

Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis.

Von

C. CARATHÉODORY in Breslau.*)

Die großen Fortschritte, die in der Theorie der konformen Abbildung während des letzten Jahrzehnts gemacht worden sind, sind erst durch eine Bemerkung ermöglicht worden, durch welche die Untersuchungen auf die Betrachtung der *inneren* Punkte der abzubildenden Gebiete und Flächen beschränkt werden.

Dieses hat unter anderem erlaubt die Möglichkeit der konformen Abbildung des *Inneren* von einfach zusammenhängenden schlichten Gebieten auf das *Innere* eines Kreises zu beweisen, ohne über die Natur der Begrenzung der betreffenden Gebiete irgend welche Voraussetzung zu machen.

Diese Methoden versagen aber, wenn man die Frage stellt, wie sich die konformen Abbildungen in der Nähe des Randes verhalten bzw. auf welche Weise die Ränder selbst aufeinander bezogen sind. Einige Überlegung genügt um zu zeigen, daß dies in der Natur der Sache liegt: Die neueren Existenzbeweise bestehen nämlich darin, eine Folge von Funktionen zu konstruieren, die für $|z| < 1$ gegen die gesuchte Abbildungsfunktion konvergiert, und es ist gewöhnlich bequem für diesen Zweck Funktionsfolgen zu konstruieren, die auf der Kreisperipherie $|z| = 1$ überall divergieren und die also für das Studium der Abbildung in der Umgebung des Randes unbrauchbar sind.**)

*) Die Hauptresultate der vorliegenden und einer im nächsten Hefte folgenden Arbeit habe ich auf der Karlsruher Naturforscherversammlung im September 1911 vorgetragen. Ich erhielt dort Kenntnis von parallelen Untersuchungen, die Herr E. Study über denselben Gegenstand gemacht hatte, und die er seitdem in seiner Schrift „Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche“ [Teubner 1912] publiziert hat. Einiges aus meinen hiesigen Untersuchungen hat er in sein Buch aufgenommen; das Kapitel III meiner zweiten Arbeit ist durch die Studyschen Überlegungen, die ich im Ms. lesen durfte, angeregt worden.

**) S. z. B. meine „Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten“ [Math. Ann. 72, S. 107—144] S. 144.

Im folgenden wollen wir dagegen unsere Aufmerksamkeit auf die Abbildung der Ränder richten: Das einfachste aber auch wichtigste Problem in dieser Hinsicht besteht wohl darin, für die in Betracht kommenden Gebiete notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, damit bei den konformen Abbildungen dieser Gebiete auf den Einheitskreis eine eindeutige und stetige Abbildung ihrer Ränder auf die Peripherie dieses Kreises existiere, die außerdem mit der konformen Abbildung des Inneren stetig zusammenhängt; wie dies bei den konformen Abbildungen, die durch elementare Funktionen geliefert werden, stets der Fall ist.

Die Untersuchungen von H. A. Schwarz*) haben gezeigt, daß diese Eigenschaft immer besteht, wenn der Rand des abzubildenden Gebietes aus einer endlichen Anzahl regulärer analytischer Kurvenstücke gebildet ist, die sich unter von Null verschiedenen Winkeln schneiden.

Später hat Painlevé**) gezeigt, daß es genügt von diesem Rande vorauszusetzen, daß er stückweise aus Kurven besteht, die, wenn man die Kurve durchläuft, eine sich stetig ändernde Tangente zulassen. Paraf hat ferner in seiner Thèse***), die über die Anwendungen der Poincaréschen Ausfegemethode berichtet, noch weniger Voraussetzungen benötigt. Bei allen diesen Resultaten sind eine ganze Anzahl von möglichen Singularitäten des Randes z. B. Spiralpunkte ausgeschlossen.

In seinem Enzyklopädieartikel hat nun Osgood†) die Vermutung ausgesprochen, daß bei der konformen Abbildung des Inneren eines durch eine beliebige Jordansche Kurve begrenzten Gebietes auf das Innere eines Kreises die Jordansche Kurve und die Kreisperipherie eindeutig und stetig einander entsprechen.

Diese Vermutung von Osgood ist in der Tat richtig und ihrem Beweise ist unsere Untersuchung gewidmet.

Eine Jordansche Kurve ist nach ihrer Definition eine Punktmenge,

*) a) Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [Berl. Ber. 1870, S. 767—795, Ges. Abh. II, S. 144—171]. b) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [J. f. Math. 74 (1872), S. 113—128; Ges. Abh. II, S. 175—210].

**) Sur la théorie de la représentation conforme [C. R. 1891, 1^{er} sem. S. 653]. Vgl. auch die vor kurzem erschienene Diss. von E. A. Hintikka „Über das Verhalten der Abbildungsfunktion auf dem Rande des Bereiches in der konformen Abbildung“ (Helsingfors 1912).

***) Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation générale du second ordre [Annales de Toulouse VI (1892), H. S. 1—75].

†) Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen [Enc. d. Math. Wiss. II B 1, Art. 19, S. 56].

die eineindeutig und stetig auf eine Kreislinie abgebildet werden kann; wir haben daher den Satz:

Ist es auf irgend eine Weise möglich, die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes eineindeutig und stetig auf eine geschlossene Kreislinie abzubilden, so wird bei jeder konformen Abbildung des Inneren des Gebietes auf das Innere eines Kreises eine derartige eineindeutige und stetige Beziehung der Ränder aufeinander realisiert.

2. Der Beweis der Osgoodschen Vermutung würde zur Zeit (1900), wo sie ausgesprochen worden ist, vielleicht nicht möglich gewesen sein. Seitdem ist aber die Analysis durch eine der weittragendsten Entdeckungen, die diese Disziplin zu verzeichnen hat, bereichert worden, ich meine das Lebesguesche Integral und die Sätze, die Herr Lebesgue mit seiner Hilfe bewiesen hat*).

Die Untersuchungen von Lebesgue haben Herrn Fatou**) zu einer Reihe sehr bemerkenswerter Resultate geführt, deren eines die Grundlage für die vorliegende Arbeit bildet.

Ich beginne mit einem möglichst einfachen Beweise des Satzes von Fatou, worauf in einem zweiten Kapitel die Vermutung von Osgood bewiesen wird.

Kapitel I.

Hilfssätze.

3. In der oben erwähnten Arbeit des Herrn Fatou steht unter anderen schönen Resultaten folgender Satz, den wir mit möglichst einfachen Mitteln beweisen wollen:

*Ist die eindeutige analytische Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und beschränkt***), so gibt es auf dem Einheitskreise $|z| = 1$ überall dicht liegende Punkte, für die, bei Annäherung längs eines Radius des Kreises, die Funktion $f(z)$ gegen einen bestimmten Wert konvergiert.†)*

Dieses Resultat wollen wir durch folgenden Zusatz vervollständigen, der aus den Untersuchungen von Fatou beinahe unmittelbar hervorgeht:

Ist $f(z)$ nicht konstant, so muß auf jedem Kreisbogen die Menge der oben erwähnten Grenzwerte mindestens drei verschiedene Werte enthalten.

*) Intégrale, Longueur, Aire [Annali di Matematica (3) 7 (1902), S. 231—359.] Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives [Paris, Gauthiers-Villars, S. 1—186].

**) Séries trigonométriques et séries de Taylor [Acta Math. 30, S. 385—400].

***) D. h. es gibt eine endliche positive Zahl M derart, daß für $|z| < 1$ der absolute Betrag $|f(z)| < M$ wird.

†) Durch geringfügige Modifikation des Beweises kann man feststellen, daß bei beliebiger geradliniger Annäherung gegen die betreffenden Punkte von $|z| = 1$, die Funktion $f(z)$ gegen denselben Wert konvergiert. cf. Study a. a. O.

4. Wir bemerken zunächst, daß es keine Einschränkung der Allgemeinheit ist bei dem Beweise unseres Satzes $f(0) = 0$ zu setzen, da wir diese Bedingung durch Addition einer Konstanten immer erfüllen können.

Es sei also die analytische Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und ihr absoluter Betrag

$$|f(z)| < M;$$

außerdem sei $f(0) = 0$.

Wir betrachten den Kreis

$$|z| = \varrho < 1$$

und führen die Funktion ein:

$$(1) \quad F(\varrho, \vartheta) = \int_0^{\vartheta} f(\varrho e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_{\varrho}^{\varrho e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz.$$

Das letzte Integral kann, weil $\frac{f(z)}{iz}$ im Kreise $|z| < 1$ regulär ist, längs eines beliebigen Weges genommen werden, der die Punkte $z = \varrho$ und $z = \varrho e^{i\vartheta}$ verbindet und ganz im Inneren von $|z| < 1$ verläuft. Aus diesem Grunde ist $F(\varrho, \vartheta)$ eine eindeutige Funktion im Kreise $|z| < 1$, was durch die Gleichung

$$(2) \quad F(\varrho, -\pi) = F(\varrho, \pi)$$

ausgedrückt wird.

Nun bemerke man, daß nach dem bekannten Satze von Schwarz in unserem Falle $\left| \frac{f(z)}{iz} \right| < M$ für $|z| < 1$ ist.

Also liefert die Gleichung (1), wenn man ϑ festhält und ϱ monoton wachsen läßt

$$(3) \quad |F(\varrho + \Delta\varrho, \vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq \left| \int_{\varrho}^{\varrho + \Delta\varrho} \frac{f(z)}{iz} dz \right| + \left| \int_{\varrho e^{i\vartheta}}^{(\varrho + \Delta\varrho)e^{i\vartheta}} \frac{f(z)}{iz} dz \right| \leq 2M\Delta\varrho,$$

und wenn man ϱ festhält und ϑ variiert

$$(4) \quad |F(\varrho, \vartheta + \Delta\vartheta) - F(\varrho, \vartheta)| \leq M|\Delta\vartheta|.$$

Aus (3) entnimmt man, daß

$$(5) \quad \lim_{\varrho=1} F(\varrho, \vartheta) = F(\vartheta)$$

für jedes ϑ existiert und daß die Konvergenz *gleichmäßig* ist.

Die Funktion $F(\vartheta)$ ist demnach stetig, und wegen (4) gilt überdies für diese Grenzfunktion die Bedingung

$$\left| \frac{F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta)}{\Delta\vartheta} \right| \leq M;$$

die Funktion $F(\vartheta)$ besitzt daher beschränkte Differenzenquotienten (sie genügt der sogenannten Lipschitzschen Bedingung).

5. Das Poissonsche Integral angewendet auf den Kreis $|z| = \rho < 1$ liefert, wenn man $z = r e^{i\vartheta}$ setzt, und $r < \rho$ nimmt,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\varphi$$

und nach partieller Integration (bei welcher wegen (2) der aus dem Integralzeichen heraustretende Teil verschwindet)

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho, \varphi) \frac{d}{d\varphi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\varphi.$$

Das letzte Integral ist von ρ unabhängig und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktion unter dem Integralzeichen gegen eine stetige Funktion von φ , wenn ρ gegen Eins konvergiert, kann man in der Formel $\rho = 1$ setzen und schreiben

$$(6) \quad f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\varphi.$$

Eine ganz ähnliche Formel erhält man, wenn $f(z)$ gleich einer Konstanten C ist; dann kann man nämlich schreiben

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\varphi$$

und nach partieller Integration

$$(7) \quad C = \frac{C(1-r^2)}{1 + 2r \cos \vartheta + r^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C \varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \vartheta) + r^2} d\varphi.$$

Insbesondere liefert (7) für $C = 1$ und $\vartheta = 0$ die Relation

$$(8) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} d\varphi = 1 - \frac{1 - r^2}{(1+r)^2} = \frac{2}{1 + \frac{1}{r}},$$

die uns nützlich sein wird.

6. Es sei $e^{i\vartheta_0}$ ein Punkt des Einheitskreises, in dem $F(\varphi)$ eine endliche Ableitung $F'(\vartheta_0)$ besitzt. Wir wollen zeigen, daß die Gleichung

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow 1} f(r e^{i\vartheta_0}) = F'(\vartheta_0)$$

besteht.

Dabei genügt es $\vartheta_0 = 0$ zu setzen, da wir den allgemeinen Fall durch Drehung des Koordinatensystems, indem wir $z = e^{i\vartheta_0}\xi$ schreiben, auf den speziellen Fall $\vartheta_0 = 0$ zurückführen können.

Wir können nach (6) und (7) schreiben

$$f(r) - F'(0) = -\frac{F'(0)(1-r)}{1+r} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F(\varphi) - \varphi F'(0)) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi.$$

Nun wähle man eine positive Zahl λ , die kleiner als π sein mag und setze

$$(10) \quad H(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} (F(\varphi) - \varphi F'(0)) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi,$$

$$(11) \quad J(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{-\lambda} + \int_{\lambda}^{\pi} (F(\varphi) - \varphi F'(0)) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi \right\},$$

sodaß

$$(12) \quad f(r) - F'(0) = -\frac{F'(0)(1-r)}{1+r} + H(r, \lambda) + J(r, \lambda)$$

ist.

Bemerkt man, daß nach (1) und (5) $F(0) = 0$ ist und setzt

$$(13) \quad F(\varphi) = \varphi F'(0) + \varphi \eta(\varphi),$$

so wird, wenn man mit $h(\lambda)$ die obere Grenze der Funktion $\eta(\varphi)$ im Intervalle $-\lambda$ bis $+\lambda$ bezeichnet,

$$\lim_{\lambda=0} h(\lambda) = 0.$$

Wir bekommen aus (10) und (13)

$$H(r, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi \cdot \eta(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi,$$

und wenn wir bemerken, daß

$$(14) \quad \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} = -\frac{(1-r^2)\sin\varphi}{(1-2r\cos\varphi+r^2)^2}$$

eine ungerade Funktion von φ ist, die für $0 < \varphi < \pi$ nicht positiv und für $-\pi < \varphi < 0$ nicht negativ ist,

$$\begin{aligned} |H(r, \lambda)| &< -\frac{h(\lambda)}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi, \\ &< -\frac{h(\lambda)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} d\varphi, \end{aligned}$$

also schließlich nach (8) für $r \leq 1$

$$|H(r, \lambda)| < \frac{2h(\lambda)}{1 + \frac{1}{r}} < h(\lambda).$$

Um $J(r, \lambda)$ abzuschätzen, bemerken wir, daß im Integrationsintervall, wegen (4)

$$|F(\varphi)| < \pi M$$

ist, daß ferner im selben Intervall nach (14)

$$\left| \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} \right| < \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\lambda+r^2)^2} < \frac{1-r^2}{(1-\cos^2\lambda)^2}$$

ist, und erhalten also aus (11)

$$|J(r, \lambda)| < \frac{\pi(M+F'(0))}{\sin^4\lambda} (1-r^2).$$

Wir haben schließlich nach (12)

$$|f(r) - F'(0)| < h(\lambda) + \left\{ \frac{\pi(M+F'(0))}{\sin^4\lambda} + \frac{F'(0)}{(1+r)^2} \right\} (1-r^2).$$

Ist ε eine beliebige positive Zahl, so können wir λ so klein annehmen, daß $h(\lambda) < \frac{\varepsilon}{2}$ wird; dann folgt aus obiger Ungleichung, daß, wenn $(1-r^2)$ hinreichend klein ist,

$$|f(r) - F'(0)| < \varepsilon$$

sein muß. Hieraus folgt aber unmittelbar die zu beweisende Gleichung (9).

Wir haben also das Resultat, daß für jede Stelle ϑ_0 , wo $F(\vartheta)$ differenzierbar ist, bei Annäherung von z längs des Radius $re^{i\vartheta_0}$ an die Peripherie des Kreises $|z|=1$, unsere Funktion $f(z)$ gegen einen bestimmten Wert, nämlich gegen $F'(\vartheta_0)$ konvergiert.

7. Der grundlegende Satz von Lebesgue, den wir in der Einleitung erwähnt haben, lautet nun folgendermaßen:

Eine reelle Funktion, die in einem Intervalle definiert ist und dort beschränkte Differenzenquotienten besitzt, ist in jedem Punkte des Intervalls differenzierbar, außer höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null. Diese Funktion ist außerdem, abgesehen von einer additiven Konstanten, gleich dem unbestimmten Lebesgueschen Integral über ihre Ableitung.)*

*) Für den Beweis dieses Satzes verweise ich auf die oben zitierten Arbeiten von Lebesgue und außerdem ganz besonders auf den Cours d'Analyse Infinitésimale von Ch. de la Vallée Poussin (2^e édition) I, S. 269.

Einen äußerst einfachen direkten Beweis des in Frage kommenden Resultates hat Herr G. Faber in seinen schönen Untersuchungen „Über stetige Funktionen“ [Math. Ann. 69 (1910), S. 372—448] S. 381 gegeben. Ein leicht zu verbesserndes Versehen des Herrn Faber auf S. 385 seiner Abhandlung ist so offenbar, daß es auch ein wenig aufmerksamer Leser bemerken muß.

Aus diesem Satze folgt insbesondere, daß eine Funktion mit beschränkten Differenzenquotienten, deren Ableitung überall außer in einer Punktmenge vom Maße Null verschwindet, konstant sein muß.

8. Die im § 4 eingeführte Funktion $F(\vartheta)$ hatte, wie wir sahen, beschränkte Differenzenquotienten. Nach dem Lebesgueschen Resultate besitzt sie für eine überall dichtliegende Punktmenge des Kreises $|z| = 1$ eine Ableitung. Also muß nach § 6, bei Annäherung von z längs des entsprechenden Radius gegen einen dieser Punkte, unsere Funktion $f(z)$ gegen einen bestimmten Wert konvergieren, womit der erste Teil unseres Satzes bewiesen ist.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, setzen wir voraus, daß $f(z)$ in jedem Punkte eines Kreisbogens $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, in dem sie nach obigem bei Annäherung längs des Radius einen Grenzwert besitzt, immer nur zwei Werte α oder β annehmen kann. Die Funktion

$$g(z) = \frac{i(f(z) - \alpha)}{\beta - \alpha},$$

die natürlich auch den Bedingungen des Fatouschen Satzes genügt, nimmt dann in diesen Punkten ausschließlich entweder den Wert Null oder den Wert i an. Nun können wir unsere früheren Rechnungen auf $g(z)$ anwenden und die Gleichung

$$(15) \quad g(z) - g(0) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\varphi) \frac{d}{d\varphi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-\vartheta)+r^2} d\varphi,$$

die der Gleichung (6) nachgebildet ist, ableiten.

Die Ableitung des reellen Teiles $\Re G(\varphi)$ von $G(\varphi)$ muß nun nach Voraussetzung im Intervall $\vartheta_1 < \varphi < \vartheta_2$ überall außer höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null konstant sein; also ist $\Re G(\vartheta)$ auf dem ganzen Kreisbogen $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ linear in ϑ . Die Gleichung (15) lehrt uns jetzt, wenn man sie in ihren reellen und imaginären Bestandteil spaltet, daß $\Re g(z)$ auf dem ganzen Kreisbogen $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ analytisch ist. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip muß $g(z)$ und daher auch $f(z)$ längs dieses Kreisbogens analytisch sein und daher nach Voraussetzung konstant und entweder gleich α oder gleich β sein. W. z. b. w.

9. Der Fatousche Satz läßt die Möglichkeit offen, daß $f(z)$ bei Annäherung an $|z|=1$ längs des Radius in einer gewissen Punktmenge vom Maße Null nicht gegen einen Grenzwert konvergiert.

Dies liegt in der Natur der Sache: Man kann Beispiele von Funktionen geben, bei denen die Punktmenge, für welche keine Konvergenz stattfindet, überall dicht liegt und in jedem Intervalle die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Ebenfalls können Beispiele von Funktionen gebildet

werden, die für eine überall dichte Menge von Punkten des Einheitskreises $|z| = 1$, welche in jedem Intervalle die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, bei beliebiger (nicht nur geradliniger) Annäherung gegen einen festen Wert konvergieren und doch nicht konstant sind.*)

Diese Beispiele zeigen deutlich, daß der Beweis des Fatouschen Satzes ohne Zuhilfenahme der Resultate von Lebesgue unmöglich wäre.

10. Ein zweiter Hilfssatz, den wir brauchen werden, lautet folgendermaßen: *Bei jeder konformen Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes, dessen Begrenzung einen freien Kreisbogen AB enthält, auf das Innere des Kreises $|z| = 1$, wird der Kreisbogen AB stetig auf ein Stück von $|z| = 1$ abgebildet, dessen Endpunkte nicht zusammenfallen.*

Unter einem „freien“ Kreisbogen auf der Begrenzung eines Gebietes G verstehen wir folgendes: ist C ein beliebiger Punkt des Kreisbogens, der zwischen A und B liegt und κ ein Kreis vom Radius ρ mit dem Mittelpunkte C , so soll, bei hinreichend kleinem ρ , der eine der beiden Kreissektoren, in die κ durch ACB zerlegt wird, ganz in G liegen. Außerdem verlangen wir, daß alle diese Kreissektoren, die in G enthalten sind, auf derselben Seite des Kreisbogens ACB liegen. Man kann immer erreichen, indem man ev. A mit B vertauscht, daß das „linke Ufer“ des Kreisbogens ACB , wenn man diesen in der Richtung von A nach B durchläuft, in G enthalten ist.

Unsere Behauptung ist eine beinahe selbstverständliche Folge des Schwarzschen Spiegelungsprinzips.

Wählen wir nämlich einen beliebigen Punkt C auf dem gegebenen Kreisbogen zwischen A und B und führen durch eine linear gebrochene Substitution die u -Ebene, in welcher G liegt in eine u_1 -Ebene über, sodaß den Punkten A, C, B in der u -Ebene resp. die Punkte $0, 1, \infty$ der u_1 -Ebene entsprechen, so geht das Gebiet G in ein Gebiet G_1 über, das ganz in der längs der positiven reellen Halbachse aufgeschnittenen u_1 -Ebene liegt.

Durch die Substitution $u_2 = u_1^{\frac{1}{2}}$ geht (bei geeigneter Wahl eines Zweiges dieser Substitution) G_1 in ein Gebiet G_2 über, das ganz in dem Quadranten liegt, der durch die positive reelle und die positive imaginäre Halbachse gebildet ist; dabei ist zu bemerken, daß das linke Ufer des Kreisbogens AB in die reelle Halbachse übergegangen ist.

Endlich führe man die Substitution $u_3 = \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1}$ ein, welche das Gebiet G_2 der u_2 -Ebene in ein Gebiet G_3 der u_3 -Ebene überführt, das ganz oberhalb der Achse des reellen liegt und im Einheitskreise $|u_3| \leq 1$ ein-

*) cf. die §§ 50—51 meiner im nächsten Hefte erscheinenden Arbeit.

geschrieben ist. Der Durchmesser $-1, +1$ dieses letzten Kreises bildet ein Stück der Begrenzung von G_3 . Zu G_3 fügen wir sein in bezug auf die reelle Achse der u_3 -Ebene symmetrisches Gebiet hinzu und nennen das Gesamtgebiet Γ ; das Gebiet Γ enthält den Durchmesser $-1, +1$ des Kreises $|u_3| < 1$ in seinem Inneren.

Wir bilden jetzt das Innere des Gebietes Γ auf einen Kreis $|u_4| < 1$ derart ab, daß die Punkte $u_3 = 0$ und $u_4 = 0$ und in diesen parallele Richtungen einander entsprechen.

Dann werden, wegen der Symmetrie des Gebietes Γ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip*) die geradlinigen Strecken $(-1, +1)$ der beiden Ebenen u_3 und u_4 einander entsprechen.

In der u_4 -Ebene entspricht dem Gebiete G der u -Ebene ein Gebiet G_4 , das mit der oberen Hälfte des Einheitskreises $|u_4| < 1$ zusammenfällt. Dabei ist der Kreisbogen ACB in den Durchmesser des Kreises übergegangen; die Abbildung dieser beiden Linien aufeinander ist eineindeutig und nicht nur stetig sondern sogar analytisch.

Jede konforme Abbildung des Gebietes G auf einen Kreis $|z| < 1$ kann man erhalten indem man, wie vorhin, zuerst G auf G_4 abbildet, und dann eine geeignete konforme Abbildung von G_4 auf $|z| < 1$. Da bei der letzten Abbildung, die mit Hilfe von elementaren Funktionen zu realisieren ist, der Durchmesser $(-1, +1)$ des Kreises $|u_4| < 1$ immer einem Kreisbogen mit *verschiedenen* Endpunkten entspricht, so ist unser Hilfssatz bewiesen.

Kapitel II.

Jordansche Kurven.

11. Unter einer Jordanschen Kurve versteht man eine Punktmenge, die eineindeutig und stetig auf die Punkte einer (geschlossenen) Kreislinie abgebildet werden kann; unter einem Jordanschen Kurvenstück ferner eine Punktmenge, die eineindeutig und stetig auf ein geradliniges Intervall *einschließlich der Endpunkte* abbildbar ist.

Eine Jordansche Kurve γ zerlegt bekanntlich die Ebene in zwei Teile**), von denen der eine ein ganz im Endlichen liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet G ist.

*) Schwarz hat sein Theorem mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen. Man sieht aber leicht ein, daß der Poincarésche Unitätssatz (S. z. B. meine Arbeit Math. Ann. 72, S. 107, § 5), der noch elementarerer Natur ist, eine analoge Schlußweise ermöglicht.

**) Für den einfachsten bekannten Beweis dieses Satzes siehe Brouwer, Math. Ann. 69, S. 169.

Ein Jordansches Kurvenstück, dessen Endpunkte A und B voneinander verschieden sind und auf der Kurve γ liegen, und das sonst ganz im Inneren des Gebietes G verläuft, soll ein „Querschnitt“ q von G genannt werden.

Wir werden folgende, teils unmittelbar aus der Definition einer Jordanschen Kurve entspringende, teils leicht zu beweisende und längst bekannte Eigenschaften der Kurve γ und des Gebietes G brauchen.

a) Durch das Punktepaar A, B wird die Jordansche Kurve γ in zwei Kurvenstücke γ' und γ'' zerlegt, die außer ihren Endpunkten A, B keinen gemeinsamen Punkt besitzen. [Hätten sie nämlich einen dritten gemeinsamen Punkt, so entspräche — entgegen der Voraussetzung — diesem *einen* Punkte, bei der Abbildung von γ auf eine Kreislinie, *zwei* Punkte des Kreises.]

b) Der Querschnitt q teilt das Gebiet G in zwei Teilgebiete G' und G'' , deren Begrenzung aus den (geschlossenen) Jordanschen Kurven $(\gamma' + q)$ resp. $(\gamma'' + q)$ bestehen und die außer dem Querschnitte q keinen gemeinsamen Punkt besitzen.*)

c) Zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte A und B der Jordanschen Kurve γ können durch einen Querschnitt des Gebietes G verbunden werden.

Diese letzte Eigenschaft von γ wollen wir beweisen; es genügt dazu offenbar zu zeigen, daß man einen beliebigen Punkt A von γ mit einem inneren Punkte O des Gebietes G durch ein Jordansches Kurvenstück verbinden kann.

12. Es sei

$$x = x(\vartheta), \quad y = y(\vartheta)$$

die Parameterdarstellung der Jordanschen Kurve γ , und A ein beliebiger Punkt dieser Kurve; man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß A dem Werte $\vartheta = 0$ des Parameters entspricht, und daß die ganze Kurve γ durchlaufen wird, wenn ϑ von $-\pi$ bis $+\pi$ variiert. Die Funktion

$$\rho(\vartheta) = \sqrt{(x(\vartheta) - x(0))^2 + (y(\vartheta) - y(0))^2},$$

die den Abstand zwischen dem Punkte A und einem veränderlichen Punkte der Kurve darstellt, ist im Intervalle $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ stetig und positiv und besitzt keine andere Nullstelle als $\vartheta = 0$.

Ist die positive Zahl r , kleiner als das Maximum von $\rho(\vartheta)$, so wird die Gleichung

$$(16) \quad \rho(\vartheta) = r$$

für gewisse Werte von ϑ , die im Intervalle

$$-\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

*) Cf. Brouwer, a. a. O., S. 173.

liegen, befriedigt sein; die untere Grenze des absoluten Betrages dieser Werte, ist eine von Null verschiedene positive Zahl δ , die mit r monoton abnimmt.

Es sei $m(r)$ das Minimum der Funktion $\rho(\vartheta)$, wenn ϑ die Intervalle $\delta \leq \vartheta \leq \pi$ und $-\pi \leq \vartheta \leq -\delta$ beschreibt. Die Zahl $m(r)$ ist ihrer Definition gemäß, nicht größer als r ; sie ist positiv und von Null verschieden, und nimmt monoton mit r ab.

Beschreibt man einen Kreis K , dessen Mittelpunkt A und dessen Radius r ist, so enthält dieser Kreis sicher Punkte auf seiner Peripherie, die im Inneren von G liegen, denn es befinden sich in G sowohl Punkte die innerhalb als auch Punkte, die außerhalb des Kreises K liegen. Genau ebenso sieht man, daß auf der Peripherie vom K Punkte liegen, die im Äußeren von G enthalten sind, also weder in G noch auf γ liegen.

Es gibt demnach mindestens einen Querschnitt von G , der aus einem Kreisbogen des Kreises K besteht; im allgemeinen werden unendlich viele derartige Querschnitte β_1, β_2, \dots auf der Peripherie von K liegen.

Das eine der zwei Teilgebiete, das durch einen beliebigen dieser Querschnitte z. B. durch β_k bestimmt wird, ist außer durch den Kreisbogen β_k durch einen Teil der Jordanschen Kurve γ begrenzt, für welchen der Parameter ϑ der Bedingung

$$|\vartheta| > \delta$$

genügt. Der Abstand des Punktes A von diesem Teilgebiete ist also mindestens gleich $m(r)$. Hieraus folgt, daß zwei Punkte P und Q , die beide von A um weniger als $m(r)$ abweichen, auf derselben Seite eines jeden der Querschnitte β_1, β_2, \dots liegen müssen.

Wir verbinden die Punkte P und Q durch einen geradlinigen Streckenzug S , der im Inneren von G verläuft; ist der größte Abstand eines Punktes dieses Streckenzuges von A größer als r , so wird S mit mindestens einem der Kreisbögen β_1, β_2, \dots gemeinsame Punkte besitzen. Es sei M_1 der erste Punkt von S , der auf dem Kreise K liegt, wenn man den Streckenzug S in der Richtung von P nach Q durchläuft, ferner sei β_1 der Querschnitt auf welchem M_1 liegt, endlich N_1 der letzte Punkt von S , der auf β_1 liegt. Man ersetze den Teil des Streckenzuges der zwischen M_1 und N_1 liegt durch den Kreisbogen der M_1 mit N_1 verbindet, und in β_1 enthalten ist. Indem man auf analoge Weise eventuell auch andere Stücke des Streckenzuges zwischen N_1 und Q durch Kreisbögen auf K ersetzt, erhält man schließlich einen Weg, der P und Q verbindet, der ganz in G verläuft und von dem kein Punkt einen Abstand von A besitzt, der größer als r ist.

Wir haben demnach das Resultat: *Je zwei Punkte des Gebietes G , deren Abstand von A weniger als $m(r)$ beträgt, können innerhalb des Ge-*

bietes G durch einen Weg verbunden werden, dessen größter Abstand von A die Zahl r nicht übersteigt.

Es sei jetzt r_1, r_2, \dots eine Folge von unendlich vielen positiven Zahlen, die den Bedingungen

$$r_n > r_{n+1}, \quad \lim_{n=\infty} r_n = 0$$

genügen; ferner sei P_1, P_2, \dots eine Folge von Punkten, die im Gebiete G liegen und deren Entfernungen $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ von A der Bedingung

$$\varrho_n < m(r_n)$$

genügen. Da nach Vorigem $m(r_{n+1}) \leq m(r_n)$ ist, wird auch $\varrho_{n+1} < m(r_n)$ sein. Nun verbinde man einen beliebigen inneren Punkt O des Gebietes G mit P_1 durch einen Weg, der ganz in G verläuft, hierauf P_1 mit P_2 durch einen Weg innerhalb G , der von A um nicht mehr als r_1 abweicht, P_2 mit P_3 durch einen Weg innerhalb G , der von A um nicht mehr als r_2 abweicht, und allgemein P_n mit P_{n+1} durch einen Weg dessen größter Abstand von A höchstens r_n ist.

Die so erhaltene Kurve $OP_1P_2\dots$ kann natürlich noch Doppelpunkte enthalten, die man vermeiden kann indem man gewisse Teile dieser Kurve fortläßt. Man erhält schließlich eine Kurve, die sämtliche Merkmale des Jordanschen Kurvenstückes besitzt, ganz in G verläuft und die Punkte O und A verbindet.

13. Das von einer Jordanschen Kurve γ begrenzte ganz im endlichen liegende einfach zusammenhängende Gebiet G denken wir in der Ebene der komplexen Veränderlichen u ausgebreitet. Es sei O ein beliebiger Punkt des Inneren von G und $f(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre analytische Funktion von z , die das Innere von G auf das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ derart abbildet, daß O dem Punkte $z = 0$ entspricht und in diesem Punkte die Richtungen der positiven reellen Achsen der u - und der z -Ebene einander entsprechen. Die Funktion $f(z)$ ist durch diese Bedingungen vollkommen bestimmt.*)

Es sei A ein beliebiger Punkt der Jordanschen Kurve γ ; es bezeichne ferner u_1, u_2, \dots eine Folge von unendlich vielen Punkten des Inneren von G , die gegen A konvergieren. Dieser Punktfolge entspricht vermöge der Abbildung eine Folge von Punkten z_1, z_2, \dots , die alle im Kreise $|z| < 1$ liegen.

Diese letzte Punktfolge kann keinen Häufungspunkt im Inneren von $|z| < 1$ besitzen; denn aus der Existenz eines derartigen Häufungspunktes folgt die Existenz eines Häufungspunktes der u_1, u_2, \dots im Inneren von

*) Osgood, [Trans. Am. Math. Soc I (1900), S. 310, 314.] Vgl. auch meine Arbeit Math. Ann. 72 [S. 107—144], S. 111.

G , was unserer Annahme widerspricht. Sämtliche Häufungspunkte der Folge z_1, z_2, \dots liegen demnach auf dem Kreise $|z| = 1$; wir wollen beweisen, daß die Punkte z_1, z_2, \dots gegen einen wohlbestimmten Punkt dieser Kreislinie konvergieren.

Wenn nämlich letzteres nicht zuträfe, so müssten die Punkte z_1, z_2, \dots mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte A_1 und B_1 besitzen. Wir könnten dann nach dem Fatouschen Satze (§ 3) im Kreise $|z| < 1$ zwei Radien $O_1 C_1$ und $O_1 D_1$ finden, welche die Punkte A_1 und B_1 trennen, derart, daß, wenn z längs des Radius $O_1 C_1$ gegen C_1 konvergiert, der Punkt $u = f(z)$ gegen einen von A verschiedenen Punkt C konvergiert, und wenn z längs $O_1 D_1$ gegen D_1 konvergiert, der Punkt $u = f(z)$ gegen

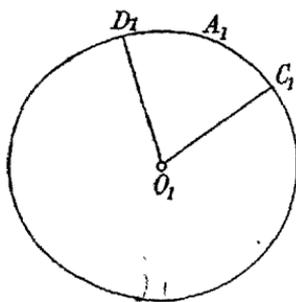
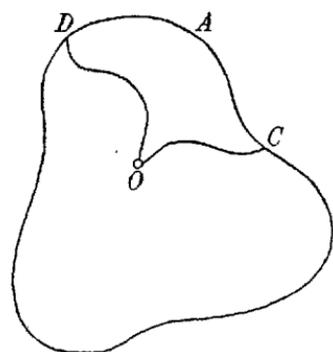


Fig. 1.

einen von A und C verschiedenen Punkt D konvergiert (Fig. 1). Die Punkte C und D können keinem inneren Punkte des Gebietes G entsprechen, sind aber Häufungspunkte von Punkten, die in G liegen; sie sind also Punkte der Jordanschen Kurve γ selbst.

Das Bild des Streckenzuges $D_1 O_1 C_1$ in der u -Ebene ist ein Jordansches Kurvenstück, das ganz in G verläuft und dessen Endpunkte mit C und D zusammenfallen, also nach unserer Definition des § 11 ein Querschnitt von G .

Dieser Querschnitt zerlegt das Gebiet G in zwei Teilgebiete G' und G'' , die in der Abbildung den Kreissektoren $D_1 O_1 C_1 A_1$ und $D_1 B_1 C_1 O_1$ entsprechen.

Liegt nun z. B. der Punkt A auf der Begrenzung von G' , so ist nach der Eigenschaft a) des § 10 die Entfernung zwischen A und G'' von Null verschieden und es kann nur eine endliche Anzahl von Punkten der Folge u_1, u_2, \dots , die ja gegen A konvergiert, in G'' oder auf der Begrenzung von G'' liegen. Die Punkte der Folge z_1, z_2, \dots , die in $D_1 B_1 C_1 O_1$ liegen, entsprechen aber in der Abbildung Punkten von G'' oder von dessen Begrenzung und sind daher auch nur in endlicher Anzahl vorhanden; die Punktfolge z_1, z_2, \dots kann also unmöglich den Häufungspunkt B_1 besitzen.

Wir haben also das Resultat: *Jedem Punkte A der Jordanschen Kurve γ entspricht bei der Abbildung ein Punkt A_1 des Kreises $|z| = 1$ von der Eigenschaft, daß jede Punktfolge u_1, u_2, \dots , die gegen A konvergiert, auf eine Punktfolge z_1, z_2, \dots abgebildet wird, die gegen A_1 konvergiert.*

14. Aus unserer Schlußweise folgt leicht, daß die soeben bewiesene eindeutige Abbildung der Jordanschen Kurve γ auf den Kreis $|z| = 1$ stetig ist. Sind mit anderen Worten $A', A'', \dots, A^{(n)}, \dots$ unendlich viele Punkte von γ , die gegen A konvergieren, $A'_1, A''_1, \dots, A^{(n)}_1, \dots$ ihre Bilder auf dem Kreise $|z| = 1$, so müssen diese Punkte gegen das Bild A_1 von A konvergieren. Wir können nämlich eine Folge von Punkten $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ des Inneren von G bestimmen derart, daß der Abstand zwischen u_n und $A^{(n)}$ und der Abstand zwischen dem entsprechenden z_n und $A^{(n)}_1$ beide kleiner als $\frac{1}{n}$ werden. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$, also gemäß dem Theorem des vorigen Paragraphen $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A_1$ und mithin wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A^{(n)}_1 - z_n| = 0 \quad \text{auch} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)}_1 = A_1$$

w. z. b. w.

15. Unser nächstes Ziel besteht darin, zu zeigen, daß zwei verschiedenen Punkten A und B der Jordanschen Kurve γ zwei verschiedene Punkte A_1 und B_1 des Kreises $|z| = 1$ entsprechen.

Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile und zeigen zunächst, daß auf jedem Kurvenbogen der Jordanschen Kurve γ Punktepaare existieren, deren Bilder auf dem Kreise $|z| = 1$ getrennt liegen. Es sei M ein innerer Punkt des betrachteten Kurvenbogens; die Entfernung δ zwischen M und dem übrigen Teile der Jordanschen Kurve ist von Null verschieden. Ein Kreis mit dem Mittelpunkte M und einem Radius, der kleiner als δ ist, wird nach den Überlegungen des § 12 mindestens einen Kreisbogen β enthalten, der ganz außerhalb des Gebietes G verläuft und dessen Endpunkte P und Q auf dem von uns betrachteten Kurvenbogen liegen und voneinander verschieden sind.

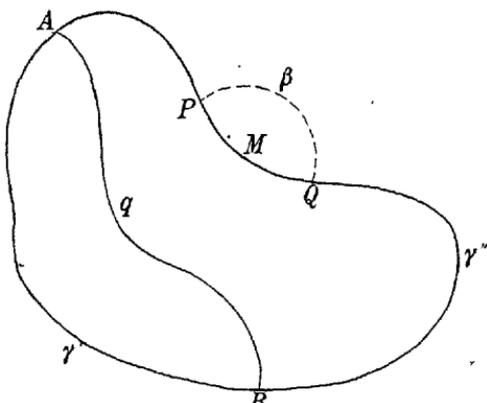


Fig. 2.

Durch das Punktepaar PQ wird die Jordansche Kurve in zwei Teile γ' und γ'' zerlegt, von denen jeder mit β eine geschlossene Jordansche Kurve bildet. Das Innere der einen dieser Jordanschen Kurven, z. B. das Innere Γ von $(\gamma' + \beta)$, wird unser Gebiet G enthalten. Nun können wir G auf den Kreis $|z| = 1$ abbilden, indem wir zuerst Γ auf einen Kreis $|u_1| \leq 1$ abbilden (wobei G in G_1 übergehen mag) und dann das Gebiet G_1 auf $|z| \leq 1$ abbilden.

Der Rand von Γ enthält den (freien) Kreisbogen β . Nach unserem zweiten Hilfssatze (§ 10) werden auf $|u_1| = 1$ die Endpunkte P und Q getrennten Punkten P_1 und Q_1 entsprechen. Das Gebiet G_1 wird demnach ebenfalls einen freien Kreisbogen (nämlich das Bild von γ') mit den voneinander verschiedenen Endpunkten P_1 und Q_1 besitzen, die bei der Abbildung auf $|z| = 1$ wiederum in getrennte Punkte übergehen. W. z. b. w.

Sind nun A und B zwei verschiedene Punkte der Jordanschen Kurve γ , so können wir sie nach § 11c) durch einen Querschnitt q des Gebietes G miteinander verbinden.

Bei der konformen Abbildung des Gebietes G auf den Einheitskreis $|z| < 1$ geht q in eine Kurve q_1 über, die nach § 13 höchstens zwei Punkte (nämlich die Bilder A_1 und B_1 der Punkte A und B) mit der Kreisperipherie $|z| = 1$ gemeinsam hat. Um nun zu zeigen, daß diese Punkte getrennt liegen, genügt es einfach zu bemerken, daß jedes der Teilgebiete G_1' und G_1'' , die im Kreise $|z| < 1$ durch q_1 bestimmt werden, mindestens zwei getrennte Punkte der Peripherie des Kreises $|z| = 1$ auf ihrer Begrenzung enthalten. Dieses ist aber nach obigem selbstverständlich, da sowohl G_1' als auch G_1'' Bilder von den durch q bestimmten Gebieten G' und G'' sind, die beide auf ihrer Begrenzung einen ganzen Bogen der Jordanschen Kurve γ enthalten.

16. Wir haben bewiesen, daß jedem Punkte der Jordanschen Kurve bei der Abbildung ein einziger Punkt des Kreises entspricht, und daß zwei verschiedenen Punkten von γ zwei verschiedene Punkte von $|z| = 1$ entsprechen. Wir entnehmen aus diesen Eigenschaften der Abbildung, daß jedem Punkte A_1 von $|z| = 1$ ein und nur ein Punkt A von γ entspricht. Jeder Punktmenge $z_1 z_2 \dots$, die in $|z| < 1$ liegt und gegen A_1 konvergiert, entspricht nämlich vermöge der Abbildung eine Punktmenge u_1, u_2, \dots in G , deren sämtliche Häufungspunkte auf γ liegen. Sie muß aber mindestens einen Häufungspunkt A besitzen und sie kann nicht zwei Häufungspunkte A und B haben, da sonst die Menge z_1, z_2, \dots nicht konvergieren könnte.

Hieraus folgt, daß die Abbildung der Jordanschen Kurve γ auf der Kreisperipherie $|z| = 1$ *eindeutig* ist; daß sie auch *stetig* ist, haben wir schon im § 12 bewiesen.

17. Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt ohne weiteres, daß man das *Randwertproblem* für die partielle Differentialgleichung $\Delta u = 0$ für ein beliebiges durch eine Jordansche Kurve begrenztes Gebiet lösen kann. Bisher war nur der Existenzbeweis einer Greenschen Funktion für derartige Gebiete erbracht, was bekanntlich sehr viel weniger bedeutet.