

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

No. 597.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professors *Hansen* an den Herausgeber.
Gotha 1847. März 12.

Ich komme nun auf meine Arbeiten der letzten Zeit. Unsere bisherigen Mondtafeln liefen in der mittleren Bewegung des Mondes eine oder mehrere unbekannte Ungleichheiten langer Periode übrig, die keine Theorie anzugeben vermochte. *Laplace* macht in der *Méc. cél.* auf mehrere Argumente aufmerksam, die wohl diesen unbekannten Ungleichheiten angehören könnten, erklärt aber dort, daß die Theorie deren Coefficienten auf eine zu verwickelte Art gäbe, als daß man hoffen dürfe sie dadurch kennen zu lernen. Er schlug daher vor namentlich Eins dieser Argumente, dessen Coefficienten er für nicht unmerklich hielt, in die Mondtafeln empirisch einzuführen, und machte selbst einen derartigen Versuch, den er *Méc. cél.* Tome VII pag. 294 giebt. Mit den Correctionen der Tafeln, die er anführt, gelangte er auch zu einer guten Uebereinstimmung. Man hat darauf in mehreren Mondtafeln diese Ungleichheit entweder unverändert oder etwas abgeändert aufgenommen. *Burkhardt* hat in seinen Mondtafeln auf Angabe von *Laplace* dieses Argument in etwas veränderter Form angenommen. *Laplace* selbst, so wie andere Geometer haben später versucht, den Coefficienten dieser Ungleichheit durch die Theorie zu bestimmen, aber wenn gleich keiner von ihnen den Werth desselben angegeben hat, so sind doch alle auf den Schluß gekommen, daß derselbe so klein sein muß, daß er durch die feinsten Beobachtungen unerkennbar ist. Meine bisherigen Rechnungen gaben mir denselben auch unmerklich. Für die andern von *Laplace* aufgestellten Argumente hat man ebenfalls keine merklichen Coefficienten finden können. Nun sind freilich die älteren, größtentheils empirischen Mondtafeln, mit welchen die bisher bekannten Vergleichen vorgenommen worden sind, sehr mangelhaft, und es blieb daher die Vermuthung übrig, daß die aufgestellten Correctionen der Epoche der Mondlänge, zum Theil wenigstens, ihren Grund in der Unvollkommenheit dieser Tafeln haben könnten. Von den einzigen, auf eine ausgedehntere Theorie, und ohne empirische Bestimmungen gegründeten Mondtafeln, die wir jetzt haben, den *Damoiseau'schen*, sind mir keine Vergleichen mit den Beobachtungen bekannt, die einen langen Zeitraum umfassen.

So stand die Sache wie *Airy* mich im vorigen Sommer besuchte und mir einen Theil eines Briefes zeigte, den er so eben von dem ersten Assistenten der Greenwich Sternwarte

Herrn *Main* erhalten hatte. Dieser Brief enthielt das Endresultat der Vergleichung der Greenwicher Beobachtungen von 1750 bis 1830 mit *Plana's* Theorie. Das Resultat, welches Herr *Airy* mir zu copiren erlaubte ist folgendes:

| | | |
|-------------------|--------------------|--------|
| Von 1750 bis 1754 | Corr. der Epoche = | —4"577 |
| 1755 — 1764 | _____ | —1,376 |
| 1765 — 1773 | _____ | +1,441 |
| 1774 — 1782 | _____ | +3,604 |
| 1783 — 1791 | _____ | +3,761 |
| 1792 — 1801 | _____ | +2,768 |
| 1802 — 1810 | _____ | +1,122 |
| 1811 — 1819 | _____ | —0,618 |
| 1820 — 1830 | _____ | —0,799 |

Er bemerkte aber dabei, daß diese Correctionen der Mondsepoche nach der letzten Revision der Greenwicher Reductionen wohl eine kleine Abänderung werden erleiden können, doch hält er es nicht für möglich, daß irgend eine derselben mehr als 0"05 geändert werden müsse.

Dies Resultat giebt auf bestimmte Art zu erkennen, daß Ungleichheiten von sehr langer Periode ausgelassen sind. Zwar sind viele von *Plana's* Coefficienten nicht so genau wie der jetzige Zustand der Beobachtungskunst es erfordert, allein auf das vorstehende Resultat, in welchem im Durchschnitt die Beobachtungen von je 9 Jahren vereinigt sind, kann dieser Umstand nur unmerklichen Einfluß haben. Es dürfte daher als gewiß angenommen werden, daß unbekannte Ungleichheiten von langer Periode in der Bewegung des Mondes vorhanden sind, und es kam darauf an sie zu finden. Ich fing an nach etwas veränderter Methode, die schwierigsten der Coefficienten, die ich schon früher berechnet hatte, wieder zu berechnen, fand aber nur Unterschiede mit meinen früheren Resultaten, die kleiner wie 0"1 waren. Hierauf, und nachdem ich nochmals alle Umstände, die bei der Bewegung des Mondes in Betracht kommen können, erwogen hatte, blieb ich bei der Ansicht stehen, daß die fraglichen Ungleichheiten nur durch die Anziehung der Planeten bewirkt werden könnten. Die aus dieser Quelle entstehenden Ungleichheiten hatte ich bis jetzt noch gar nicht vorgenommen. Sie scheinen nach dem was man in der *Méc. cél.* und bei *Damoiseau* darüber findet, so einfach und leicht zu berechnen, und so genau bestimmt zu sein, daß ich meinte sie von diesen Geometern ohne Weiteres entlehnen zu können. Auch hat *Poisson*, und noch

kürzlich die Academie der Wissenschaften in Paris (in dem Bericht über *Delaunay's* Abhandlung) sich dahin ausgesprochen, daß hierin die Schwierigkeit des Problems nicht liege. **Indes** war dieser der einzige Punkt, wo nach meinem Dafürhalten, die Quelle der fraglichen Ungleichheiten gesucht werden konnte, und ich entschloß mich daher, die von den Planeten erzeugten Ungleichheiten zu berechnen, und dabei viel Weiter zu gehen, wie meine Vorgänger. Der Erfolg hat meine Ansicht gerechtfertigt; ich habe in der That mehrere hiedurch erzeugte Ungleichheiten langer Periode gefunden, welche die oben angeführten Unterschiede der Beobachtungen mit der Theorie besser darstellen, wie ich aus Gründen, die ich weiter unten anführen werde, vermuthen durfte.

Es boten sich mir zu Anfang dieser Untersuchungen bald eine beträchtliche Anzahl von Argumenten dar, die langen Perioden angehören, und zu einem dieser Argumente fand ich bald, mit bloßer Berücksichtigung der ersten Potenz der störenden Kraft einen Coefficienten von $16''$, nemlich die Ungleichheit der mittleren Mondslänge =

$$16''01 \sin (-g - 16g' + 18g'' + 35^\circ 20'2)$$

g .. mittlere Anomalie des Mondes

g' .. ————— der Erde

g'' .. ————— der Venus.

Ich substituirte diese Ungleichheit in die Correctionen der Epochen, fand aber gar keine Uebereinstimmung, weshalb ich vermuthete, daß noch mehrere solcher Ungleichheiten vorhanden wären. Ich untersuchte daher hierauf die Coefficienten einer großen Anzahl von andern Argumenten die langen Perioden entsprechen, fand aber nirgends einen Coefficienten der Eine Secunde erreichen konnte. Ich berücksichtigte hierauf das Quadrat der störenden Kraft bei dem vorstehenden Coefficienten, fand aber nur eine unmerkliche Zunahme desselben. Alsdann fing ich an den Cubus und das Biquadrat der störenden Kraft in Rechnung zu ziehen, die ich auch früher bei mehreren der andern Ungleichheiten schon mitherücksichtigt hatte. Hier zeigte sich aber, daß ich ein verändertes Verfahren in Anwendung bringen mußte, denn die Methode der successiven Substitutionen, die ich, wenn gleich auf eigenthümliche Art bei den meisten der früher berechneten Ungleichheiten angewandt hatte, und welche andere Astronomen durchgehends angewandt haben, mußte nothwendig schon bei Ungleichheiten von kürzerer Periode wie die vorstehende auf divergirende Reihen führen. Ich mußte daher von der Methode der unbestimmten Coefficienten Gebrauch machen. Hierbei kam mir ein eigenthümlicher Kunstgriff zu statten, den ich schon bei der Berechnung des größten Theils der übrigen Mondstörungen angewandt hatte. Die Ausdrücke, die ich in den „Fundamentis etc.“ für die Berechnung der Mondstörungen

gegeben habe, habe ich unmittelbar nur auf die Berechnung der Abtheilungen der Störungen angewandt, die die größten Coefficienten enthalten, für alle andern in diesem Buche angeführten Abtheilungen der Mondstörungen habe ich die Variation der dort gegebenen Formeln benutzt, und dadurch große Beschleunigung und Sicherheit in den numerischen Rechnungen erlangt. Denn dadurch wurde ich in den Stand gesetzt, die Quadrate und Producte der zu berechnenden Störungen übergehen zu können, und brauchte in der Rechnung nur die erste Potenz derselben zu berücksichtigen. Bei der Verbindung der Methode der unbestimmten Coefficienten mit den oben bezeichneten Formeln mußte ich nothwendig auf ein System von linearischen Bedingungs-Gleichungen kommen, durch deren Auflösung sich der gesuchte Coefficient ergab. Ich brachte es dahin diesem System von linearischen Gleichungen eine solche Form zu geben, daß es für alle Ungleichheiten von langer Periode gilt, und bei der Anwendung auf ein bestimmtes Argument nur die Substitution des diesem zukommenden Coefficienten in den Entwicklungen der Störungsfunctionen des Mondes und der Sonne, so wie die Substitution des Coefficienten der Zeit, der demselben Argument angehört, erfordern. Dasselbe System von Gleichungen giebt überdies mit geringer Abänderung die Säcularänderungen der mittleren Länge, der Apsiden- und der Knotenlinie des Mondes.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf das oben genannte Argument gab mir den Coefficienten $27''4$, welcher noch weniger mit den Beobachtungen stimmt wie der obige, und daher die Ansicht befestigte, daß außerdem noch merkliche Ungleichheiten von langer Periode vorhanden sein müßten. Zur zweiten Anwendung der genannten Gleichungen wählte ich das bekannte Argument $8g'' - 13g'$, dessen Periode nur wenig kleiner ist, wie die des obigen Arguments, und dessen Coefficient in der Sonnenbewegung, wie *Airy* zuerst gezeigt hat, $2''$ beträgt. Die Substitution der dahin gehörigen Größen in die beschriebenen Gleichungen gab in der mittleren Bewegung des Mondes die Ungleichheit

$$23''2 \sin (8g'' - 13g' + 315^\circ 30')$$

Ich wandte hierauf meine Gleichungen noch auf einige andere Argumente von bedeutend kürzeren Perioden an, und erhielt auch von einigen zwar merkliche, jedoch kleine Coefficienten, die ich hier übergehe weil ihr Einfluss auf die Correction der Epoche des Mondes nur unbedeutend sein kann. Endlich wandte ich diese Gleichungen auch auf die Säcularänderungen des Mondes an und erhielt:

$$\begin{aligned} \text{Säcularänderung der mittleren Anomalie} &= +47''78 t^2 \\ \text{Säcularänderung des Perigäums} &= -36,31 t^2 \end{aligned}$$

Die Säcularänderung der Knotenlinie kann ich jetzt noch nicht angeben, weil ich die Bedingungsgleichungen für die Breitenstörungen noch nicht vollständig entwickelt habe.

Im 19. Bande der Astr. Nachr. S. 194 habe ich das Resultat für diese Säcularänderungen bekannt gemacht, welches meine früheren Rechnungen, vermittelt einer auf das bekannte Integral $\int (e'^2 - (e')^2) dt$ basirten Methode gegeben hat. Die Unterschiede zwischen diesem und dem oben angeführten Resultat sind beziehungsweise

$$\begin{aligned} 27''4 \sin(-g - 16g' + 18g'' + 35^\circ 20'2) \\ 23,2 \sin(8g'' - 13g' + 315^\circ 30') \end{aligned}$$

beide sind durch die Anziehung der Venus erzeugt. Die erste entsteht durch die directe Einwirkung dieses Planeten auf den Mond, die zweite theils durch dieselbe Ursache, theils durch die durch die Erde reflectirte Anziehung desselben Planeten.

Ich komme jetzt auf einen ungünstigen Umstand, der sich bei der Berechnung der vorstehenden Coefficienten ereignet hat. Wie ich die Rechnung anfang war es mir unmöglich genau zu ermitteln, wie viele Decimalstellen ich in der Berechnung der Coefficienten der oben beschriebenen linearischen Gleichungen beibehalten müsse, um im Endresultat einzelne Secunden verbürgen zu können. Ich mußte vermittelt unsicherer Indicien über die Zahl der aufzunehmenden Decimalstellen entscheiden, und dadurch ist bewirkt worden, daß in der That eine nicht hinreichende Anzahl beibehalten worden ist, um bei so langen Perioden, wie die der beiden vorstehenden Gleichungen, die Richtigkeit der Coefficienten bis auf einzelne Secunden verbürgen zu können. Die vorstehenden Werthe dieser Coefficienten können merklich von den richtigen Werthen derselben abweichen, und ich sehe mich daher genöthigt die Rechnungen mit Zuziehung von einer oder zwei Decimalstellen mehr, wie bis jetzt geschehen ist, zu wiederholen. Wenn man die Divisoren erwägt, die den obigen Ungleichheiten angehören, und sie mit dem kleinsten Divisor vergleicht, der bei der Berechnung der von der Sonne verursachten Mondstörungen vorkommt, so wird man erkennen, daß die Einwirkung von kleinen Gliedern hier von weit bedeutenderem Belang ist. Für die obigen Ungleichheiten sind die Divisoren beziehungsweise

$$(0,00027636)^2 \text{ und } (0,00031575)^2$$

während der kleinste Divisor, der bei den durch die Sonne bewirkten merklichen Störungen vorkommt

$$(0,0085234)^2$$

beträgt, also beziehungsweise 951 und 729 Mal größer ist wie jene.

Da des eben angeführten Umstandes wegen, die obigen beiden Coefficienten sehr wohl wesentlich von den richtigen

$$-3''33 t^2 \text{ und } +2''87 t^2$$

so daß die Differenz der hieraus folgenden Säcularänderungen der mittleren Länge des Mondes nur $-0''46 t^2$ beträgt.

Mit Uebergang der Ungleichheiten von minder langen Perioden blieben mir demnach die beiden folgenden Ungleichheiten, welche auf die Epoche und mittlere Bewegung des Mondes wesentlichen Einfluss haben müssen.

$$\text{Periode} = 273 \text{ Jul. Jahre}$$

$$\text{Periode} = 239 \text{ Jul. Jahre}$$

Werthen derselben abweichen können, so erwartete ich von der Vergleichung derselben kein sonderlich günstiges Resultat. Demohngeachtet stimmen sie, wie sich nachher ergab mit *Airy's* Correctionen der Epoche des Mondes sehr gut, und lassen auch bei *Laplace's* Correctionen nur kleine Fehler übrig. Ich erkläre diesen Umstand so. Da die Berechnung dieser Coefficienten auf ein und dasselbe System von Gleichungen beruht, und sie nahe dieselbe Periode haben, so haben die Fehler der letzten Decimale in diesem System von Gleichungen nahe auf gleiche Weise auf die obigen beiden Coefficienten eingewirkt, und wenn auch nicht die absoluten Werthe derselben, doch die relativen nahe richtig gegeben. Um über diesen Punkt mehr in's Reine zu kommen, substituirt ich nach einander mehrere willkürlich veränderte Werthe des ersten Coefficienten in die *Airy's*chen Correctionen, und suchte dann den Werth des zweiten Coefficienten der mit jenem diesen Correctionen am besten genügte. Es fand sich hiebei, daß man innerhalb gewisser Grenzen für jeden beliebigen Werth des einen Coefficienten einen Werth des andern angeben kann, der mit jenem verbunden diesen Correctionen nahe genügt.

Um die Vergleichen zu machen ist zu erwägen, daß durch Auslassung der obigen Ungleichheiten die bisher angenommene Epoche der mittleren Länge des Mondes und dessen mittlere Bewegung nothwendig mit einem Fehler behaftet sein müssen. Diese beiden Fehler muß man bei der Vergleichung der neuen Ungleichheiten mit den vorher gefundenen Correctionen der Epochen zugleich bestimmen. Für *Airy's* Correctionen nahm ich an, daß jede derselben für den Zeitpunkt gilt, der in der Mitte des Zeitraums aus welchem sie gefolgert worden sind, liegt. Ferner nahm ich für die Epoche der Mondlänge das Jahr 1800 an. Nennt man nun a die Correction der Mondlänge der Epoche, und b die Correction der jährlichen mittleren Bewegung des Mondes, so bekommt man folgende 9 Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{rclcl}
a - & 48b & +13''25 & + 7''35 & = -4''58 \\
a - & 40.5b & + 8,74 & +11,53 & = -1,38 \\
a - & 31b & + 3,10 & +16,15 & = +1,44 \\
a - & 22b & - 2,57 & +19,60 & = +3,60 \\
a - & 13b & - 8,12 & +21,97 & = +3,76 \\
a - & 3,5b & -13,61 & +23,13 & = +2,77 \\
a + & 6b & -18,44 & +22,86 & = +1,12 \\
a + & 15b & -22,21 & +21,29 & = -0,62 \\
a + & 25b & -25,29 & +18,15 & = -0,80
\end{array}$$

wo die beiden letzten Columnen linker Hand die numerischen Werthe der beiden neuen Ungleichheiten sind. Aus zwei von diesen Gleichungen ergab sich vorläufig

$$\begin{array}{l}
a = -5''00 \\
b = +0,4
\end{array}$$

Nennt man nun die wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen $a + \delta a$, $b + \delta b$, und substituirt diese in die obigen Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{array}{l}
o = \delta a - 48 \delta b + 0''98 \\
o = \delta a - 40,5\delta b + 0,65 \\
o = \delta a - 31 \delta b + 0,41 \\
o = \delta a - 22 \delta b - 0,37 \\
o = \delta a - 13 \delta b - 0,11 \\
o = \delta a - 3,5 \delta b + 0,35 \\
o = \delta a + 6 \delta b + 0,70 \\
o = \delta a + 15 \delta b + 0,70 \\
o = \delta a + 25 \delta b - 1,34
\end{array}$$

welche durch die Methode der kleinsten Quadrate gaben

$$\begin{array}{l}
\delta a = -0''09 \\
\delta b = +0,0096
\end{array}$$

für die übrig bleibenden Fehler ergab sich nun

$$\begin{array}{l}
+0''43; +0''18; +0''02; -0''67; -0''32; \\
+0''23; +0''67; +0''75; -1''19
\end{array}$$

Dieses ist eine gute Uebereinstimmung, denn es kommen mehrere Zeichenwechsel darin vor, und sie sind alle, mit Ausnahme einer einzigen, kleiner wie Eine Secunde.

Die im 3ten Bande der Méc. cél. angeführten Correctionen der Mondepoche, die sich durch die Vergleichen der damaligen Tafeln mit den Beobachtungen ergeben haben, sind, wenn man sie in Sexagesimalsecunden verwandelt, folgende

$$\begin{array}{rcl}
\text{Für } 1691 & \dots & - 4''4 \\
1756 & \dots & 0,0 \\
1766 & \dots & - 3,0 \\
1779 & \dots & - 9,1 \\
1789 & \dots & -17,6 \\
1801 & \dots & -28,5
\end{array}$$

Diese Vergleichen gehen bis zu den *la Hire'schen* und *Flamsteed'schen* Beobachtungen zurück, während die obigen Greenwicher Vergleichen nur bis auf *Bradley's* Zeit zurück gehen, und daher 60 Jahr später ihren Anfang nehmen. Nimmt man hier der bequemerer Rechnung wegen das Jahr 1764 für die Epoche an, und substituirt die obigen neuen Ungleichheiten, so wie a und b , so bekommt man zuerst

$$\begin{array}{rclcl}
a - & 73b & +25''9 & -22''0 & = - 4''4 \\
a - & 8b & +11,0 & + 9,6 & = 0,0 \\
a + & 2b & + 4,9 & +14,8 & = - 3,0 \\
a + & 15b & - 3,2 & +19,9 & = - 9,1 \\
a + & 25b & - 9,3 & +22,3 & = -17,6 \\
a + & 37b & -16,0 & +23,2 & = -28,5
\end{array}$$

und nimmt man nun' vorläufig $a = -25''$, $b = -0''25$ an, so ergibt sich durch die Substitution von $a + \delta a$ u. $b + \delta b$

$$\begin{array}{l}
o = \delta a - 73\delta b + 1''35 \\
o = \delta a - 8\delta b - 2,4 \\
o = \delta a + 2\delta b - 2,8 \\
o = \delta a + 15\delta b - 2,95 \\
o = \delta a + 25\delta b - 0,65 \\
o = \delta a + 37\delta b + 1,45
\end{array}$$

und hieraus $\delta a = +1''00$, $\delta b = +0''0123$, so wie die folgenden übrig bleibenden Fehler

$$+1''4; -1''5; -1''8; -1''8; +0''7; +2''9$$

welches in Betracht der Zeit in welche die ersten hier angewandten Beobachtungen fallen, und der Tafeln womit die obigen Correctionen der Epoche abgeleitet worden sind, für eine gute Uebereinstimmung angesehen werden kann. Ich habe nach dieser Uebereinstimmung Grund anzunehmen, daß die obigen beiden Ungleichheiten, die wichtigsten derjenigen sind, die bisher in der Theorie fehlten.

P. A. Hansen.

Schreiben des Herrn *J. R. Hind* an den Herausgeber.

Mr. Bishop's Observatory, Regent's-Park, London 1847. April 13.

Dr. Petersen's discovery of an observation of Neptune by *Lalande* is truly important. After a rigorous reduction, I find the position of the planet to be

$$\begin{array}{ccc}
\text{Paris M. T.} & \text{AR.} & \delta. \\
1795 \text{ May } 10 & \text{at } 10^{\text{h}}57^{\text{m}}1^{\text{s}} & 212^{\circ}56'33''11 \quad -11^{\circ}19'36''61
\end{array}$$

The corrections to observed AR. and ZD. were obtained by 8 stars, well determined by *Piazzi* and *Henderson*.

The Comet was observed here at Noon-day on March 30, It was first perceived at 11^h a. m. with a power of 40 on our large refractor, the eye being protected from the intense glare by a light green glass. The nucleus of the comet was round or nearly so, beautifully defined and planetary. Two short rays of light formed a divided tail, not more than