die in (B_1) vorkommenden Potenzreihen $x^{-r-j} R_\alpha(x)$, $y^{-r-j+1} S_\alpha(x, y)$. Demnach bestehen Ungleichungen

$$\left|a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\right| \leqq \mathfrak{a}\,\sigma^\lambda, \quad \left|b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\right| \leqq \mathfrak{b}\,\sigma^{\lambda+\mu}, \quad \left|c_\alpha^{(\lambda)}\right| \leqq \mathfrak{c}\,\sigma^\lambda, \quad \left|d^{(\lambda,\mu)}\right| \leqq \mathfrak{d}\,\sigma^{\lambda+\mu},$$

und es ist

$$|F_{\alpha\beta}(t)| \leqq \mathfrak{a}\,\sigma \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda-1} \frac{|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} = \mathfrak{a}\,\sigma\, e^{\sigma|t|},$$

$$\left|G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)\right| \leqq \mathfrak{b}\,\sigma^{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma^{\mu+1} \frac{|t|^{\mu+1}}{(\mu+1)!} < \mathfrak{b}\,\sigma^{\lambda-1} e^{\sigma|t|},$$

---

[5]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213—216.

$$|N_a^{(\lambda)}(t)| \leqq \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{d}\,\sigma^{\lambda+\mu} \frac{\varkappa\,|t|^{\bar r+j+\mu}}{|\Gamma(r+j+\mu+1)|} \leqq \frac{\varkappa\,\mathfrak{d}\,\sigma^{\lambda}\,|t|^{\bar r+j}}{|\Gamma(r+j+1)|} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sigma^{\mu} \frac{|t|^{\mu}}{\mu!} =$$
$$= \mathfrak{N}\,\sigma^{\lambda}\,|t|^{\bar r+j}\,e^{\sigma|t|}\text{ [6])}$$

wegen $|\Gamma(r+j+\mu+1)| = |\Gamma(r+j+1)|\cdot|r+j+1|\ldots|r+j+\mu|$
$$\geqq |\Gamma(r+j+1)|\cdot\mu!,$$

$$|M_a(t)| \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{c}\,\sigma^{\lambda} \frac{\varkappa\,|t|^{\bar r+j+\lambda-1}}{|\Gamma(r+j+\lambda)|} \leqq \frac{\varkappa\,\mathfrak{c}\,|t|^{\bar r+j-1}}{|\Gamma(r+j)|} + \frac{\varkappa\,\mathfrak{c}\,\sigma\,|t|^{\bar r+j}}{|\Gamma(r+j+1)|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma^{\lambda-1} \frac{|t|^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

wegen $|\Gamma(r+j+\lambda)| \geqq |\Gamma(r+j+1)|\cdot(\lambda-1)!$ für $\lambda = 1, 2, \ldots$ oder, wenn $|t| > 1$ und daher $|t|^{\bar r+j-1} < |t|^{\bar r+j} < |t|^{\bar r+j} e^{\sigma|t|}$ ist,

$$|M_a(t)| < \mathfrak{M}|t|^{\bar r+j} e^{\sigma|t|}.$$

Es sei $\mathfrak{S}$ ein Sektor, welcher von zwei von $t=0$ nach $t=\infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und weder im Innern noch auf der Begrenzung eine der Stellen $-a_1, a_2-a_1, \ldots, a_m-a_1$ enthält. Wir beweisen den Satz:

Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist

$$|w_a(t)| < Ce^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wenn $h > \frac{1}{\varrho}$ und C hinreichend groß ist [7]).

Der Beweis wird nach der im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 321—322 benutzten, an Perron (Journ. f. Math. 143, S. 26—28) anknüpfenden Methode geführt. Es sei R ein positiver Wert und C so groß, daß im Sektor $\mathfrak{S}$ für $|t| \leqq R$

$$|w_a(t)| < Ce^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

ist. Wir zeigen, daß diese Ungleichungen auch für $|t| > R$ im Sektor $\mathfrak{S}$ gelten, wenn R hinreichend groß gewählt war. Unter der Voraussetzung, daß dies nicht der Fall ist, verstehen wir unter R' die untere Grenze derjenigen Werte von $|t|$, für welche unsere Ungleichungen nicht bei beliebiger Wahl von $\arg t$ in $\mathfrak{S}$ gelten. Dann ist ein Wert $\alpha = \alpha'$ und ein dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehörender Wert $t = t'$ vom absoluten Betrage $|t'| = R'$ so vorhanden, daß $|w_{a'}(t')| = Ce^{h|t'|}$ ist, während man im Sektor $\mathfrak{S}$ für $|t| \leqq R'$

$$|w_a(t)| \leqq Ce^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

[6]) Wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken liegt, besteht eine Ungleichung $|t^r| \leqq \varkappa |t|^{\bar r}$.

[7]) Im Falle $0 < \bar r + j < 1$, in welchem $w_a(t)$ für $t=0$ unendlich wird, ist $|w_a(t)| < Ce^{h|t|}$ für $|t| \geqq t_0$, $|w_a(t)| < c|t|^{\bar r+j-1}$ für $|t| < t_0$. Dabei ist $t_0 > 0$ beliebig klein, c hinreichend groß zu nehmen.

hat. Aus der Integralgleichung (C_1) folgt für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$, wenn

$$\varphi\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau$$

gesetzt wird:

$$|t - a_\alpha + a_1| \cdot |w_\alpha(t)| \leqq \sum_{\beta=1}^{m} |F_{\alpha\beta} w_\beta(t)| + \sum_{\beta=1}^{m} \left| \frac{G^{(0)}_{\alpha\beta} w_\beta(t)}{t+a_1} \right|$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{t+a_1} G^{(\lambda)}_{\alpha\beta} w_\beta(t)\,dt \right| + |M_\alpha(t)| + \left| \frac{N^{(0)}_\alpha(t)}{t+a_1} \right|$$

$$+ \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N^{(\lambda)}_\alpha(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau \right|.$$

Auf der rechten Seite ist $|w_\beta(t)| \leqq C e^{h|t|}$, also

$$|F_{\alpha\beta} w_\beta(t)| < \int_0^{|t|} \mathfrak{a}\,\sigma\, e^{\sigma(|t|-|\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|}\,d|\tau|$$

$$= \mathfrak{a}\,C\sigma e^{\sigma|t|} \int_0^{|t|} e^{(h-\sigma)|\tau|}\,d|\tau| < \mathfrak{a}\,C\sigma e^{\sigma|t|} \cdot \frac{e^{(h-\sigma)|t|}}{h-\sigma} = \frac{\mathfrak{a}\,C\sigma e^{h|t|}}{h-\sigma},$$

$$|G^{(\lambda)}_{\alpha\beta} w_\beta(t)| < \int_0^{|t|} \mathfrak{h}\,\sigma^{\lambda-1} e^{\sigma(|t|-|\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|}\,d|\tau| < \frac{\mathfrak{b}\,C\sigma^{\lambda-1} e^{h|t|}}{h-\sigma};$$

wenn im Sektor $\mathfrak{S}$ $|t+a_1| \geqq D > 0$ ist, hat man

$$\left| \frac{G^{(0)}_{\alpha\beta} w_\beta(t)}{t+a_1} \right| < \frac{\mathfrak{b}\,C e^{h|t|}}{D\sigma(h-\sigma)},$$

$$\left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{1}{\tau+a_1} G^{(\lambda)}_{\alpha\beta} w_\beta(\tau)\,d\tau \right| < \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(|t|-|\tau|)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{\mathfrak{b}\,C\sigma^{\lambda-1} e^{h|\tau|}}{D(h-\sigma)}\,d|\tau|$$

$$= \frac{\mathfrak{b}\,C}{D(h-\sigma)} \int_0^{|t|} e^{\sigma(|t|-|\tau|)} e^{h|\tau|}\,d|\tau| = \frac{\mathfrak{b}\,C e^{\sigma|t|}}{D(h-\sigma)} \int_0^{|t|} e^{(h-\sigma)|\tau|}\,d|\tau| < \frac{\mathfrak{b}\,C e^{h|t|}}{D(h-\sigma)^2};$$

$$\left| \frac{N^{(0)}_\alpha(t)}{t+a_1} \right| \leqq \frac{\mathfrak{N}\,|t|^{\bar{r}+j} e^{\sigma|t|}}{D},$$

$$\left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N^{(\lambda)}_\alpha(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau \right| \leqq \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(|t|-|\tau|)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{\mathfrak{N}\,\varrho^\lambda |\tau|^{\bar{r}+j} e^{\sigma|\tau|}}{D}\,d|\tau|$$

$$= \frac{\mathfrak{N}\,\sigma}{D} \int_0^{|t|} e^{\sigma(|t|-|\tau|)} |\tau|^{\bar{r}+j} e^{\sigma|\tau|}\,d|\tau| = \frac{\mathfrak{N}\,\sigma e^{\sigma|t|}}{D} \int_0^{|t|} |\tau|^{\bar{r}+j}\,d|\tau| = \frac{\mathfrak{N}\,\sigma |t|^{\bar{r}+j+1} e^{\sigma|t|}}{D(\bar{r}+j+1)}.$$

Für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ ist also

$$|t - a_\alpha + a_1| \cdot Ce^{h|t|} < \frac{m\mathfrak{a}\sigma Ce^{h|t|}}{h-\sigma} + \frac{m\mathfrak{b}Ce^{h|t|}}{D\sigma(h-\sigma)} + \frac{m\mathfrak{b}Ce^{h|t|}}{D(h-\sigma)^2}$$
$$+ \mathfrak{M}|t|^{\bar r + j} e^{\sigma|t|} + \frac{\mathfrak{N}|t|^{\bar r + j} e^{\sigma|t|}}{D} + \frac{\mathfrak{N}\sigma|t|^{\bar r + j + 1} e^{\sigma|t|}}{D(\bar r + j - 1)}$$

oder nach Division mit $Ce^{h|t|}$

$$|t - a_\alpha + a_1| < \frac{m\mathfrak{a}\sigma}{h-\sigma} + \frac{m\mathfrak{b}}{D\sigma(h-\sigma)} + \frac{\mathfrak{M}|t|^{\bar r + j} e^{-(h-\sigma)|t|}}{C}$$
$$+ \frac{\mathfrak{N}|t|^{\bar r + j} e^{-(h-\sigma)|t|}}{CD} + \frac{\mathfrak{N}\sigma|t|^{\bar r + j + 1} e^{-(h-\sigma)|t|}}{CD(\bar r + j + 1)} \text{[8]}).$$

Wenn $h > \sigma$ ist, hat die rechte Seite für $\lim |t| = \infty$ einen endlichen, die linke Seite einen unendlichen Grenzwert. Da h beliebig wenig größer als σ und σ beliebig wenig größer als $\frac{1}{\varrho}$ ist, so genügt es, $h > \frac{1}{\varrho}$ anzunehmen. Nimmt man R hinreichend groß, so ist die linke Seite der für $|t| = R' \geqq R$ geltenden Ungleichung kleiner als die linke, es ist also ein Widerspruch vorhanden.

Der bewiesene Satz kann folgendermaßen erweitert werden. Die absoluten Beträge der singulären Stellen seien kleiner als $\mathfrak{r}$. Wenn im Sektor $\mathfrak{S}$ $\omega_1 \leqq \arg t \leqq \omega_2$ ist, seien ω_1^*, ω_2^* irgend zwei endliche Zahlen, welche die Bedingung $\omega_1^* \leqq \omega_1 < \omega_2 \leqq \omega_2^*$ erfüllen. Im Bereich $\mathfrak{S}'$ sei $|t| < \mathfrak{r}$, $\omega_1 \leqq \arg t \leqq \omega_2$, im Bereich $\mathfrak{S}''$ $|t| \geqq \mathfrak{r}$, $\omega_1^* \leqq \arg t \leqq \omega_2^*$. Der Bereich $\mathfrak{S}^*$ setze sich aus $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ zusammen. Dann ist im Bereich $\mathfrak{S}^*$

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{h|t|} \text{[9]}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wenn $h > \frac{1}{\varrho}$ und C^* hinreichend groß ist.

Wir verbinden zum Beweise einen beliebigen Punkt $t = |t|e^{i\omega}$ des Bereichs $\mathfrak{S}''$ mit dem Nullpunkt durch einen Weg, welcher aus folgenden Teilen besteht: 1. der Verbindungsgeraden der Punkte 0 und $\mathfrak{r}e^{i\omega_0}$, wo ω_0 ein fester Wert zwischen ω_1 und ω_2 ist, 2. dem die Punkte $\mathfrak{r}e^{i\omega_0}$ und $\mathfrak{r}e^{i\omega}$ verbindenden Bogen des Kreises vom Mittelpunkt 0 und vom Radius $\mathfrak{r}$, 3. der Verbindungsgeraden der Punkte $\mathfrak{r}e^{i\omega}$ und $|t|e^{i\omega}$. Die Länge dieses Weges bezeichnen wir mit T, die Länge von 0 bis zu einem beliebigen

[8]) Im Falle $\bar r + j < 1$ kommen auf der rechten Seite dieser Ungleichung noch weitere Glieder mit $e^{-(h-\sigma)|t|}$ vor, welche das Ergebnis nicht beeinträchtigen. Man zerlegt nämlich bei der Abschätzung von $|F_{\alpha\beta} w_\beta(t)|$ und $|G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)|$ die von 0 bis $|t|$ erstreckten Integrale in Integrale zwischen 0 und $\mathfrak{t}_0$, worin man $|w_\beta(t)|$ durch $c|t|^{\bar r + j - 1}$ ersetzt, und Integrale zwischen $\mathfrak{t}_0$ und $|t|$, worin $|w_\beta(t)|$ durch $Ce^{h|t|}$ ersetzt wird; die letzteren Integrale werden vergrößert, wenn man die untere Grenze $\mathfrak{t}_0$ durch 0 ersetzt.

[9]) Vg Fußnote [7]).

Punkt τ des Weges mit T. Wenn $h > \frac{1}{\varrho}$, $\varepsilon > 0$, $g = \frac{h}{1+\varepsilon} > \frac{1}{\varrho}$ ist, hat man in $\mathfrak{S}''$

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{gT} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Zum Beweise ersetzt man in den obigen Betrachtungen $|t|$, $|\tau|$ durch T, T. Wegen $|t| \leqq T$, $|t-\tau| \leqq T - \mathrm{T}$ hat man

$$|F_{\alpha\beta}(t)| \leqq \mathfrak{a}\,\sigma\, e^{\sigma T}, \qquad |F_{\alpha\beta}\, w_\beta(t)| \leqq \mathfrak{a}\,\sigma\, e^{\sigma(T-\mathrm{T})} \text{ usw.}$$

Nimmt man $|t|$ hinreichend groß, so ist $T < |t|(1+\varepsilon)$, also

$$|w_\alpha(t)| < C^* e^{g(1+\varepsilon)|t|} = C^* e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

§ 4.

Die Integrale

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^x w_\alpha(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

welche über die dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehörende Gerade $\arg t = \omega$ erstreckt sind, sind in dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, welcher einen Teil des Kreises $|x| < \varrho$ bildet, absolut konvergent; es ist

$$x^2 \frac{d\psi_\alpha}{dx} = \int_0^\infty t\, w_\alpha(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

In dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ gelten die Gleichungen

$$P_{\alpha\beta}(x) - a_\alpha\, \delta_{\alpha\beta} = \int_0^\infty F_{\alpha\beta}(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt \text{ [10]}),$$

$$(P_{\alpha\beta}(x) - a_\alpha\, \delta_{\alpha\beta})\, \psi_\beta(x) = \int_0^\infty F_{\alpha\beta}\, w_\beta(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt \text{ [11]}),$$

$$R_\alpha(x) = \int_0^\infty M_\alpha(t)\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

wo jedesmal über die Gerade $\arg t = \omega$ integriert wird. Gehört y dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{\varrho}$ an, so ist

$$\sum_{\mu=0}^\infty b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\, y^{\mu+2} = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)\, e^{-\frac{t}{y}}\, dt,$$

$$\sum_{\mu=0}^\infty b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\, y^{\mu+2} \cdot \psi_\beta(y) = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\, w_\beta(t)\, e^{-\frac{t}{y}}\, dt;$$

---

[10]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 321–322.

[11]) A. a. O. S. 323–325.

$$e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} y^{\mu+2} \cdot \psi_\beta(y) = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t) e^{-\frac{t+a_1}{y}} dt.$$

Daraus folgt

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} y^{\mu} \cdot \psi_\beta(y)\, dy = \int_0^\infty G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)\, dt \int_0^x e^{-\frac{t+a_1}{y}} \frac{dy}{y^2},$$

wenn alle Punkte y des Integrationsweges $0 \ldots x$ dem Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{\varrho}$ angehören. Wir wählen als äquivalenten Integrationsweg die Verbindungsgerade des Nullpunktes mit dem im Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ gelegenen Punkt x. Nun ist

$$\int_0^x e^{-\frac{t+a_1}{y}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\left[e^{-\frac{t+a_1}{y}}\right]_0^x}{t+a_1} = \frac{e^{-\frac{t+a_1}{x}}}{t+a_1},$$

wenn $\lim e^{-\frac{t+a_1}{y}} = 0$ ist, falls y auf dem geradlinigen Weg $0 \ldots x$ nach 0 geht. Dies ist der Fall, wenn $|\arg(t+a_1) - \arg x| < \frac{\pi}{2}$ oder, da $\arg(t+a_1)$ zwischen $\arg t = \omega$ und $\arg a_1$ liegt. wenn gleichzeitig $|\arg x - \omega| < \frac{\pi}{2}$ und $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist. Die Bedingung $|\arg x - \omega| < \frac{\pi}{2}$ ist im Kreise $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ von selbst erfüllt; die Bedingung $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist im Falle $\omega = \arg a_1$ im ganzen Kreise erfüllt, sonst, da $-a_1$ ein singulärer Punkt von $w_\alpha(t)$ und daher $\omega = \arg a_1 \pm \pi$ ausgeschlossen ist, in einem Teil des Kreises. In dem durch $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ bestimmten Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ ist

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} y^{\mu} \cdot \psi_\beta(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)}{t+a_1} e^{-\frac{t+a_1}{x}} dt,$$

$$\int_0^x e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} y^{\mu} \cdot \psi_\beta(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(t)}{t+a_1} e^{-\frac{t}{x}} dt;$$

mit Rücksicht auf die Gleichung

$$x^\lambda = \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} e^{-\frac{t}{x}} dt$$

für $\lambda \geqq 1$ hat man

$$x^\lambda \int_0^x e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} y^\mu \cdot \psi_\beta(y)\,dy = \int_0^\infty \int_0^t \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}+a_1}\,d\mathfrak{t}\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^x e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} x^\lambda y^\mu \cdot \psi_\beta(y)\,dy = \int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}+a_1}\,d\mathfrak{t}\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt$$

wegen der Konvergenz von

$$\int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(|t|-|\mathfrak{t}|)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \left|\frac{G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} w_\beta(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}+a_1}\right| d|\mathfrak{t}|\cdot e^{-|t|\,\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)}\,d|t|$$

$$< \frac{\mathfrak{b}\,C\sigma}{D(h-\sigma)^2} \int_0^\infty e^{\left(h-\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right)\right)|t|}\,d|t|$$

für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > h$ oder für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, da h beliebig wenig größer als $\frac{1}{\varrho}$ ist. Ferner ist für $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{y}\right) > \frac{1}{\varrho}$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\alpha^{(\lambda,\mu)} y^{r+j+\mu+1} = \int_0^\infty N_\alpha^{(\lambda)}(t)\,e^{-\frac{t}{y}}\,dt,$$

$$e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_\alpha^{(\lambda,\mu)} y^{r+j+\mu+1} = \int_0^\infty N_\alpha^{(\lambda)}(t)\,e^{-\frac{t+a_1}{y}}\,dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_\alpha^{(\lambda,\mu)} y^{r+j+\mu-1}\,dy = \int_0^\infty \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(t)}{t+a_1}\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

wenn x demjenigen Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$ angehört, für welchen $|\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$ ist. In diesem Abschnitt ist auf Grund der obigen Schlußweise

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^x e^{\frac{a_1}{x}-\frac{a_1}{y}} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_\alpha^{(\lambda,\mu)} x^\lambda y^{r+j+\mu-1}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\mathfrak{t})^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \frac{N_\alpha^{(\lambda)}(\mathfrak{t})}{\mathfrak{t}+a_1}\,d\mathfrak{t}\cdot e^{-\frac{t}{x}}\,dt.$$

Hiernach ist in demjenigen Abschnitt des Kreises $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}$, in welchem $\arg x$ von $\arg a_1$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ abweicht,

$$J_\alpha = \int_0^\infty L_\alpha\,e^{-\frac{t}{x}}\,dt,$$

wenn die Gleichungen (B_1) in der Form $J_\alpha = 0$ und die Gleichungen (C_1) in der Form $L_\alpha = 0$ geschrieben werden. Demnach genügen die Laplaceschen Integrale für die $\psi_\alpha(x)$ den Integraldifferentialgleichungen (B_1), da die Funktionen $w_\alpha(t)$ den Integralgleichungen (C_1) genügen.

Hiernach gilt der Satz:

Die homogenen Gleichungen (A_1) *werden, wenn* a *eine der voneinander und von Null verschiedenen Zahlen* $a_1, \ldots, a_m$ *ist, durch Reihen*

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt. Sie gehen durch die Substitution

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \left(A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \ldots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x)\right) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo j *eine ganze positive Zahl und der reelle Teil von* $r + j$ *positiv ist, in die Gleichungen* (B_1) *über. Es sei z. B.* $a = a_1$. *Die aus* (B_1) *hergeleiteten Integralgleichungen* (D_1) *werden durch Funktionen* $w_\alpha(t)$ *befriedigt, welche sich im Endlichen abgesehen von den singulären Stellen* $0,\ a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1,\ -a_1$ *regulär verhalten und in der Umgebung von* $t = 0$ *in die konvergenten Reihen*

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} A_{\alpha n} \frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

entwickelbar sind. Sie erfüllen auf einer Geraden $\arg t = \omega$, *die durch keine der von 0 verschiedenen singulären Stellen geht, die Ungleichungen*

$$|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $h > \frac{1}{\varrho}$ [12] *und* C *hinreichend groß ist. Die obigen Ausdrücke für die* $\varphi_\alpha(x)$, *worin*

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x}} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Laplacesche Integrale mit dem Integrationsweg $\arg t = \omega$ *sind, stellen in dem Kreisabschnitt*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x}\right) > \frac{1}{\varrho}, \qquad |\arg x - \arg a_1| < \frac{\pi}{2}$$

eine Lösung der Gleichungen (A_1) *dar.*

---

[12]) Die Koeffizienten $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ von (A_1) sollen für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$ regulär sein.

Wenn die Wurzeln $a_1, \ldots, a_m$ der Gleichung $\left|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}\right| = 0$ nicht sämtlich verschieden sind, wenn aber die Determinante $\left|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\delta_{\alpha\beta}\right|$ die Elementarteiler $s - a_1, \ldots, s - a_m$ besitzt, erfahren die bisherigen Untersuchungen keine wesentliche Änderung. Es sei $a_1 = \ldots = a_\mu = a$, während $a_{\mu+1}, \ldots, a_m$ von a verschieden sind; a sei von 0 verschieden. Die zur Berechnung von $r, A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \ldots$ dienenden Gleichungen in § 1 werden folgendermaßen gelöst. Die zu $\alpha = \mu + 1, \ldots, m$ gehörigen Gleichungen des ersten Systems ergeben $A_{\mu+1,0} = \ldots = A_{m0} = 0$. Die zu $\alpha = 1, \ldots, \mu$ gehörigen Gleichungen des zweiten Systems schreiben sich

$$\begin{gathered}\left(a_{11}^{(1)} - r\right) A_{10} + \ldots + a_{\mu 1}^{(1)} A_{\mu 0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu 1}^{(1)} A_{10} + \ldots + \left(a_{\mu\mu}^{(1)} - r\right) A_{\mu 0} = 0.\end{gathered}$$

Wir nehmen an, die Determinante $\left|a_{\alpha\beta}^{(1)} - s\delta_{\alpha\beta}\right|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, \mu)$ habe die Elementarteiler $r - r_1, \ldots, r - r_\mu$. Dann läßt sich durch eine lineare Transformation von $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ erreichen, daß $a_{11}^{(1)} = r_1, \ldots, a_{\mu\mu}^{(1)} = r_\mu$, $a_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, \mu; \alpha \gtrless \beta)$ wird. Nach Bestimmung von $A_{10}, \ldots, A_{\mu 0}$ ergeben sich $A_{\mu+1,1}, \ldots, A_{m1}$ aus den zu $\alpha = \mu + 1, \ldots, m$ gehörigen Gleichungen des zweiten Systems. Die μ ersten Gleichungen des dritten Systems

$$\begin{gathered}(r_1 - r - 1) A_{11} + a_{1,\mu+1}^{(1)} A_{\mu+1,1} + \ldots + a_{1m}^{(1)} A_{m1} + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (r_\mu - r - 1) A_{\mu 1} + a_{\mu,\mu+1}^{(1)} A_{\mu+1,1} + \ldots + a_{mm}^{(1)} A_{m1} + \ldots = 0\end{gathered}$$

ergeben $A_{11}, \ldots A_{\mu 1}$, wenn wir die weitere Annahme machen, daß zwischen $r_1, \ldots, r_\mu$ keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht, usw. Den μ Werten $a_1 = \ldots = a_\mu = a$ entsprechen also μ Systeme von Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\frac{a}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mu),$$

in welcher r die Werte $r_1, \ldots, r_\mu$ hat und welche den Gleichungen (A_1) formal genügen. Die Integralgleichungen (D_1) haben jetzt die Form

$$t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mu),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = \mu + 1, \ldots, m);$$

dabei ist $f_{\alpha\alpha}(0, 0) = a_{\alpha\alpha}^{(1)} = r_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \mu)$, $f_{\alpha\beta}(0, 0) = a_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, \mu; \alpha \gtrless \beta)$ und $f_\alpha(t) = t^{r+j-1} h_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, wo $h_\alpha(t)$ abgesehen von $t = a_{m+1} - a, \ldots, a_m - a, -a$ regulär und $h_\alpha(0) = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, \mu)$ ist. In Anknüpfung an Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 315—318 und 25 (1916), S. 76—78 findet man μ Lösungen mit in der Umgebung von $t = 0$ konvergenten Reihenentwicklungen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo r einen der Werte $r_1, \ldots, r_\mu$ hat; $t^{-r-j+1} w_\alpha(t)$ ist außer an den angegebenen singulären Stellen regulär. Nach dieser Abänderung der Entwicklungen des § 2 kann man wie in § 3 und § 4 weiter schließen.

Auf den Fall beliebiger Elementarteiler der Determinante $|P_{\alpha\beta}(0) - s\delta_{\alpha\beta}|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ gehen wir hier nicht ein.

II. Lineare Differentialgleichungen.

§ 5.

Das im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 310 f., 25 (1916), S. 74 f. und S. 301 f. behandelte System linearer Differentialgleichungen

$$\text{(a)} \qquad x^{1-k} \frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x) y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo

$$P_{\alpha\beta}(x) = a_\alpha \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}$$

in der Umgebung von $x = \infty$ regulär ist und $a_1 = 0, a_2, \ldots, a_m$ verschieden sind, wird, wenn $\mathfrak{A}_1^{(1)} = \ldots = \mathfrak{A}_1^{(k-1)} = 0$, $r = \mathfrak{A}_1^{(k)}$ in der Bezeichnung Jahresber. 24, S. 311—312 ist, durch Reihen

$$y_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt. Indem wir zunächst den reellen Teil $\bar{r}$ von r positiv annehmen (was durch eine Substitution $y_\alpha = x^q z_\alpha$ erreicht werden kann), leiten wir durch die verallgemeinerte Laplacesche Transformation

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t) e^{-tx^k} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

unter Einführung der für alle endlichen t außer $t = 0$ regulären Funktionen

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\, t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

das System von Integralgleichungen

$$\text{(b)} \qquad (kt - a_\alpha)\, w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

her, welches durch die Reihen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}\, t^{\frac{r+n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt wird.

Hier werden die Eigenschaften der Funktionen $w_\alpha(t)$ *aus den Integralgleichungen* (b) *hergeleitet*, während nach der a. a. O. 25 (1916), S. 315 bis 323 benutzten Methode die Funktionen $w_\alpha(t)$ auf die a. a. O. 24 (1915), S. 309 f. untersuchten Funktionen $w_\alpha^{(p)}(t)$ zurückzuführen sind.

Die Integralgleichungen (b) haben, wenn man

$$f_{1\beta}(t, \tau) = \frac{1}{k}\, G_{1\beta}(t-\tau), \qquad f_{\alpha\beta}(t, \tau) = \frac{G_{\alpha\beta}(t-\tau)}{kt - a_\alpha} \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

setzt, die Form

$$t\, w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t, \tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau,$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t, \tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

Unter Benutzung der im Jahresber. d. D. Math.-Ver. 24 (1915), S. 213—216 eingeführten Bezeichnungen erhält man durch Elimination von $w_2(t), \ldots, w_m(t)$ eine Integralgleichung

$$t\, w_1(t) = \int_0^t F(t, \tau)\, w_1(\tau)\, d\tau;$$

nachdem diese gelöst ist, hat man

$$w_\alpha(t) = \int_0^t F_\alpha(t, \tau)\, w_1(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{K}$ einen Bereich der t-Ebene, welcher aus Kreissektoren vom Mittelpunkt $t = 0$ und von endlichen Radien besteht, die ganze Umgebung von $t=0$ ausfüllt und die Punkte $\frac{a_2}{k}, \ldots, \frac{a_m}{k}$ weder im Innern noch auf dem Rande enthält. Wenn t dem Bereich $\mathfrak{R}$ und (wie wir jetzt immer annehmen) τ dem geradlinigen Integrationsweg $0 \ldots t$ angehört, sind $f_{\alpha\beta}(t, \tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$, $S_{\alpha\beta}(t, \tau)$ $(\alpha, \beta = 2, \ldots, m)$, $F_\alpha(t, \tau)$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$, $F(t, \tau)$ abgesehen von dem Faktor $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$ reguläre Funktionen von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$.

Zur Begründung diene folgendes. Zunächst ist

$$G_{\alpha\beta}(t) = t^{\frac{1}{k}-1}\, \mathfrak{g}_{\alpha\beta}\left(t^{\frac{1}{k}}\right),$$

wo $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}(\mathfrak{t})$ eine beständig konvergente Potenzreihe von $\mathfrak{t}$ darstellt. Also ist, wenn α, β, λ Zahlen aus der Reihe $2, \ldots, m$ sind,

$$f_{\alpha\beta}(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}\, \mathfrak{g}_{\alpha\beta}\left((t-\tau)^{\frac{1}{k}}\right)}{kt - a_\alpha},$$

$$\int_\tau^t f_{\alpha\lambda}(t, z) f_{\lambda\beta}(z, \tau)\, dz = \int_\tau^t \frac{(t-z)^{\frac{1}{k}-1}(z-\tau)^{\frac{1}{k}-1}\, \mathfrak{g}_{\alpha\lambda}\left((t-z)^{\frac{1}{k}}\right)\mathfrak{g}_{\lambda\beta}\left((z-\tau)^{\frac{1}{k}}\right)}{(kt-a_\alpha)(kz-a_\lambda)}\, dz$$

$$= \frac{(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}}{kt-a_\alpha}\int_0^1 \frac{\zeta^{\frac{1}{k}-1}(1-\zeta)^{\frac{1}{k}-1}\, \mathfrak{g}_{\alpha\lambda}\left((t-\tau)^{\frac{1}{k}}\zeta^{\frac{1}{k}}\right)\mathfrak{g}_{\lambda\beta}\left((t-\tau)^{\frac{1}{k}}(1-\zeta)^{\frac{1}{k}}\right)}{kt-a_\lambda-k(t-\tau)\zeta}\, d\zeta,$$

wie sich durch Anwendung der Substitution

$$z = t - (t-\tau)\zeta$$

ergibt. Auf der Geraden $0 \ldots t$ ist $\tau = \Theta t$ $(\Theta = 0 \ldots 1)$; der Ausdruck $kt - a_\lambda - k(t-\tau)\zeta = kt(1-(1-\Theta)\zeta) - a_\lambda = kt\vartheta - a_\lambda$ $(\vartheta = 0, \ldots, 1)$ verschwindet nur, wenn

$$t = \frac{a_\lambda}{k\vartheta} \qquad (\vartheta = 1, \ldots, 0)$$

ist. Wenn t nicht auf dieser Halbgeraden liegt, ist das letzte nach ζ zwischen 0 und 1 genommene Integral in bezug auf t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ regulär. Demnach ist $f_{\alpha\beta}^{(2)}(t, \tau)$ das Produkt aus $(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich $f_{\alpha\beta}^{(n)}(t, \tau)$ als Produkt aus $(t-\tau)^{\frac{n}{k}-1}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$. Hiernach erscheint $(t-\tau)^{1-\frac{1}{k}} S_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 2, \ldots, m)$ als in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$; dasselbe gilt auf Grund der obigen Überlegung für $(t-\tau)^{1-\frac{1}{k}} F_\alpha(t,\tau)$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ und $(t-\tau)^{1-\frac{1}{k}} F(t,\tau)$.

Wir nehmen an,

$$F(t,\tau) = c(t-\tau)^{\frac{\varkappa}{k}-1} + \ldots$$

sei das Produkt aus $(t-\tau)^{\frac{\varkappa}{k}-1}$, wo $\varkappa$ eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ ist und einer regulären Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$. Die Integralgleichung für $w_1(t)$ wird durch eine Reihe

$$w_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{1n}\, t^{\frac{r+n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)}$$

formal befriedigt. Ihre linke Seite beginnt nach Einsetzung dieser Reihe mit

$$\frac{A_{10}\, t^{\frac{r}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)},$$

die rechte Seite mit

$$\frac{c A_{10}}{\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)} \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\varkappa}{k}-1} \tau^{\frac{r}{k}-1} d\tau = \frac{c A_{10} \Gamma\left(\frac{\varkappa}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+\varkappa}{k}\right)} t^{\frac{r+\varkappa}{k}-1},$$

so daß $\varkappa = k$ sein muß. $F(t,\tau)$ ist also eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$, welche für $t=\tau$ den Wert c annimmt. Jetzt beginnt die rechte Seite der vorhin betrachteten Gleichung mit

$$\frac{c A_{10}\, t^{\frac{r}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r}{k}+1\right)} = \frac{c A_{10}\, t^{\frac{r}{k}}}{\frac{r}{k}\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)},$$

so daß $c = F(0,0) = \frac{r}{k}$ ist.

Durch Differentiation geht die Integralgleichung für $w_1(t)$ über in

$$t\frac{d w_1(t)}{dt} = (F(t,t)-1)\, w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t} w_1(\tau)\, d\tau.$$

Wenn wir

$$F(t,t) = \frac{r}{k} + t\psi(t), \qquad \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t} = L(t,\tau)\, e^{\int\limits_\tau^t \psi(t)\,dt}$$

setzen, sind die Funktionen $\psi(t)$ und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1} L(t,\tau)$ regulär, wenn t und τ in $\mathfrak{R}$ liegen. Setzen wir weiter

$$w_1(t) = W(t)\, e^{\int\limits_0^t \psi(t)\,dt},$$

so gilt die Gleichung

$$t\frac{dW(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W(t) + \int\limits_0^t L(t,\tau)\, W(\tau)\, d\tau,$$

die wir durch die Kette von Differentialgleichungen

$$t\frac{dW_0(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W_0(t),$$

$$t\frac{dW_\nu(t)}{dt} = \left(\frac{r}{k} - 1\right) W_\nu(t) + \Phi_\nu(t), \qquad \Phi_\nu(t) = \int\limits_0^t L(t,\tau)\, W_{\nu-1}(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit den Lösungen

$$W_0(t) = t^{\frac{r}{k}-1},$$

$$W_\nu(t) = t^{\frac{r}{k}-1} \int\limits_0^t t^{-\frac{r}{k}}\, \Phi_\nu(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ersetzen. Wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken bleibt, bestehen Ungleichungen $\left|t^{\frac{r}{k}}\right| \leqq \varkappa\, |t|^{\frac{\bar r}{k}}$, $\left|t^{-\frac{r}{k}}\right| \leqq \varkappa'\, |t|^{-\frac{\bar r}{k}}$. Wir nehmen an, in $\mathfrak{R}$ sei

$$|W_{\nu-1}(t)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1}\, |t|^{\frac{\bar r+\nu-1}{k}-1}.$$

Wenn $|L(t,\tau)| \leqq M(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1}$ ist, hat man

$$|\Phi_\nu(t)| \leqq M\, \mathfrak{C}_{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar r+\nu-1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar r+\nu}{k}\right)} |t|^{\frac{\bar r+\nu}{k}-1},$$

$$|W_\nu(t)| \leqq \mathfrak{C}_\nu\, t^{\frac{\bar r+\nu}{k}-1}, \qquad \mathfrak{C}_\nu = \mathfrak{C}_{\nu-1} \cdot M\varkappa\varkappa' k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar r+\nu-1}{k}\right)}{\nu\,\Gamma\left(\frac{\bar r+\nu}{k}\right)}.$$

Demnach ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{-\frac{r}{k}+1}\, W_\nu(t)$$

in $\mathfrak{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent und stellt eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion dar. Die Gleichung für $W(t)$ hat die Lösung

$$W(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} W_\nu(t),$$

die Gleichungen (b) die Lösung

$$w_1(t) = W(t)\, e^{\int_0^t \psi(t)\,dt}, \quad w_\alpha(t) = \int_0^t F_\alpha(t,\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 2, \ldots, m);$$

jede dieser Funktionen ist das Produkt aus $t^{\frac{r}{k}-1}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von t.

Wenn alle Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ im Gebiet $\mathfrak{R}(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geqq 0$ regulär sind, ist für $t = |t|\, e^{i\omega}$

$$|G_{\alpha\beta}(t)| < A\, |t|^{\frac{1}{k}-1}\, e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \text{ [13]},$$

wo ε eine beliebig kleine und A eine hinreichend große positive Zahl ist, die von ω unabhängig angenommen werden kann. Der Sektor $\mathfrak{S}$ sei von zwei von $t = 0$ ins Unendliche gehenden Geraden begrenzt und enthalte die singulären Stellen $\frac{a_2}{k}, \ldots, \frac{a_m}{k}$ weder im Innern noch auf dem Rande. Wenn $t = |t|\, e^{i\omega}$ dem Sektor $\mathfrak{S}$ angehört, ist

$$|w_\alpha(t)| < C\, e^{h|t|} \text{ [14]} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß ist.

Zum Beweise nach der in § 3 benutzten Methode brauchen wir nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|w_\alpha(t)| = C\, e^{h|t|}$ für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$, wo $|t'| = R'$ hinreichend groß ist, und $|w_\alpha(t)| \leqq C\, e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \ldots, m$ und für $|t| \leqq R'$ in $\mathfrak{S}$, auf einen Widerspruch führt. Auf Grund der aus (b) folgenden Ungleichung

$$|kt - a_\alpha| \cdot |w_\alpha(t)| \leqq \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^{|t|} |G_{\alpha\beta}(t-\tau)| \cdot |w_\beta(\tau)|\, d|\tau|$$

ist nach der gemachten Annahme für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

---

[13]) Dies folgt aus Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25, S. 321 oben.

[14]) Im Falle $r < k$, in welchem $w_\alpha(t)$ für $t = 0$ unendlich ist, ist, wenn t_0 eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, $|w_\alpha(t)| < C\, e^{h|t|}$ für $|t| \geqq t_0$, $|w_\alpha(t)| < c\, |t|^{\frac{r}{k}-1}$ für $|t| < t_0$; C und c sind hinreichend große positive Größen.

$$|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leqq m \int_0^{|t|} A(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau|$$

$$= m A C e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|\tau|} d|\tau|$$

$$< m A C e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} e^{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} d|\tau|$$

$$= m A C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} \text{ [15]}$$

oder nach Division mit $C|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}$

$$|t|^{1-\frac{1}{k}} \left| k - \frac{t}{a_\alpha} \right| < m A k.$$

Im Falle $k > 1$ hat die linke Seite für $\lim |t| = \infty$ einen unendlichen Grenzwert, während die rechte Seite endlich ist. Im Falle $k = 1$ haben wir

$$|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leqq m A C e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} e^{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|\tau|} d|\tau|$$

$$< m A C e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \cdot \frac{e^{(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} = \frac{m A C e^{h|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon}$$

oder nach Division mit $C e^{h|t|}$

$$|t - a_\alpha| < \frac{m A}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon},$$

so daß wieder ein Widerspruch vorhanden ist.

---

[15]) Im Falle $\bar{r} < k$ kommt auf der rechten Seite hinzu (vgl. Fußnote [8]):

$$m \int_0^{t_0} A(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|t|-|\tau|)} \cdot c|\tau|^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d|\tau|$$

$$< m A c e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \int_0^{|t|} (|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} |\tau|^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d|\tau|$$

$$= m A c e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|} \cdot |t|^{\frac{\bar{r}+1}{k}-1} \int_0^1 (1-\zeta)^{\frac{1}{k}-1} \zeta^{\frac{\bar{r}}{k}-1} d\zeta$$

$$= \frac{m A c \Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\bar{r}}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+1}{k}\right)} |t|^{\frac{\bar{r}+1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|}.$$

Nach Division mit $C|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}$ oder im Falle $k = 1$ mit $C e^{h|t|}$ hat dieses Zusatzglied für $\lim |t| = \infty$ den Grenzwert 0.

Hiernach sind die verallgemeinerten Laplaceschen Integrale

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx^k}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wenn auf dem keine der Stellen $a_2, \ldots, a_m$ enthaltenden Integrationsweg $\arg t = 2q\pi + \omega$ $(q = 0, 1, \ldots, k-1)$ ist, in dem Gebiet

$$\Re(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega), \quad \frac{(2q-\frac{1}{2})\pi - \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q+\frac{1}{2})\pi - \omega}{k}$$

konvergent und genügen den Differentialgleichungen (a)

Wenn man die im Jahresber. 24, S. 323f. dargestellte Methode zur Entwicklung der Laplaceschen Integrale in Fakultätenreihen auf die hier benutzten verallgemeinerten Laplaceschen Integrale anwendet, erhält man nicht eigentliche Fakultätenreihen, sondern Reihen, deren Glieder Quotienten von Gammafunktionen, aber nicht rationale Funktionen von x sind. Um Reihen mit rationalen Gliedern zu erhalten, benutzt man dieselbe Integraldarstellung wie im Jahresber. 24, S. 309f., die sich aus der jetzigen Integraldarstellung herleiten läßt. Vgl. Jahresber. 25, S. 318—319, und für nichtlineare Differentialgleichungen S. 307—308.

§ 6.

Die Betrachtungen des § 5 *gestalten wir* in verschiedener Hinsicht *um, um im III. Abschnitt ihre Übertragung auf die Gleichungen* (A) *vornehmen zu können.* Die Annahme $\bar{r} > 0$ ist jetzt nicht erforderlich.

Die ganze positive Zahl j sei so gewählt, daß $\bar{r} + j > 0$ ist. Durch die Substitution

$$y_\alpha = \frac{A_{\alpha 0}}{x^r} = \frac{A_{\alpha 1}}{x^{r+1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha, j-1}}{x^{r+j-1}} + z_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

gehen die Differentialgleichungen (a) über in

$$\text{(c)} \qquad x^{1-k}\frac{dz_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x) z_\beta + P_\alpha(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

$$P_\alpha(x) = \frac{1}{x^r}\sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\left(A_{\beta 0} + \frac{A_{\beta 1}}{x} + \ldots + \frac{A_{\beta, j-1}}{x^{j-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{x^{r+k}}\left(r A_{\alpha 0} + \frac{(r+1) A_{\alpha 1}}{x} + \ldots + \frac{(r+j-1) A_{\alpha, j-1}}{x^{j-1}}\right)$$

ist an allen regulären Stellen der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ außer $x = 0$ regulär; wenn man $z_1, \ldots, z_m$ durch 0 ersetzt, fallen in den Gleichungen (a) oder (c) die Glieder mit $\frac{1}{x^r}, \frac{1}{x^{r+1}}, \ldots, \frac{1}{x^{r+j-1}}$ und in der ersten Gleichung außerdem die Glieder mit $\frac{1}{x^{r+j}}, \ldots, \frac{1}{x^{r+j+k-1}}$ fort, so daß

$$P_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)}}{x^{r+j+\lambda}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

und $a_1^{(0)} = a_1^{(1)} = \ldots = a_1^{(k-1)} = 0$ ist. Durch die verallgemeinerte Laplacesche Transformation

$$z_\alpha = \int_0^x w_\alpha(t) e^{-tx^k} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

erhält man jetzt die Integralgleichungen

$$\text{(d)} \quad (kt - a_\alpha) w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau) w_\beta(\tau) d\tau + G_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

darin ist

$$G_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\alpha^{(\lambda)} t^{\frac{r+j+\lambda}{k} - 1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)}.$$

Setzt man

$$f_1(t) = \frac{1}{k} G_1(t), \qquad f_\alpha(t) = \frac{G_\alpha(t)}{kt - a_\alpha} \qquad (\alpha = 2, \ldots, m),$$

so schreiben sich die Integralgleichungen (d)

$$t w_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} f_{1\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_1(t),$$

$$w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} f_{\alpha\beta}(t,\tau) w_\beta(\tau) d\tau + f_\alpha(t) \quad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

Hieraus erhält man wie in § 3 durch Elimination von $w_2(t), \ldots, w_m(t)$ die Gleichung

$$t w_1(t) = \int_0^t F(t,\tau) w_1(\tau) d\tau + E(t).$$

Im Falle $\bar{r} > 0$, in welchem die Betrachtungen von § 5 gelten, kommen in $F(t,\tau)$ Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}, \ldots, (t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ nicht vor. Die Koeffizienten von $(t-\tau)^{\frac{\varkappa}{k}-1}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k-1)$, welche nur von $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, \ldots, k-1)$, aber nicht von $a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ $(\lambda = k, k+1 \ldots)$ abhängen, verschwinden infolge der Bedingungen $\mathfrak{A}_1^{(1)} = 0$, $\mathfrak{A}_1^{(2)} = 0, \ldots, \mathfrak{A}_1^{(k-1)} = 0$ und daher unabhängig davon, ob $r = \mathfrak{A}_1^{(k)}$ positiv ist oder nicht. Die Differentialgleichungen für die z_α werden durch die Reihen

$$z_\alpha = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}}$$

und demnach die Integralgleichung für $w_1(t)$ durch die Reihe

$$w_1(t) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{A_{1n}\, t^{\frac{r+n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+n}{k}\right)}$$

formal befriedigt; da bei Einsetzung dieser Reihe sowohl die linke Seite als auch das erste Glied der rechten Seite mit Konst. t^{r+j} beginnt, so gilt dasselbe für $E(t)$.

Durch Differentiation erhält man die Gleichung

$$t\frac{d w_1(t)}{dt} = (F(t,t) - 1)\, w_1(t) + \int_0^t \frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}\, w_1(\tau)\, d\tau + \frac{dE(t)}{dt}$$

Wenn wir die obigen Bezeichnungen benutzen und

$$K(t) = \frac{dE(t)}{dt}\, e^{-\int_0^t \psi(t)\, dt}$$

setzen, so daß $K(t)$ das Produkt aus $t^{\frac{r+j}{k}-1}$ und einer in $\mathfrak{R}$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist, so haben wir die Gleichung

$$t\frac{dW(t)}{dt} = \frac{r}{k}\, W(t) + \int_0^t L(t,\tau)\, W(\tau)\, d\tau + K(t),$$

welche wir durch die Kette von Differentialgleichungen

$$t\frac{dW_\nu(t)}{dt} = \frac{r}{k}\, W_\nu(t) + \Phi_\nu(t) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\Phi_0(t) = K(t), \qquad \Phi_\nu(t) = \int_0^t L(t,\tau)\, W_{\nu-1}(\tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

mit den Lösungen

$$W_\nu(t) = t^{\frac{r}{k}} \int_0^t t^{-\frac{r}{k}-1}\, \Phi_\nu(t)\, dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ersetzen. Wir haben

$$|W_\nu(t)| \leqq \mathfrak{C}_\nu\, |t|^{\frac{r+j+\nu}{k}-1}$$

$$\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = k\,\varkappa\,\varkappa'\, M\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu-1}{k}\right)}{(j+\nu)\,\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+\nu}{k}\right)}.$$

Wie in § 5 ergibt sich nun, daß die Integralgleichungen (d) durch Funktionen $w_\alpha(t)$ von solcher Beschaffenheit befriedigt werden, daß $t^{-\frac{r+j}{k}+1} w_\alpha(t)$ in $\mathfrak{R}$ regulär ist.

In dem Gebiet $\mathfrak{R}(x^k e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ sind nicht nur die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, sondern, wenn $\sigma(\omega) \geqq 0$ ist und daher $x = 0$ nicht im Innern des Gebietes liegt[16]), auch die Funktionen $P_\alpha(x)$ regulär. Es bestehen daher Ungleichungen

$$|G_\alpha(t)| \leqq B\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

wo ε beliebig klein und B hinreichend groß ist.

Wenn $h > \sigma(\omega)$ und C hinreichend groß genommen wird, ist im Sektor $\mathfrak{S}$

$$|w_\alpha(t)| < C\,e^{h|t|}\text{ [17]}) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Wenn man dieselbe Schlußweise und Bezeichnungsweise wie in § 5 anwendet, ist für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

$$|kt - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leqq m A C k\,|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + B\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|}\text{ [18]}),$$

$$|t|^{1-\frac{1}{k}} \cdot \left|k - \frac{a_\alpha}{t}\right| \leqq m A\,k + \frac{B}{C}\,|t|^{\frac{\bar{r}+j-1}{k}-1} e^{-(h-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|}.$$

Im Falle $k = 1$ hat man

$$|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leqq \frac{m A C e^{h|t|}}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} + B\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

$$|t - a_\alpha| \leqq \frac{m A}{h - \sigma(\omega) - \varepsilon} + \frac{B}{C}\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1} e^{(\sigma-\sigma(\omega)-\varepsilon)|t|}.$$

Man schließt weiter wie in § 5.

Die Lösung unseres Systems linearer Differentialgleichungen erscheint in einer anderen Form, wenn man *eine neue unabhängige Veränderliche* einführt. Wir erhalten so ein Verfahren, das wir in § 7 auf Integraldifferentialgleichungen zu übertragen haben und das wir hier für Differentialgleichungen ohne Ausführung der Beweise andeuten.

---

[16]) Indem man x durch $x +$ Konst. ersetzt, erreicht man, daß $x = 0$ eine singuläre Stelle mindestens einer der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ wird.

[17]) Im Falle $\bar{r} + j < k$ gilt diese Ungleichung für $|t| \geqq t_0$ ($t_0 > 0$ beliebig klein), während $|w_\alpha(t)| < c\,|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}-1}$ für $|t| < t_0$ ist.

[18]) Im Falle $\bar{r} + j < k$ kommt auf der rechten Seite das Glied hinzu (vgl. § 5):

$$\frac{m B c\,\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{\bar{r}+j+1}{k}\right)}|t|^{\frac{\bar{r}+j+1}{k}-1} e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|t|}.$$

Die Differentialgleichungen (c) gehen unter Einführung der Veränderlichen

$$\mathfrak{x} = \frac{x^k}{k} + b'\frac{x^{k-1}}{k-1} + \dots + b^{(k-1)}x,$$

wo $b', \dots b^{(k-1)}$ beliebige Konstante sind, in

$$\frac{dz_\alpha}{d\mathfrak{x}} + \sum_{\beta=1}^{m} \mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x})\, z_\beta + \mathfrak{P}_\alpha(\mathfrak{x}) = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, m)$$

über; dabei sind die Funktionen

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}) = \frac{P_{\alpha\beta}(x)}{1+\frac{b'}{x}+\dots+\frac{b^{(k-1)}}{x^{k-1}}}, \quad \mathfrak{P}_\alpha(\mathfrak{x}) = \frac{P_\alpha(x)}{1+\frac{b'}{x}+\dots+\frac{b^{(k-1)}}{x^{k-1}}}$$

abgesehen von $x = 0$ im Regularitätsgebiet der Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$ ebenfalls regulär, wenn man von den Nullstellen $q', \dots, q^{(k-1)}$ von $x^{k-1} + b'x^{k-2} + \dots + b^{(k-1)}$ absieht. Die Werte $\mathfrak{x} = \mathfrak{q}', \dots, \mathfrak{q}^{(k-1)}$, welche zu $x = q', \dots, q^{(k-1)}$ gehören, sind Verzweigungsstellen der Funktion x von $\mathfrak{x}$, welche in der Umgebung von $\mathfrak{x} = \infty$ eine Entwicklung von der Form

$$x = (k\mathfrak{x})^{\frac{1}{k}}\left(1 + \frac{\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}} + \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{x}^{\frac{2}{k}}} + \dots\right)$$

zuläßt. Dann gelten in der Umgebung von $\mathfrak{x} = \infty$ Reihenentwicklungen

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{\mathfrak{x}^{\frac{\lambda}{k}}}, \qquad \mathfrak{P}_\alpha(\mathfrak{x}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_\alpha^{(\lambda)}}{\mathfrak{x}^{\frac{r+j+\lambda}{k}}}.$$

wo $\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(0)} = a_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ ist. Singuläre Stellen von $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x})$ sind außer der Verzweigungsstelle $\mathfrak{x} = \infty$ die Werte $\mathfrak{q}', \dots, \mathfrak{q}^{(k-1)}$ sowie die Werte von $\mathfrak{x}$, welche den singulären Stellen von $P_{\alpha\beta}(x)$ entsprechen.

Die Laplacesche Transformation

$$z_\alpha = \int_0^\infty \mathfrak{w}_\alpha(t)\, e^{-t\mathfrak{x}}\, dt \qquad (\alpha = 1, \dots, m)$$

führt auf die Integralgleichungen

$$(\mathfrak{d}) \quad (t - a_\alpha)\,\mathfrak{w}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t-\tau)\,\mathfrak{w}_\alpha(\tau)\,d\tau + \mathfrak{G}_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\, t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}, \quad \mathfrak{G}_\alpha(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_\alpha^{(\lambda)}\, t^{\frac{r+j+\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)}$$

für alle t außer $t=0$ konvergent sind. Die Gleichungen ($\mathfrak{d}$) werden durch Funktionen $\mathfrak{w}_a(t)$ von solcher Beschaffenheit befriedigt, daß $t^{-\frac{r+j}{k}+1}\,\mathfrak{w}_a(t)$ in der Umgebung von $t=0$ in eine konvergente Potenzreihe von $t^{\frac{1}{k}}$ entwickelbar ist. Auf einer Geraden $\arg t=\omega$, welche durch keine der singulären Stellen $a_1, \ldots, a_m$ geht, ist $\mathfrak{w}_a(t)$ abgesehen von $t=0$ regulär und erfüllt die Bedingung

$$|\mathfrak{w}_a(t)| < Ce^{(\mathfrak{s}(\omega)+\varepsilon)|t|},$$

wo ε eine beliebig kleine und C eine hinreichend große positive Größe ist; $\mathfrak{s}(\omega)$ ist dadurch definiert, daß die Funktionen $\mathfrak{P}_{a\beta}(\mathfrak{x})$ im Gebiet $\Re(\mathfrak{x}e^{i\omega}) > \mathfrak{s}(\omega)$ abgesehen von $\mathfrak{x}=\infty$ regulär sind. Die obigen über die Gerade $\arg t=\omega$ erstreckten Laplaceschen Integrale für die Funktionen z_a sind in diesem Gebiet konvergent und genügen den Differentialgleichungen ($\mathfrak{c}$).

III. Homogene Gleichungen, $k>1$.

§ 7.

Es sei jetzt k eine beliebige ganze positive Zahl.

Die Gleichungen (A) werden durch Reihen

$$\varphi_a(x) = e^{-\vartheta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{an} x^{r+n} \qquad (a=1, \ldots, m)$$

formal befriedigt, wo

$$\vartheta(x) = \frac{a}{kx^k} + \frac{a^{(1)}}{(k-1)x^{k-1}} + \ldots + \frac{a^{(k-1)}}{x}$$

und a eine der voneinander und von 0 verschiedenen Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ ist. Wir nehmen $a=a_1$ an. Durch die Substitution $\varphi_a(x) = e^{-\vartheta(x)}\Phi_a(x)$ erhalten wir die Gleichungen

$$x^{k+1}\frac{d\Phi_a(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m}\left(P_{a\beta}(x) - (a + a^{(1)}x + \ldots + a^{(k-1)}x^{k-1})\delta_{a\beta}\right)\Phi_\beta(x)$$
$$+\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^x Q_{a\beta}(x,y)\,e^{\vartheta(x)-\vartheta(y)}\,\Phi_\beta(y)\,dy \qquad (a=1, \ldots, m).$$

Die Integrale

$$J_\mu = \int_0^x y^{r+\mu} e^{\vartheta(x)-\vartheta(y)}\,dy \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind konvergent, wenn der Integrationsweg den Nullpunkt innerhalb des

Sektors $\frac{\arg a - \frac{\pi}{2}}{k} < \arg y < \frac{\arg a + \frac{\pi}{2}}{k}$ verläßt, so daß $\lim |\arg \vartheta(y)| < \frac{\pi}{2}$ ist. Durch wiederholte Anwendung der Formel

$$J_\mu = -\frac{1}{a} x^{r+\mu+k+1} - \frac{a^{(1)}}{a} J_{\mu+1} - \dots - \frac{a^{(k-1)}}{a} J_{\mu+k-1} - \frac{r+\mu+k+1}{a} J_{\mu+k}$$

erhält man die formale Reihenentwicklung

$$J_\mu = -\frac{1}{a} x^{r+\mu+k+1} + \frac{a^{(1)}}{a^2} x^{r+\mu+k+2} + \dots .$$

Setzt man in den obigen Gleichungen $\Phi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n}$ und vergleicht man, nachdem die Integrale durch formale Reihen ersetzt sind, in der zu $\alpha = 1$ gehörigen Gleichung die Koeffizienten von $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+k-1}, x^{r+k}, x^{r+k+1}, \dots, x^{r+k+j-1}$, so erhält man $a = a_1, a^{(1)}, \dots, a^{(k-1)}, r, A_{11}, \dots, A_{1,j-1}$, während A_{10} unbestimmt bleibt. Wenn man in der zu $\alpha = 2, \dots, m$ gehörigen Gleichung die Koeffizienten von $x^r, x^{r+1}, \dots, x^{r+j-1}$ vergleicht, ergeben sich $A_{\alpha 0} = 0, A_{\alpha 1}, \dots A_{\alpha, j-1}$. Wenn man in den Integraldifferentialgleichungen für $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ Φ_α durch $A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1}$ ersetzt, drückt sich der Unterschied zwischen der linken und der rechten Seite bei der ersten Gleichung durch $x^{r+k+j}, x^{r+k+j+1}, \dots$, bei den übrigen Gleichungen durch $x^{r+j}, x^{r+j+1}, \dots$ aus.

Unter der Annahme, daß $\bar{r} + j > 0$ und $j > 0$ ist, setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} (A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \dots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x)) \qquad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Die Gleichungen für die Φ_α gehen, wenn man J_μ $(\mu < j-1)$ durch $x^{r+\mu+k+1}, \dots, x^{r+j+k-1}, J_{j-1}, \dots, J_{j+k-1}$ ausdrückt, in die Gleichungen

$$(\mathrm{B}) \left\{ \begin{aligned} x^{k+1} \frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} &= \sum_{\beta=1}^{m} (P_{\alpha\beta}(x) - (a + a^{(1)} x + \dots + a^{(k-1)} x^{k-1}) \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) \\ &+ \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^x Q_{\alpha\beta}(x, y) e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} \psi_\beta(y) dy + R_\alpha(x) + \\ &+ \int_0^x S_\alpha(x, y) e^{\vartheta(x) - \vartheta(y)} dy \qquad (\alpha = 1, \dots, m) \end{aligned} \right.$$

über; dabei ist

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^{r+j+\lambda}, \quad S_\alpha(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{\infty} d_\alpha^{(\lambda, \mu)} x^\lambda y^{r+j+\mu-1} \quad (\alpha = 1, \dots, m)$$

und $c_1^{(0)} = c_1^{(1)} = \ldots = c_1^{(k-1)} = 0$, weil, wenn man $\psi_1, \ldots, \psi_m$ durch Null ersetzt, in den Gleichungen (B) die Glieder mit $x^r, x^{r+1}, \ldots, x^{r+j-1}$ und in der ersten Gleichung außerdem diejenigen mit $x^{r+j}, \ldots, x^{r+j+k-1}$ fortfallen. Die Funktionen $x^{-r-j} R_\alpha^{\cdot}(x)$, $y^{-r-j+1} S_\alpha(x, y)$ sind in der Umgebung von $x = 0$ bzw. $x = 0$, $y = 0$ regulär.

Wir setzen

$$\vartheta(x) = \frac{a}{\mathfrak{x}},$$

so daß

$$x = \mathfrak{x}^{\frac{1}{k}} \mathfrak{f}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}), \quad dx = \mathfrak{x}^{\frac{1}{k}-1} \mathfrak{g}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}) dx$$

ist, wo $\mathfrak{f}(\xi)$, $\mathfrak{g}(\xi)$ in der Umgebung von $\xi = 0$ regulär sind und $\mathfrak{f}(0) = k^{-\frac{1}{k}}$, $\mathfrak{g}(0) = k^{-\frac{1}{k}-1}$ ist. Dadurch gehen die Gleichungen (B) über in

$$(\mathfrak{B}) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}^2 \dfrac{d\psi_\alpha(x)}{d\mathfrak{x}} = \sum\limits_{\beta=1}^{m} (\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}) - a_1 \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(x) + \\ \quad + \sum\limits_{\beta=1}^{m} \int\limits_0^{\mathfrak{x}} \mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}, \mathfrak{y}^{\frac{1}{k}}) \mathfrak{y}^{\frac{1}{k}-1} e^{\frac{a_1}{\mathfrak{x}} - \frac{a_1}{\mathfrak{y}}} \psi_\beta(y) d\mathfrak{y} + \\ \quad + \mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}) + \int\limits_0^{\mathfrak{x}} \mathfrak{S}_\alpha(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}, \mathfrak{y}^{\frac{1}{k}}) e^{\frac{a_1}{\mathfrak{x}} - \frac{a_1}{\mathfrak{y}}} d\mathfrak{y} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m); \end{cases}$$

$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}, \mathfrak{y}^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}})$, $\mathfrak{S}_\alpha(\mathfrak{x}^{\frac{1}{k}}, \mathfrak{y}^{\frac{1}{k}})$ gehen aus $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$, $R_\alpha(x)$, $S_\alpha(x, y)$ durch Division mit $1 + \frac{a^{(1)}}{a} x + \ldots + \frac{a^{(k-1)}}{a} x^{k-1}$ hervor; es ist

$$\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \xi^\lambda; \quad \mathfrak{a}_{\alpha\alpha}^{(0)} = a_\alpha, \quad \mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(0)} = 0 \ (\alpha \gtrless \beta),$$

$$\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi, \eta) = \sum_{\lambda, \mu = 0}^{\infty} \mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} \xi^\lambda \eta^\mu,$$

$$\mathfrak{R}_\alpha(\xi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{c}_\alpha^{(\lambda)} \xi^{r+j+\lambda}; \quad \mathfrak{c}_1^{(0)} = \mathfrak{c}_1^{(1)} = \ldots = \mathfrak{c}_1^{(k-1)} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_\alpha(\xi, \eta) = \sum_{\lambda, \mu = 0}^{\infty} \mathfrak{d}_\alpha^{(\lambda,\mu)} \xi^\lambda \eta^{r+j+\mu}.$$

Die Laplacesche Transformation

$$\psi_\alpha(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathfrak{w}_\alpha(t) e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

führt bei zunächst formaler Rechnung zu den Integralgleichungen

$$
(\mathfrak{C})\quad\left\{
\begin{aligned}
&(t-a_\alpha+a_1)\,\mathfrak{w}_\alpha(t)=\sum_{\beta=1}^{m}\mathfrak{F}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{w}_\beta(t)+\frac{1}{t+a_1}\sum_{\beta=1}^{m}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}\,\mathfrak{w}_\beta(t)+\\
&+\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{1}{\tau+a_1}\,\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\,\mathfrak{w}_\beta(\tau)\,d\tau+\mathfrak{M}_\alpha(t)+\frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1}+\\
&+\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau\qquad(\alpha=1,\ldots,m);
\end{aligned}\right.
$$

dabei sind die für alle t außer $t=0$ konvergenten Reihen eingeführt:

$$
\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\,t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)},
$$

$$
\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\,t^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k}+1\right)}\qquad(\lambda=0,1,2,\ldots),
$$

$$
\mathfrak{M}_\alpha(t)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{c}_\alpha^{(\lambda)}\,t^{\frac{r+j+\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)},
$$

$$
\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_\alpha^{(\lambda,\mu)}\,t^{\frac{r+j+\mu}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k}+1\right)}\qquad(\lambda=0,1,2,\ldots).
$$

Die Integralgleichungen $(\mathfrak{C})$ können auch in der Form geschrieben werden:

$$
(\mathfrak{D})\quad\left\{
\begin{aligned}
&(t-a_\alpha+a_1)\,\mathfrak{w}_\alpha(t)=\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^t\Big\{\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t-\tau)+\frac{1}{t+a_1}\,\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(t-\tau)+\\
&+\int_\tau^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{1}{z+a_1}\,\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(z-\tau)\,dz\Big\}\,\mathfrak{w}_\beta(\tau)\,d\tau+\\
&+\mathfrak{M}_\alpha(t)+\frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t+a_1}+\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau\quad(\alpha=1,\ldots,m).
\end{aligned}\right.
$$

Dabei möge die Veränderliche τ die Grade $0\ldots t$ und die Veränderliche z die Gerade $\tau\ldots t$ durchlaufen.

Die Funktionen $t^{-\frac{r+j}{k}}\mathfrak{M}_1(t)$, $t^{1-\frac{r+j}{k}}\mathfrak{M}_\alpha(t)$ $(\alpha=2,\ldots,m)$, $t^{-\frac{r+j}{k}}\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)$ $(\alpha=1,\ldots,m)$ sind ganze transzendente Funktionen von $t^{\frac{1}{k}}$; $(t-\tau)^{-\frac{1}{k}}\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t-\tau)$ und $(t-\tau)^{-\frac{1}{k}}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t-\tau)$ sind ganze transzendente Funktionen von $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$. Durch die Substitution $\tau=t\zeta$ erhält man

$$\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau-a_1}d\tau=$$

$$=t^{\frac{r+j+1}{k}}\int_0^1\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{t^{\frac{\lambda-1}{k}}(1-\zeta)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\;\frac{1}{a_1+t\zeta}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}t^{\frac{\mu}{k}}\zeta^{\frac{r+j+\mu}{k}}}{\Gamma\left(\frac{r+j+1}{k}+1\right)}d\zeta;$$

das letzte über die Gerade $0\ldots1$ erstreckte Integral ist für alle endlichen t regulär mit Ausnahme des Punktes $t=0$, wo es eine reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist, und der Punkte der Geraden $t=-\frac{a_1}{\zeta}$ $(\zeta=0\ldots1)$. Die Substitution $z=t-(t-\tau)\zeta$ ergibt

$$\int_\tau^t \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\frac{1}{z+a_1}\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(z-\tau)dz=$$

$$=(t-\tau)^{\frac{2}{k}}\int_0^1\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda-1}{k}}\zeta^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}(t-\tau)^{\frac{\mu}{k}}(1-\zeta)^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k}+1\right)}\frac{d\zeta}{a_1+t-(t-\tau)\zeta};$$

auf der Geraden $0\ldots t$ ist $\tau=\Theta t$ $(\Theta=0\ldots1)$, also

$$a_1+t-(t-\tau)\zeta=a_1+t(1-(1-\Theta)\zeta)=a_1+t\vartheta\quad(\vartheta=0\ldots1),$$

so daß $a_1+t-(t-\tau)\zeta$ nur dann verschwindet, wenn $t=-\frac{a_1}{\vartheta}$ $(\vartheta=1\ldots0)$ ist; das letzte über die Gerade $0\ldots1$ erstreckte Integral ist eine reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$, wenn τ auf der Geraden $0\ldots t$, aber t nicht auf der Halbgeraden $t=-\frac{a_1}{\vartheta}$ $(\vartheta=1\ldots0)$ liegt.

§ 8.

Das Gebiet $\mathfrak{T}$ sei von allen Punkten t (mit Ausschluß von $t=\infty$) gebildet, deren Verbindungsstrecke mit $t=0$ keine der singulären Stellen $-a_1, a_2-a_1, \ldots, a_m-a_1$ enthält; τ sei ein Punkt der Strecke $0\ldots t$. Wenn wir die Gleichungen $(\mathfrak{D})$ in der Form

$$t\mathfrak{w}_1(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{1\beta}(t,\tau)\mathfrak{w}_\beta(\tau)d\tau + f_1(t),$$

$$\mathfrak{w}_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\mathfrak{w}_\beta(\tau)d\tau + f_\alpha(t) \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

schreiben, sind die Funktionen $t^{-\frac{r+j}{k}} f_1(t)$, $t^{1-\frac{r+j}{k}} f_\alpha(t)$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$ in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktionen von $t^{\frac{1}{k}}$, während $(t-\tau)^{1-\frac{1}{k}} f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ eine reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ ist. Die in $f_{\alpha\beta}(t,\tau)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ enthaltenen Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$, $(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}$, ..., $(t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ rühren nur von $\mathfrak{F}_{\alpha\beta}$, aber nicht von $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, die in $f_\alpha(t)$ enthaltenen Glieder mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$, $t^{\frac{r+j+1}{k}-1}$, ..., $t^{\frac{r+j-1}{k}}$ nur von $\mathfrak{M}_\alpha(t)$ und nicht von $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ her. Die bezeichneten Glieder bleiben also ungeändert, wenn man die Funktionen $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}$ durch 0, d. h. die Integraldifferentialgleichungen (A) durch die Differentialgleichungen

$$x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

ersetzt.

Wenn wir aus den Integralgleichungen ($\mathfrak{D}$) wie in § 2 $\mathfrak{w}_2(t)$, ..., $\mathfrak{w}_m(t)$ eliminieren, erhalten wir eine Integralgleichung

$$t\mathfrak{w}_1(t) = \int_0^t F(t,\tau)\mathfrak{w}_1(\tau)d\tau + E(t),$$

worin nach § 6 $F(t,\tau)$ eine mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$ multiplizierte in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ und $E(t)$ eine mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$ multiplizierte in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$ ist. Wenn wir diese Integralgleichung nicht aus den Gleichungen (A), sondern aus den Differentialgleichungen

$$x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

herleiten, kommen in $F(t,\tau)$ Glieder mit $(t-\tau)^{\frac{1}{k}-1}$, $(t-\tau)^{\frac{2}{k}-1}$, ..., $(t-\tau)^{\frac{k-1}{k}-1}$ und in $E(t)$ Glieder mit $t^{\frac{r+j}{k}-1}$, $t^{\frac{r+j+1}{k}-1}$, ..., $t^{\frac{r+j-1}{k}}$ nicht vor. Da aber diese Glieder sich beim Übergang von den Gleichungen (A) zu den Differentialgleichungen nicht ändern, so ist auch in unserem Falle $F(t, \tau)$ eine in $\mathfrak{T}$ reguläre Funktion von t und $(t-\tau)^{\frac{1}{k}}$ und $E(t)$ gleich dem Produkt aus $t^{\frac{r+j}{k}}$ und einer in $\mathfrak{T}$ regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$. Wie in § 6 ergibt sich $\mathfrak{w}_\alpha(t)$ als Produkt aus $t^{\frac{r+j}{k}-1}$ und einer in $\mathfrak{T}$, also auch in der Umgebung von $t=0$, regulären Funktion von $t^{\frac{1}{k}}$.

Wir nehmen an, die Potenzreihen $\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(\xi)$, $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}(\xi, \eta)$, $\xi^{-r-j}\, \mathfrak{R}_\alpha(\xi)$, $\eta^{-r-j}\, \mathfrak{S}_\alpha(\xi, \eta)$ seien für $|\xi| < \varrho$ bzw. $|\xi| < \varrho$, $|\eta| < \varrho$ konvergent, so daß, wenn $\sigma > \frac{1}{\varrho}$ angenommen wird,

$$\left|\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\right| \leqq \mathfrak{a}\sigma^\lambda, \quad \left|\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\right| \leqq \mathfrak{b}\sigma^{\lambda+\mu}, \quad \left|\mathfrak{c}_\alpha^{(\lambda)}\right| \leqq \mathfrak{c}\sigma^\lambda, \quad \left|\mathfrak{d}_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)}\right| \leqq \mathfrak{d}\sigma^{\lambda+\mu}$$

ist. Dann ist

$$|\mathfrak{F}_{\alpha\beta}(t)| \leqq \mathfrak{a} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} < \mathfrak{A}\,|t|^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k |t|} \text{ [19]},$$

$$\left|\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)\right| \leqq \mathfrak{b}\sigma^{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\left(\sigma|t|^{\frac{1}{k}}\right)^{\mu+1}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k}+1\right)} < \mathfrak{b}\sigma^{\lambda-1} E_{\frac{1}{k}}\left(\sigma|t|^{\frac{1}{k}}\right) < \mathfrak{B}\sigma^\lambda e^{\sigma^k |t|}.$$

Ferner ist, wenn $\arg t$ zwischen endlichen Schranken bleibt,

$$\left|\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)\right| \leqq \varkappa\mathfrak{d}\,\sigma^\lambda \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\sigma^\mu |t|^{\frac{\bar{r}+j+\mu}{k}}}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k}+1\right)\right|}$$

oder, da eine Ungleichung

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{k}+1\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\mu}{k}+1\right)\right|} < c \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht,

$$\left|\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)\right| < \varkappa c\,\mathfrak{d}\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} E_{\frac{1}{k}}\left(\sigma|t|^{\frac{1}{k}}\right) < \mathfrak{N}\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k |t|}.$$

Endlich haben wir

$$|\mathfrak{M}_\alpha(t)| \leqq \varkappa\mathfrak{c} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar{r}+j+\lambda}{k}-1}}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)\right|};$$

---

[19]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 309.

für $|t| > 1$ ist

$$\varkappa \mathfrak{c} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar r + j + \lambda}{k} - 1}}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)\right|} < L|t|^{\frac{\bar r + j}{k}} < L|t|^{\frac{\bar r + j}{k}} e^{\varrho^k |t|},$$

ferner ist

$$\varkappa \mathfrak{c} \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\bar r + j + \lambda}{k} - 1}}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}\right)\right|} = \varkappa \mathfrak{c} \sigma^k |t|^{\frac{\bar r + j}{k}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\sigma |t|^{\frac{1}{k}})^\lambda}{\left|\Gamma\left(\frac{r+j+\lambda}{k}+1\right)\right|}$$

$$< \varkappa C \mathfrak{c} \sigma^k |t|^{\frac{\bar r + j}{k}} E_{\frac{1}{k}}(\sigma |t|^{\frac{1}{k}}) < L' |t|^{\frac{\bar r + j}{k}} e^{\sigma^k |t|};$$

also haben wir für $|t| > 1$

$$|\mathfrak{M}_\alpha(t)| < \mathfrak{M} |t|^{\frac{\bar r + j}{k}} e^{\sigma^k |t|}.$$

Wie in § 3 sei $\mathfrak{S}$ ein Sektor, der von zwei von $t = 0$ nach $t = \infty$ gehenden Geraden begrenzt wird und die Punkte $-a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ weder im Innern noch auf dem Rande enthält. Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist

$$|\mathfrak{w}_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wenn $h > \frac{1}{\varrho^k}$ und C hinreichend groß ist[20]). Nach früherer Schlußweise brauchen wir nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|\mathfrak{w}_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ in $\mathfrak{S}$ ($|t'| = R'$), $|\mathfrak{w}_\alpha(t)| \leqq C e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \ldots, m$ und $|t| \leqq R'$ in $\mathfrak{S}$, auf einen Widerspruch führt.

Nach ($\mathfrak{C}$) ist für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

$$|t - a_\alpha + a_1| \cdot |\mathfrak{w}_\alpha(t)| \leqq \sum_{\beta=1}^{m} |\mathfrak{F}_{\alpha\beta} \mathfrak{w}_\beta(t)| + \sum_{\beta=1}^{m} \left| \frac{\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)} \mathfrak{w}_\beta(t)}{t + a_1} \right|$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{\tau + a_1} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)} \mathfrak{w}_\beta(\tau)\, d\tau \right| + |\mathfrak{M}_\alpha(t)| + \left| \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(0)}(t)}{t + a_1} \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau + a_1} d\tau \right|.$$

Rechts ist $|\mathfrak{w}_\beta(t)| \leqq C e^{h|t|}$, also wie in § 5

$$|\mathfrak{F}_{\alpha\beta} \mathfrak{w}_\beta(t)| \leqq \int_0^{|t|} \mathfrak{A}(|t| - |\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} \cdot C e^{h|\tau|} d|\tau| < \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|},$$

[20]) Im Falle $\bar r + j < k$ ist $|w_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$ für $|t| \geqq t_0$, $|w_\alpha(t)| < c|t|^{\frac{\bar r + j}{k} - 1}$ für $|t| < t_0$. Dabei ist $t_0 > 0$ beliebig klein, c hinreichend groß.

$$\left|\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\,\mathfrak{w}_\beta(t)\right| \leqq \int\limits_0^{|t|} \mathfrak{B}\sigma^\lambda e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)}\cdot C e^{h|\tau|}\,d|\tau| < \frac{\mathfrak{B}C\sigma^\lambda e^{h|t|}}{h-\sigma^k}$$

und, wenn in $\mathfrak{S}$ $|t+a_1| \geqq D > 0$ ist,

$$\left|\frac{\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}\,\mathfrak{w}_\beta(t)}{t+a_1}\right| < \frac{\mathfrak{B}Ce^{h|t|}}{D(h-\sigma^k)}\,.$$

Ferner ist[21])

$$\left|\int\limits_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{1}{\tau+a_1}\,\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}\,\mathfrak{w}_\beta(\tau)\,d\tau\right| \leqq \frac{\mathfrak{B}C\sigma^k}{D(h-\sigma^k)} \int\limits_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda(|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,e^{h|t|}\,d|\tau|$$

$$< \frac{\mathfrak{B}'C}{D(h-\sigma^k)} \int\limits_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} e^{h|\tau|}\,d|\tau| < \frac{k\mathfrak{B}'C|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}}{D(h-\sigma^k)}\,;$$

$$\left|\frac{\mathfrak{R}_0(t)}{t+a_1}\right| < \frac{\mathfrak{R}|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|t|}}{D}\,;$$

$$\left|\int\limits_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,\frac{\mathfrak{R}_\alpha^{(\lambda)}(\tau)}{\tau+a_1}\,d\tau\right| \leqq \frac{\mathfrak{R}}{D} \int\limits_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda(|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\,|\tau|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|\tau|}\,d|\tau|$$

$$< \frac{\mathfrak{R}'}{D}|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} \int\limits_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}-1} e^{\sigma^k(|t|-|\tau|)} e^{\sigma^k|\tau|}\,d|\tau| = \frac{k\mathfrak{R}'}{D}|t|^{\frac{\bar{r}+j+1}{k}} e^{\sigma^k|t|}\,.$$

Für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ ist also

$$|t-a_\alpha+a_1|\cdot Ce^{h|t|} \leqq m\mathfrak{A}Ck|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + \frac{m\mathfrak{B}Ce^{h|t|}}{k-\sigma^k} + \frac{mk\mathfrak{B}'C|t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|}}{D(h-\sigma^k)}$$

$$+ \mathfrak{M}|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\varrho^k|t|} + \frac{\mathfrak{R}}{D}|t|^{\frac{\bar{r}+j}{k}} e^{\sigma^k|t|} + \frac{k\mathfrak{R}'}{D}|t|^{\frac{\bar{r}+j+k+1}{k}} e^{\sigma^k|t|}\,.$$

Die weiteren Schlüsse gestalten sich wie früher in § 3.

Die Integrale

$$\psi_\alpha(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathfrak{w}_\alpha(t)\,e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\,dt \qquad (\alpha = 1, \ldots m),$$

welche über die im Sektor $\mathfrak{S}$ verlaufende Gerade $\arg t = \omega$ erstreckt werden,

---

21) Dabei wird von der für alle positiven t gültigen Ungleichung Gebrauch gemacht:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sigma^\lambda t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} < \mathfrak{H}\,t^{\frac{1}{k}} e^{\sigma^k t}.$$

genügen den Gleichungen ($\mathfrak{C}$), wenn $\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\mathfrak{x}}\right) > \frac{1}{\varrho^k}$, $|\arg a_1 - \arg \mathfrak{x}| < \frac{\pi}{2}$ ist. Der Beweis wird wie im Falle $k = 1$ in § 4 geführt.

Wenn $\bar{r} > 0$ und $j = 0$ ist, setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)} \psi_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

dann verschwinden die Funktionen $\mathfrak{R}_\alpha(\xi)$, $\mathfrak{S}_\alpha(\xi, \eta)$, $\mathfrak{M}_\alpha(t)$, $\mathfrak{N}_\alpha^{(\lambda)}(t)$, $f_\alpha(t)$, $E(t)$ identisch.

Wir haben den Satz:

Die Gleichungen (A) *werden durch Reihen*

$$\varphi_\alpha(x) = e^{\vartheta(x)} \sum_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n} x^{r+n} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt, wo

$$\vartheta(x) = \frac{a}{kx^k} + \frac{a^{(1)}}{(k-1)x^{k-1}} + \cdots + \frac{a^{(k-1)}}{x}$$

und a eine der Zahlen $a_1 \ldots a_m$, *z. B.* $a = a_1$ *ist. Sie gehen, wenn man*

$$\vartheta(x) = \frac{a}{\mathfrak{x}}, \quad \varphi_\alpha(x) = e^{-\vartheta(x)}\left(A_{\alpha 0} x^r + A_{\alpha 1} x^{r+1} + \cdots + A_{\alpha, j-1} x^{r+j-1} + \psi_\alpha(x)\right)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m)$$

setzt, wo der reelle Teil von $r + j$ *positiv ist, in die Gleichungen* ($\mathfrak{B}$) *über, aus welchen die Integralgleichungen* ($\mathfrak{D}$) *hervorgehen. Diese werden durch Funktionen* $\mathfrak{w}_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ *von solcher Beschaffenheit befriedigt, daß* $t^{1-\frac{r+j}{k}} \mathfrak{w}_\alpha(t)$ *in einem Kreis um den Nullpunkt, welcher keine der singulären Stellen* $-a_1$, $a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_1$ *enthält, regulär ist. Die Funktionen* $\mathfrak{w}_\alpha(t)$ *lassen sich auf einer Geraden* $\arg t = \omega$, *welche keine der singulären Stellen enthält, regulär fortsetzen und erfüllen auf dieser Geraden für* $|t| \geqq t_0 > 0$ *die Ungleichungen* $|\mathfrak{w}_\alpha(t)| < Ce^{h|t|}$, *wo* $h > \varrho^{-\frac{1}{k}}$ *und C hinreichend groß ist. Nach Einführung der über die Gerade* $\arg t = \omega$ *erstreckten* *Laplaceschen* *Integrale*

$$\psi_\alpha(x) = \int_0^\infty \mathfrak{w}_\alpha(t) e^{-\frac{t}{\mathfrak{x}}} dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügen die obigen Ausdrücke für die $\varphi_\alpha(x)$ *in dem Gebiet*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{\mathfrak{x}}\right) > \frac{1}{\varrho^k}, \qquad \left|\arg \frac{a}{\mathfrak{x}}\right| < \frac{\pi}{2}$$

den Gleichungen (A).

IV. Nichthomogene Gleichungen, $k \geqq 1$

§ 9.

Die nichthomogenen Gleichungen

$$(A^*) \quad x^{k+1}\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\varphi_\beta(y)\,dy + R_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo die Bezeichnungen des vorangehenden Abschnitts beibehalten sind, während

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=k}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$ [22]

in der Umgebung von $x = 0$ regulär ist, werden, wenn keine der Größen $a_1, \ldots, a_m$ verschwindet, durch Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{\alpha n} x^n \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

formal befriedigt. Die Laplacesche Transformation

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^\infty v_\alpha(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

führt unter Einführung der für alle t außer $t = 0$ konvergenten Reihen

$$F_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)},$$

$$G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{b_{\alpha\beta}^{(\lambda,\mu)} t^{\frac{\mu+1}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{k}\right)+1} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$H_\alpha(t) = \sum_{\lambda=k}^{\infty} \frac{c_\alpha^{(\lambda)} t^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}$$

---

[22]) Die Funktionen $R_\alpha(x)$ können, wenn sie in der Umgebung von $x = 0$ regulär sind, durch eine Substitution $\varphi_\alpha(x) = C_{\alpha 0} + C_{\alpha 1} x + \ldots + C_{\alpha, k-1} x^{k-1} + \Phi_\alpha(x)$ auf die vorausgesetzte Form gebracht werden.

auf das System von Integralgleichungen

$$(\mathrm{J}^*)\quad (t-a_\alpha)v_\alpha(t)=\sum_{\beta=1}^{m}F_{\alpha\beta}v_\beta(t)+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{1}{kt}G_{\alpha\beta}^{(0)}v_\beta(t)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\frac{1}{k\tau}G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}v_\beta(\tau)\,d\tau+H_\alpha(t)$$

$$(\alpha=1,\ldots,m),$$

welches durch die Reihen

$$v_\alpha(t)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{C_{\alpha n}t^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)}\qquad(\alpha=1,\ldots,m)$$

zunächst formal befriedigt wird

Wenn die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x,y)$, $R_\alpha(x)$ für $|x|<\varrho$ bzw. $|x|<\varrho$, $|y|<\varrho$ regulär sind und $\sigma>\frac{1}{\varrho}$ ist, bestehen Ungleichungen

$$|F_{\alpha\beta}(t)|\leqq\mathfrak{A}|t|^{\frac{1}{k}-1}e^{\sigma^k|t|},\quad |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)|\leqq\mathfrak{B}\sigma^\lambda e^{\sigma^k|t|},\quad |H_\alpha(t)|\leqq\mathfrak{C}e^{\sigma^k|t|}.$$

Wir verstehen unter $\mathfrak{R}$ einen Bereich der t-Ebene, welcher aus Kreissektoren vom Mittelpunkt $t=0$ und von endlichen Radien besteht und die ganze Umgebung des Nullpunktes ausfüllt, die Punkte $a_1,\ldots,a_m$ aber weder im Innern noch auf dem Rande enthält. In $\mathfrak{R}$ bestehen Ungleichungen

$$|F_{\alpha\beta}(t)|\leqq\mathfrak{F}|t|^{\frac{1}{k}-1},\qquad |G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(t)|\leqq\mathfrak{G}\sigma^\lambda|t|^{\frac{1}{k}},\qquad |H_\alpha(t)|\leqq\mathfrak{H},$$

wo $\mathfrak{F},\mathfrak{G},\mathfrak{H}$ Konstante sind, und $|t-a_\alpha|\geqq D>0$.

Wir lösen die Integralgleichungen (J^*) durch aufeinanderfolgende Näherungen, indem wir setzen:

$$(t-a_\alpha)v_\alpha(t)=H_\alpha(t),$$

$$(t-a_\alpha)v_\alpha^{(\nu)}(t)=\sum_{\beta=1}^{m}F_{\alpha\beta}v_\beta^{(\nu-1)}(t)+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{1}{kt}G_{\alpha\beta}^{(0)}v_\beta^{(\nu-1)}(t)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{m}\int_0^t\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}\frac{1}{k\tau}G_{\alpha\beta}^{(\lambda)}v_\beta^{(\nu-1)}(\tau)\,d\tau\quad(\nu=1,2,\ldots).$$

Zunächst ist in $\mathfrak{R}$

$$\left|v_\alpha^{(0)}(t)\right|\leqq\mathfrak{C}_0,\qquad\mathfrak{C}_0=\frac{\mathfrak{H}}{D}.$$

Unter der Annahme

$$\left|v_\alpha^{(\nu-1)}(t)\right|\leqq\mathfrak{C}_{\nu-1}|t|^{\frac{\nu-1}{k}}$$

haben wir in $\mathfrak{R}$

$$\left|F_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu-1)}(t)\right| \leqq \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{\nu-1} \int_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}-1} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau|$$

$$= \mathfrak{F}\mathfrak{C}_{\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{k}+1\right)} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}},$$

$$\left|G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_\beta^{(\nu-1)}(t)\right| \leqq \mathfrak{G}\sigma^\lambda \mathfrak{C}_{\nu-1} \int_0^{|t|} (|t|-|\tau|)^{\frac{1}{k}} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau|$$

$$\leqq \mathfrak{G}\sigma^\lambda \mathfrak{C}_{\nu-1} |t|^{\frac{1}{k}} \int_0^{|t|} |\tau|^{\frac{\nu-1}{k}} d|\tau| \leqq \frac{k\mathfrak{G}\sigma^\lambda \mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}+1},$$

$$\left|\frac{1}{kt} G_{\alpha\beta}^{(0)} v_\beta^{(\nu-1)}(t)\right| \leqq \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \cdot |t|^{\frac{\nu}{k}},$$

$$\left|\int_0^t \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{k\tau} G_{\alpha\beta}^{(\lambda)} v_\beta^{(\nu-1)}(\tau) d\tau\right|$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} \int_0^{|t|} \sum_{\lambda=1}^\infty \sigma^\lambda \frac{(|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} |\tau|^{\frac{\nu}{k}} d|\tau|$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} |t|^{\frac{\nu}{k}} \sum_{\lambda=1}^\infty \sigma^\lambda \int_0^{|t|} \frac{(|t|-|\tau|)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} d|\tau| = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{C}_{\nu-1}}{\nu-1} |t|^{\frac{\nu}{k}} \sum_{\lambda=1}^\infty \frac{\sigma^\lambda |t|^{\frac{\lambda}{k}}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}+1\right)};$$

daher ist, wenn in $\mathfrak{R}$ $|t| \leqq \mathfrak{r}$ ist,

$$\left|v_\alpha^{(\nu)}(t)\right| \leqq \mathfrak{C}_\nu |t|^{\frac{\nu}{k}},$$

$$\frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} \leqq \frac{m\mathfrak{F}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-1}{k}+1\right)}{D\Gamma\left(\frac{\nu}{k}+1\right)} + \frac{m\mathfrak{G}}{D(\nu-1)} + \frac{m\mathfrak{G}}{D(\nu-1)} E_{\frac{1}{k}}\left(\sigma\mathfrak{r}^{\frac{1}{k}}\right).$$

Hiernach ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = 0;$$

die Reihen

$$v_\alpha(t) = \sum_{\nu=0}^\infty v_\alpha^{(\nu)}(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

sind in $\mathfrak{R}$ absolut und gleichmäßig konvergent, sie stellen in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktionen dar und genügen den Integralgleichungen (J^*).

Der Sektor $\mathfrak{S}$, der von zwei von $t=0$ ins Unendliche gehenden Geraden begrenzt wird, enthalte weder im Innern noch auf dem Rande eine der Stellen $a_1, \dots, a_m$. Im Sektor $\mathfrak{S}$ ist $|v_\alpha(t)| < C e^{h|t|}$ $(\alpha = 1, \dots, m)$, wo $h > \frac{1}{\varrho^k}$ und C hinreichend groß ist.

Wir brauchen, wenn wir die frühere Schlußweise anwenden, nur zu zeigen, daß die Annahme, es sei $|v_\alpha(t)| = C e^{h|t|}$ für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$ ($|t'| = R'$ hinreichend groß), $|v_\alpha(t)| \leqq C e^{h|t|}$ für $\alpha = 1, \dots, m$ und $|t'| \leqq R'$, auf einen Widerspruch führt. Unter dieser Annahme ist wie in § 8

$$|F_{\alpha\beta} v_\beta(t)| \leqq \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|},$$

$$\left|\frac{1}{kt} G^{(0)}_{\alpha\beta} v_\beta(t)\right| \leqq \frac{\mathfrak{B} C e^{h|t|}}{k},$$

$$\left|\int_0^t \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)} \frac{1}{k\tau} G^{(\lambda)}_{\alpha\beta} v_\beta(\tau)\, d\tau\right| \leqq \frac{\mathfrak{B}' C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)}.$$

Aus (J^*) folgt also für $\alpha = \alpha'$, $t = t'$

$$|t - a_\alpha| \cdot C e^{h|t|} \leqq m \mathfrak{A} C k |t|^{\frac{1}{k}} e^{h|t|} + \frac{m \mathfrak{B} C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)}$$
$$+ \frac{m \mathfrak{B}' C e^{h|t|}}{k(h-\sigma^k)^2} + \mathfrak{C} e^{\sigma^k |t|}.$$

Im Falle $k=1$ wird das erste Glied der rechten Seite dieser Ungleichung durch $\frac{m \mathfrak{A} C e^{h|t|}}{h-\sigma}$ ersetzt.

Die Integrale

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^\infty v_\alpha(t) e^{-\frac{t}{x^k}} dt \qquad (\alpha = 1, \dots, m),$$

welche über die durch keine der Stellen $a_1, \dots, a_m$ gehende Gerade $\arg t = \omega + 2q\pi$ $(q = 0, 1, \dots, k-1)$ erstreckt werden, sind in dem Gebiet

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \frac{1}{\varrho^k}, \quad \frac{(2q-\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q+\frac{1}{2})\pi + \omega}{k}\ ^{23})$$

konvergent und genügen den Gleichungen (A^*).

Es gilt der Satz:

Die nichthomogenen Gleichungen (A^*), *in welchen* $a_1, \dots, a_m$ *von Null verschieden sind, werden durch Potenzreihen*

[23]) Vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 25 (1916), S. 304f.

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{\alpha n}\, x^n \qquad (\alpha = 1, \ldots m)$$

formal befriedigt. Den Integralgleichungen (J^*) *genügen Funktionen* $v_\alpha(t)$, *welche sich in einem von den singulären Stellen* $a_1, \ldots, a_m$ *freien Kreise um* $t = 0$ *in die konvergenten Reihen*

$$v_\alpha(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_{\alpha n}\, t^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

entwickeln lassen und auf einer durch keine der Stellen $a_1, \ldots, a_m$ *gehenden Geraden* $\arg t = \omega$ *Ungleichungen*

$$|v_\alpha(t)| < C e^{h|t|} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

erfüllen, wo $h > \frac{1}{\varrho^k}$ [24]) *und* C *hinreichend groß ist. Die Gleichungen* (A^*) *werden durch die Integrale*

$$\varphi_\alpha(x) = \int_0^{\infty} v_\alpha(t)\, e^{-\frac{t}{x^k}}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt, welche, wenn auf dem geradlinigen Integrationsweg $\arg t = \omega + 2q\pi$ ($q = 0, 1, \ldots, k-1$) *angenommen wird, in dem Gebiet*

$$\Re\left(\frac{e^{i\omega}}{x^k}\right) > \frac{1}{\varrho^k}, \qquad \frac{(2q-\frac{1}{2})\pi + \omega}{k} < \arg x < \frac{(2q+\frac{1}{2})\pi + \omega}{k}$$

konvergieren.

V. Homogene und nichthomogene Gleichungen, $k = 0$.

§ 10.

Indem wir $k = 0$ annehmen, betrachten wir die Gleichungen

$$(A_0) \qquad x\frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\,\varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\,\varphi_\beta(y)\,dy \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $P_{\alpha\beta}(x)$ und $Q_{\alpha\beta}(x, y)$ die in der Einleitung angegebene Bedeutung haben. Zwischen den Größen $a_1, \ldots, a_m$ möge keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz bestehen [25]). Es sei, wenn der reelle Teil

---

[24]) Die Funktionen $P_{\alpha\beta}(x)$, $Q_{\alpha\beta}(x, y)$, $R_\alpha(x)$ sind für $|x| < \varrho$ bzw. $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$ regulär.

[25]) Die Größen $a_1, \ldots, a_m$ brauchen nicht sämtlich verschieden zu sein. Der benutzte Satz über die Lösungen der Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ ist ebenso wie die weiteren Schlüsse gültig, wenn die Determinante $\left|a_{\alpha\beta}^{(0)} - s\,\delta_{\alpha\beta}\right|$ ($\alpha, \beta = 1, \ldots, m$) die Elementarteiler $s - a_1, \ldots, s - a_m$ besitzt. Vgl. Math. Ann. 39 (1891), S. 391.

von a_α mit $\bar{a}_\alpha$ bezeichnet wird, $\bar{a}_1 \geqq \bar{a}_2 \geqq \dots \geqq \bar{a}_m$. Es sei a eine der Zahlen $a_1, \dots, a_m$ und $\bar{a}_\alpha > -1$. Wir schreiben die Systeme von Differentialgleichungen an:

$$x\frac{d\varphi_\alpha^{(0)}(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\,\varphi_\beta^{(0)}(x) \qquad (\alpha = 1, \dots, m);$$

$$x\frac{d\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta^{(\nu)}(x) + \Phi_\alpha^{(\nu)}(x)$$

$$\Phi_\alpha^{(\nu)}(x) = \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y)\,\varphi_\beta^{(\nu-1)}(y)\,dy$$

$$(\alpha = 1, \dots, m;\ \nu = 1, 2, \dots).$$

Die Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ besitzen die m zu $\beta = 1, \dots, m$ gehörigen linear unabhängigen Lösungen

$$x^{a_\beta}\,\mathfrak{p}_{\alpha\beta}(x) \qquad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $\mathfrak{p}_{\alpha\beta}(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Wir setzen

$$\varphi_\alpha^{(0)}(x) = x^a\,\mathfrak{p}_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \dots, m),$$

wo $\mathfrak{p}_\alpha(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Unter der Voraussetzung, daß $\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)$ gleich dem Produkt aus $x^{a+\nu-1}$ und einer für $|x| < \varrho$ regulären Funktion ist, ist $\Phi_\alpha^{(\nu)}(x)$ das Produkt aus $x^{a+\nu}$ und einer für $|x| < \varrho$ regulären Funktion. Dann wird das System für die $\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)$ durch mit $x^{a+\nu}$ multiplizierte reguläre Funktionen befriedigt. Eine solche Lösung erhält man, wenn $\nu > \bar{a}_1 - \bar{a}$, also $\bar{a} - \bar{a}_1 + \nu > 0$ und demnach auch $\bar{a} - \bar{a}_\beta + \nu > 0$ $(\beta = 1, \dots, m)$ ist, in der Form

$$\varphi_\alpha^{(\nu)}(x) = \sum_{\beta=1}^{m} x^{a_\beta}\,\mathfrak{p}_{\alpha\beta}(x)\int_0^x x^{-a_\beta-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\mathfrak{q}_{\gamma\beta}(x)\,\Phi_\gamma^{(\nu)}(x)\,dx \qquad (\alpha = 1, \dots, m);$$

dabei ist

$$\mathfrak{p}_{\alpha 1}\mathfrak{q}_{\gamma 1} + \dots + \mathfrak{p}_{\alpha m}\mathfrak{q}_{\gamma m} = \delta_{\alpha\gamma} \qquad (\alpha, \gamma = 1, \dots, m)$$

und $|\mathfrak{q}_{\gamma\beta}(x)|$ für $|x| < \varrho$ regulär. Es sei für $|x| \leqq \varrho_0$, $|y| \leqq \varrho_0$, $\varrho_0 < \varrho$

$$|\mathfrak{p}_{\alpha\beta}(x)| \leqq M, \quad |\mathfrak{q}_{\alpha\beta}(x)| \leqq N, \quad |Q_{\alpha\beta}(x, y)| \leqq Q;$$

wenn $\arg x$ zwischen endlichen Schranken bleibt, ist

$$|x^{a_\beta}| \leqq \varkappa\,|x|^{\bar{a}_\beta}, \qquad |x^{-a_\beta}| \leqq \varkappa'\,|x|^{-\bar{a}_\beta}.$$

Wenn für $|x| \leqq \varrho_0$

$$|\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1}\,|x|^{\bar{a}+\nu-1}$$

ist, hat man

$$\left|\Phi_\alpha^{(\nu)}(x)\right| \leqq \frac{m Q \mathfrak{C}_{\nu-1} |x|^{\bar{a}+\nu}}{\bar{a}+\nu},$$

$$\left|\varphi_\alpha^{(\nu)}(x) \leqq \mathfrak{C}_\nu \right| x\Big|^{\bar{a}+\nu}, \qquad \frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \frac{m^3 \varkappa \varkappa' M N Q}{\nu(\bar{a}+\nu)},$$

so daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{-a} \varphi_\alpha^{(\nu)}(x)$$

für $|x| < \varrho$ absolut und gleichmäßig konvergent ist. Die Gleichungen (A_0) haben also eine Lösung

$$\varphi_\alpha(x) = x^a \mathfrak{P}_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $\mathfrak{P}_\alpha(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist.

Bei der Betrachtung der nichthomogenen Gleichungen

$$(\mathrm{A}_0^*) \qquad x \frac{d\varphi_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta(x) + \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta(y) dy + R_\alpha(x)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m),$$

worin

$$R_\alpha(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\alpha^{(\lambda)} x^\lambda$$

für $|x| < \varrho$ konvergent ist, fügen wir zu den bisherigen Voraussetzungen über $a_1, \ldots, a_m$ die weitere hinzu, daß keine der Größen $a_1, \ldots, a_m$ gleich Null oder gleich einer ganzen positiven Zahl ist. Wir ersetzen die Gleichungen (A_0^*) durch die Kette von Differentialgleichungssystemen:

$$x \frac{d\varphi_\alpha^{(0)}}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta^{(0)}(x) + R_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m);$$

$$x \frac{d\varphi_\alpha^{(\nu)}}{dx} = \sum_{\beta=1}^{m} P_{\alpha\beta}(x) \varphi_\beta^{(\nu)}(x) + \Phi_\alpha^{(\nu)}(x),$$

$$\Phi_\alpha^{(\nu)}(x) = \int_0^x \sum_{\beta=1}^{m} Q_{\alpha\beta}(x, y) \varphi_\beta^{(\nu-1)}(y) dy$$
$$(\alpha = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(0)}(x)$ werden durch für $|x| < \varrho$ reguläre Funktionen befriedigt. Unter der Annahme, daß $\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)$ gleich einer mit $x^{\nu-1}$ multiplizierten regulären Funktion ist, ergibt sich für $\Phi_\alpha^{(\nu)}(x)$ eine mit x^ν multiplizierte reguläre Funktion. Die Differentialgleichungen für die $\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)$ werden durch mit x^ν multiplizierte reguläre Funktionen befriedigt. Eine solche Lösung erhält man, wenn $\nu > \bar{a}_1$, also $-\bar{a}_\beta + \nu > 0$ $(\beta = 1, \ldots, m)$ ist, in der Form

$$\varphi_\alpha^{(\nu)}(x) = \sum_{\beta=1}^{m} x^{a_\beta} \mathfrak{p}_{\alpha\beta}(x) \int_0^x x^{-a_\beta - 1} \sum_{\gamma=1}^{m} \mathfrak{q}_{\gamma\beta}(x)\, \Phi_\gamma^{(\nu)}(x)\, dx \qquad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Wenn für $|x| \leqq \varrho_0 < \varrho$

$$|\varphi_\alpha^{(\nu-1)}(x)| \leqq \mathfrak{C}_{\nu-1} |x|^{\nu-1}$$

ist, hat man

$$|\varphi_\alpha^{(\nu)}(x)| \leqq \mathfrak{C}_\nu |x|^\nu, \qquad \frac{\mathfrak{C}_\nu}{\mathfrak{C}_{\nu-1}} = \frac{m^3 \varkappa \varkappa' M N Q}{\nu(\nu - \bar{a}_1)}.$$

Die für $|x| \leqq \varrho_0$ absolut und gleichmäßig konvergenten Reihen

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\alpha^{(\nu)}(x)$$

stellen Funktionen dar, welche für $|x| < \varrho$ regulär sind und den Differentialgleichungen (A_0^*) genügen.

Zwischen den Größen $a_1, \ldots, a_m$ bestehen keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz. Die homogenen Gleichungen (A_0) haben, wenn a eine der Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ mit einem reellen Teil größer als -1 ist, eine Lösung

$$\varphi_\alpha(x) = x^a \mathfrak{p}_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo $\mathfrak{p}_\alpha(x)$ für $|x| < \varrho$ regulär ist. Die nichthomogenen Gleichungen (A_0^*) werden, wenn keine der Größen $a_1, \ldots, a_m$ gleich Null oder gleich einer positiven ganzen Zahl ist, durch Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ befriedigt, welche für $|x| < \varrho$ regulär sind.

(Eingegangen am 29. Oktober 1918.)