

# Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale algebrica.

(Nota (\*) del prof. F. CASORATI, a Pavia.)

---

1. Si rappresentino con  $a, b, c$  tre funzioni delle variabili  $u, v$ , e si prenda in considerazione l'equazione risultante dall'eliminazione della costante arbitraria  $\Omega$  tra

$$a\Omega^2 + 2b\Omega + c = 0 \quad (1)$$

e la differenziale

$$da\Omega^2 + 2db\Omega + dc = 0.$$

Questa risultante è

$$(cda - adc)^2 - 4(adb - bda)(bdc - cdb) = 0. \quad (2)$$

Pongasi

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad k^2 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_u & b_u & c_u \\ a_v & b_v & c_v \end{vmatrix}, \quad (3)$$

dove s'intenda che l'ultimo determinante sia quello ad elementi reciproci, od in altre parole, quello del sistema aggiunto al sistema degli elementi di  $k$ .

Col mezzo di  $g$ , la (2) può ridursi alla importante forma

$$(dg)^2 - 4g[da \cdot dc - (db)^2] = 0; \quad (2_2)$$

---

(\*) Letta nell'adunanza del 10 dicembre 1874 del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e qui riprodotta per essere seguita da applicazioni.

laonde si ha per la risultante l'una e l'altra espressione in  $du, dv$

$$(b_v du - b_u dv)^2 - 4(c_v du - c_u dv)(a_v du - a_u dv) = 0, \quad (2_3)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv\right)^2 - 4g \left[ \left(\frac{\partial a}{\partial u} du + \frac{\partial a}{\partial v} dv\right) \left(\frac{\partial c}{\partial u} du + \frac{\partial c}{\partial v} dv\right) - \left(\frac{\partial b}{\partial u} du + \frac{\partial b}{\partial v} dv\right)^2 \right] = 0. \quad (2_4)$$

Epperò, esprimendo la risultante con

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0, \quad (2_5)$$

si hanno per  $A, B, C$  i due sistemi di espressioni

$$\left. \begin{aligned} A &= b_v^2 - 4a_v c_v \\ B &= -b_u b_v + 2a_u c_v + 2a_v c_u \\ C &= b_u^2 - 4a_u c_u \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - 4g \left[ \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial c}{\partial u} - \left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)^2 \right] \\ B &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - 2g \left[ \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial c}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial u} - 2 \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial b}{\partial v} \right] \\ C &= \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 4g \left[ \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial v} - \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4_2)$$

Si cerchi il rapporto del discriminante

$$G = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad (5)$$

al  $g$ . Dalle formole (4) si cava

$$G = 4(a_u b_v - a_v b_u)(b_u c_v - b_v c_u) - 4(c_u a_v - c_v a_u)^2$$

e dalle (3), per una nota proprietà dei determinanti ad elementi reciproci,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k^2}{\partial a_0} &= b_u c_v - b_v c_u = k a, \\ \frac{\partial k^2}{\partial b_0} &= c_u a_v - c_v a_u = k b, \\ \frac{\partial k^2}{\partial c_0} &= a_u b_v - a_v b_u = k c; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

quindi il rapporto si trova espresso dalla formola notabile (\*)

$$\frac{G}{g} = 4k^2. \quad (7)$$

Nel determinante  $k$  si può e giova introdurre  $g$  con le sue derivate, invece di una tra le funzioni  $a, b, c$  e rispettive derivate. Ne scaturiscono tre formole, le quali, esprimendo i valori delle incognite  $c, -2b, a$  cavati dal sistema di equazioni algebriche lineari

$$\left. \begin{aligned} ca - 2bb + ac &= 2g \\ c \frac{\partial a}{\partial u} - 2b \frac{\partial b}{\partial u} + a \frac{\partial c}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial u} \\ c \frac{\partial a}{\partial v} - 2b \frac{\partial b}{\partial v} + a \frac{\partial c}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

sono

$$ck = \begin{vmatrix} 2g & b & c \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad -2bk = \begin{vmatrix} a & 2g & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad ak = \begin{vmatrix} a & b & 2g \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (9)$$

**2.** Tutte le formole esposte sussistono qualunque sia la natura delle funzioni  $a, b, c$ ; ma acquistano la maggiore importanza quando le  $a, b, c$  suppongansi algebriche, razionali, intere. In tale supposizione, tra le conseguenze di esse formole, sono da notarsi primamente quelle che si riconoscono confrontando i due discriminanti e il determinante  $k$  tra loro.

Un fattore che entri  $m$  volte in  $g$ , entra almeno  $m-1$  volte in  $k$ . Ed invero, si consideri, per semplicità, un fattore primo  $\varphi$  di detto fattore che in questo entri  $r$  volte; entrando  $rm-1$  volte in ogni elemento di una colonna del secondo membro di ciascuna (9), il fattore  $\varphi$  entrerà  $rm-1$  volte

(\*) Questa formola, che trovai nel 1869, in ricerche che quest'anno soltanto ebbi agio di ripigliare, la vidi trovata anche dal sig. CATALAN, sotto la forma

$$B^2 - 4AC = (P^2 - 4Q) \left( \frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx} \right)^2,$$

cioè per  $a=1$ , nella eliminazione che egli pure ebbe a fare della costante arbitraria  $c$  fra l'equazione  $c^2 + Pc + Q = 0$  e la sua differenziale immediata (Compte R. de l'Acad. des sciences du 4 juillet 1870).

in ogni primo membro, e però in  $k$ . Nel caso che una potenza  $\varphi^\mu$  di questo fattore dividesse simultaneamente  $a, b, c$ , si avrebbe il fattore  $\varphi^{\mu-1}$  in entrambe le altre due colonne dei secondi membri, e potendosi quindi raccogliere, come fattori dei medesimi, le potenze  $\varphi^{rm-1}, \varphi^{\mu-1}, \varphi^{\mu-1}$  dalle colonne e  $\varphi$  dalla prima linea, si vede che  $\varphi$  dovrebbe entrare in  $k$  almeno  $rm + \mu - 2 \geq m - 1$  volte.

Non si può, reciprocamente, dalla esistenza di fattori in  $k$  concludere a quella dei fattori stessi in  $g$ . Pigliando, p. es., una  $a$  contenente  $\varphi^{\mu+1}$  ed una  $b$  non divisibile per  $\varphi$ , si avrà un  $k$  contenente  $\varphi^\mu$  ed un  $g$  non divisibile per  $\varphi$ .

Nel fatto confronto di  $g$  con  $k$ , si può prendere  $ba - c^2$  oppure  $cb - a^2$  invece di  $ac - b^2$ , come valore di  $g$ .

Poichè  $k$  entra due volte in  $G$ , dall'esposto teorema segue che  $k$  dividerà il determinante

$$K = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Designando ordinatamente con

$$m, \quad m', \quad m''$$

i gradi di molteplicità di un fattore primo in

$$g, \quad k, \quad G,$$

la (7) dà

$$m + 2m' = m'', \quad (11)$$

e da questa relazione e dal teorema concernente  $g$  e  $k$  hannosi le disequaglianze

$$3m' \geq m'' - 1, \quad m'' \geq 3m - 2, \quad m' \geq m - 1. \quad (12)$$

Fra le proposizioni, che stanno qui scritte, quelle da notarsi adesso sono più particolarmente le seguenti: Ogni fattore primo, semplice di  $G$  è fattore semplice di  $g$  e non divide  $k$ ; Ogni fattore primo, multiplo in  $G$  è anche fattore di  $k$ .

**3.** Si immagini ora che la (1) sia l'integrale generale della equazione differenziale

$$\alpha du^2 + 2\beta dudv + \gamma dv^2 = 0 \quad (13)$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  significano funzioni razionali, intere di  $u, v$ . Il confronto di questa equazione colla (2<sub>5</sub>) dà

$$A = \theta \cdot \alpha, \quad B = \theta \cdot \beta, \quad C = \theta \cdot \gamma; \quad (14)$$

donde

$$G = 4(ac - b^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = \theta^2(\alpha\gamma - \beta^2), \quad (15)$$

ed anche

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{\partial A}{\partial u} & \frac{\partial B}{\partial u} & \frac{\partial C}{\partial u} \\ \frac{\partial A}{\partial v} & \frac{\partial B}{\partial v} & \frac{\partial C}{\partial v} \end{vmatrix} = \theta^3 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Le funzioni  $\alpha, \beta, \gamma$  ritengansi da quì innanzi prime tra loro. Ne segue che il fattore razionale  $\theta$  dev'essere intero.

Indicando con  $\varsigma$  il discriminante della (13), cioè ponendo

$$\varsigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}, \text{ donde } G = \theta^2 \varsigma, \quad (17)$$

scriveremo la (7) o (15) come segue

$$4gk^2 = \theta^2 \varsigma. \quad (18)$$

Per quanto precede è chiaro che ogni fattore primo di  $\theta$  dev'essere fattore di  $k$ . L'eguaglianza

$$\theta(\alpha du^2 + 2\beta du dv + \gamma dv^2) = (dg)^2 - 4g[da \cdot dc - (db)^2] \quad (19)$$

fa manifesto che un fattore il quale entri una sola volta in  $g$  non divide  $\theta$ ; giacchè nel caso contrario dovrebbe dividere  $dg$ , ossia entrambe le derivate prime parziali di  $g$ , la qual cosa non ha luogo che per fattori multipli in  $g$ . Per questi invece, la eguaglianza stessa dice che un fattore, il quale entri in  $g$  più volte, entra almeno altrettante volte in  $\theta$ .

Confrontando  $\varsigma$  con  $g$ , vediamo nella (18), che, ogni fattore primo entra in tutti e due questi discriminanti un numero dispari, od in tutti e due un numero pari di volte; così che, in particolare, i fattori, che entrano un numero dispari di volte sono gli stessi per ambi i discriminanti. E rispetto a  $\varsigma$  e  $k$  noteremo, che, ogni fattore, il quale entri più volte in  $\varsigma$ , entra anche in  $k$ .