

Sulle funzioni automorfe ed iperfuchsiane di più variabili indipendenti.

(Di GUIDO FUBINI, a Catania.)

Nella mia Memoria: *Sulle forme quadratiche, Hermitiane e sui sistemi di tali forme* (*), io ho indicato una classe di gruppi discontinui propriamente di movimenti in spazii a curvatura non costante, il cui elemento lineare è somma di forme differenziali quadriche a curvatura costante. E tra questi gruppi ve ne sono, come abbiamo visto, molti assai interessanti perchè sono *definibili aritmeticamente*, e di cui non solo si possono dare le trasformazioni generatrici e il corrispondente campo fondamentale, ma si possono addirittura caratterizzare in modo elementare tutte le trasformazioni. Di questi gruppi io ho allora indicato soltanto la teoria generale e le applicazioni aritmetiche, senza entrare in minuti dettagli; io voglio ora qui indicarne alcune applicazioni funzionali. Noterò soltanto che nella classe dei nostri gruppi rientrano come particolarissimi casi i gruppi iperabeliani di PICARD, i gruppi, che si potrebbero dire ipermodulari di HILBERT studiati poi dal BLUMENTHAL (*Math. Annalen*, 1903). Anzi mentre il BLUMENTHAL studia soltanto gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi in un campo algebrico e nei campi coniugati, quando tutti questi campi siano reali, nel nostro studio rientrerà anche come caso particolarissimo la generalizzazione di tali gruppi, quando tali campi algebrici siano in parte o anche tutti complessi. E di più le ricerche già svolte nella mia Memoria citata danno un mezzo generale e che ben si presta all'intuizione geometrica per trovare i campi fondamentali dei nostri gruppi. Infine vedremo una ulteriore generalizzazione, che a mio credere, comprende

(*) *Atti dell'Accademia Gioenia* (Catania) (Serie 4.^a, Vol. 17).

tutte le funzioni invarianti per qualche gruppo discontinuo (comprese le precedenti e le iperfuchsiane di PICARD) finora studiate e si vedrà anche qui che in qualche caso si possono trovare sussidii aritmetici nella teoria delle forme Hermitiane che noi abbiamo svolto nella Memoria citata.

§ 1. Riprenderò le denominazioni usate nella mia Memoria citata. Supponiamo che l'elemento lineare dello spazio ambiente S , sia uguale alla somma degli elementi lineari di m spazii (parziali) subordinati, indipendenti, e appartenenti allo spazio ambiente. Supponiamo che tutti questi spazii parziali $S_n^{(1)} \dots S_n^{(m)}$ siano a due o a tre dimensioni e, per fissare le idee, supponiamo che quelli di essi che sono a tre dimensioni siano tutti iperbolici ossia che viga in essi la metrica di LOBACEVSKIJ.

Ricordiamo ora che i movimenti di uno spazio a due dimensioni a curvatura costante (piano, sfera o pseudosfera) sono tutti rappresentabili mediante trasformazioni lineari su una variabile complessa, definita da un sistema isotermo di linee tracciato sulla superficie; o, in altre parole, se la curvatura non è nulla, mediante una trasformazione lineare sulla variabile complessa definente i punti della conica-assoluto $Q=0$ della superficie in discorso.

Se poi la curvatura è negativa, si può con una trasformazione della nostra variabile far sì che tutte le nostre trasformazioni lineari risultino a coefficienti reali. Sia ora dato invece uno spazio iperbolico a tre dimensioni, di cui $Q=0$ sia la quadrica all'infinito e consideriamo un suo movimento M di prima specie. Noi potremo definire un tale movimento, indicando come si trasformano le generatrici di $Q=0$.

E poichè le due serie rigate di $Q=0$ sono enti geometrici di prima specie immaginari coniugati, avremo che al movimento (reale) M corrisponde una coppia di sostituzioni lineari immaginarie coniugate. Avremo perciò che a un gruppo propriamente discontinuo di tali movimenti M corrisponde un gruppo propriamente discontinuo su due variabili λ, μ di trasformazioni del tipo

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta} \quad \mu' = \frac{\alpha_0 \lambda + \beta_0}{\gamma_0 \lambda + \delta_0}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti in generale complesse; di cui $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ sono le immaginarie coniugate; o, se noi vogliamo usare di un procedimento di KLEIN (*) corrisponde (ciò che in fondo è lo stesso) un gruppo propriamente discontinuo su due variabili λ, μ di trasformazioni

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta}; \quad \mu' = \frac{\alpha \mu + \beta}{\gamma \mu + \delta}.$$

(*) Cfr. KLEIN, *Differentialgleichungen*, 1891.

Abbiamo dunque che ai gruppi G discontinui di movimenti nei nostri spazii S , corrispondono dei gruppi discontinui H di sostituzioni lineari su $2i + k$ variabili complesse (se i è il numero degli spazii parziali a 3 dimensioni, k quello degli spazii a due dimensioni) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2i+k}$; ciascuna delle operazioni T del gruppo è prodotto di $2i + k$ trasformazioni lineari parziali T_1, \dots, T_{2i+k} di cui la s -esima ($s = 1, 2, \dots, 2i + k$) opera soltanto su λ_s . Un tale gruppo si dirà da noi un gruppo misto. E ne traggiamo i teoremi:

A ogni gruppo G di movimenti di uno dei nostri spazii S , corrisponde un gruppo misto H su $2i + k$ variabili.

*Un gruppo misto su $2i + k$ variabili tale che k trasformazioni parziali (corrispondenti a una qualunque trasformazione T del gruppo) sono a coefficienti reali, mentre le residue $2i$ sono a due a due identiche oppure immaginarie coniugate e che di più non possenga alcuna trasformazione infinitesima (ossia che nessuna trasformazione del gruppo abbia contemporaneamente infinitesime tutte le sue trasformazioni parziali) è certamente **propriamente discontinuo** nel campo delle $2i + k$ variabili su cui opera.*

È questo il teorema fondamentale della nostra teoria. Notiamo però, che, come del resto vedremo più tardi, non è sempre necessaria la condizione che insieme a ogni trasformazione immaginaria comparisca un'altra trasformazione o identica a essa, o immaginaria coniugata.

§ 2. Vogliamo ora indicare un metodo generale per costruire un campo fondamentale per un gruppo misto qualunque. Cominciamo dapprima a considerare il corrispondente gruppo G di movimenti per uno dei nostri spazii S_i ; per esso noi abbiamo già trovato nella Memoria citata un mezzo per la costruzione di campi fondamentali normali e abbiamo anche accennato che per la costruzione di un poliedro fondamentale si potrebbe anche ricorrere ad un ampliamento per riflessione (quando è possibile). Passiamo ora al gruppo H . Se $i = 0$ ossia se tutti gli spazii parziali di S sono a due dimensioni, nulla vi ha da dire, perchè i gruppi H e G si possono considerare come identici, in quanto che ogni variabile complessa, su cui opera H si può considerare come rappresentatrice dei punti del corrispondente spazio parziale di S , e i gruppi H e G si possono perciò riguardare come operanti su una stessa varietà.

Sia ora qualche spazio parziale R di S , a tre dimensioni; in un tale spazio usiamo coordinate di RIEMANN x, y, z ossia lo immaginiamo rappresentato su un semispazio euclideo, in cui x, y, z siano coordinate cartesiane e $z = 0$ rappresenti il piano limite. E su questo piano $z = 0$ immaginiamo

al solito distesa la variabile complessa $x + iy$. Per passare da G ad H noi consideravamo G operante sulle coppie di generatrici (*) dell'assoluto di R ; è evidente che a questa considerazione equivale quella di considerare G come operante sulle coppie di punti del piano limite $z = 0$ (**) (almeno nel caso che $2i$ trasformazioni a coefficienti complessi di H siano a due a due identiche) ossia, poichè due tali punti definiscono una geodetica di R , come operante sulle geodetiche di R . In altre parole (almeno nel caso citato) si passa dal gruppo G al gruppo H considerando G operante, anzichè sui punti, su quelle varietà V di S , a cui corrispondono su ciascun spazio parziale a due dimensioni dei punti, e su ciascun spazio parziale a tre dimensioni una geodetica dello spazio stesso. Naturalmente G opera anche su queste varietà V in modo propriamente discontinuo. Noi vogliamo però notare espressamente che può avvenire per qualche gruppo G (che si potrebbe chiamare iperkleiniano) che esso operasse già in modo propriamente discontinuo su qualche varietà più semplice. Siano infatti R_1, R_2, \dots, R_i gli i spazii parziali a tre dimensioni, di cui $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_i, y_i, z_i)$ siano le coordinate Riemanniane. Consideriamo il poliedro P fondamentale di G . Può darsi che una varietà $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_m = 0$ ($0 < m \leq i$) dello spazio totale S , penetri nell'interno di P , ossia che G oltre che in S , operi già in modo propriamente discontinuo in questa varietà. Non sarà allora necessario, per assicurare la discontinuità propria di H , considerare G operante sulle coppie di punti dei piani $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_m = 0$ di R_1, R_2, \dots, R_m ; basterà invece evidentemente considerare soltanto G come operante sui singoli punti dei piani stessi; e, come abbiamo già detto, invece di avere un gruppo misto H per ogni trasformazione del quale esistono $2i$ trasformazioni complesse a due a due identiche, potremo considerare un gruppo misto H' , ogni trasformazione del quale risulti da k trasformazioni a coefficienti reali, m a coefficienti complessi anche distinte tra loro e $2(i - m)$ trasformazioni complesse a due a due identiche. Dal gruppo G si passa ad H' , considerando G come operante su quelle varietà V' , a cui nei k spazii parziali a due dimensioni corrispondono dei punti, negli m spazii parziali R_1, R_2, \dots, R_m corrispondono solo dei punti dell'assoluto relativo, e nei residui $i - m$ spazii parziali a tre dimensioni corrispondono geodetiche. Il caso di $k = 0$, $i = m = 1$ è il ben noto caso dei gruppi su una sola variabile, a cui Poin-

(*) Una generatrice per ciascun sistema.

(**) Cfr. KLEIN, loc. cit.

CARÉ diede il nome di Kleiniani. Noi per ora considereremo il caso generale di $m = 0$; del resto anche se $m \neq 0$, si possono ai gruppi H' applicare tutte le seguenti considerazioni. Siano V le varietà già definite poc'anzi; e immaginiamo S , come generato da esse; S , diventa così uno spazio a un numero di dimensioni, che è il doppio del numero delle variabili su cui opera il gruppo H ; lo spazio S , così considerato si indicherà da noi con Σ ; in Σ potremo chiaramente scegliere come coordinate la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria di ciascuna delle variabili, su cui opera H . Consideriamo ora in S , un poliedro fondamentale P ; a tutte le varietà V che intersecano P (o giacciono in esso) corrisponderà in Σ una certa regione L ; ora evidentemente ogni varietà V è equivalente a una varietà V intersecante P ; quindi ogni punto di Σ è equivalente a un punto di L . La ricerca del campo fondamentale di H in Σ è perciò ridotta alla ricerca più semplice di spezzare L in tante regioni più piccole L' equivalenti in modo che due punti di una di queste regioni L' non siano equivalenti tra loro. Questo studio equivale naturalmente al seguente: Consideriamo una delle nostre varietà V intersecante P . Essa da P e dagli altri poliedri P' equivalenti a P ossia trasformati di P mediante G è divisa in tanti pezzi V_1, V_2, V_3, \dots . Si tratta di vedere quali di questi pezzi possono essere tra di loro equivalenti, ricerca questa che è ben facile poichè noi conosciamo il gruppo G e i corrispondenti campi parziali; se p. es. μ di questi pezzi non sono mai equivalenti e ogni altro è equivalente a uno di essi, allora chiaramente il numero delle regioni L' è precisamente μ e la costruzione effettiva di queste μ regioni L' è eseguita senz'altro, appena si sappiano trovare i citati μ pezzi di V . Nel nostro campo generalissimo di studii è ben difficile dire qualche cosa di più preciso su queste regioni L' ; io aggiungerò soltanto che, come risulta da quanto abbiamo detto, la ricerca di queste regioni presenta la più grande analogia con la ricerca dei periodi delle forme ridotte di GAUSS, quando già si immagini di conoscere il campo fondamentale del gruppo modulare. Anzi quest'ultima ricerca non è che un caso particolarissimo della nostra.

È poi ora senz'altro evidente che ognuna delle nostre regioni L' si può assumere come campo fondamentale di H , e che considerazioni perfettamente analoghe valgono per i gruppi H .

Sia ora H un gruppo misto, Σ lo spazio su cui opera, P un suo poliedro fondamentale, $P', P'' \dots$ i poliedri equivalenti formanti con esso un'unica rete, ossia tali che dall'uno di essi si possa passare a un altro qualunque mediante una linea attraversante un numero finito dei poliedri stessi. Per con-

servare la massima semplicità, supponiamo (*Fricke Automorphe Funktionen*, Bd. II, pag. 142) che questa rete sia limitata proprio da ipersuperficie limiti, in modo tale che con convenienti trasformazioni R per raggi vettori reciproci nei piani delle singole variabili su cui opera il gruppo H , essa e le sue proiezioni sugli spazii parziali risultino a distanza finita. Noi dimostreremo con i metodi di POINCARÉ l'esistenza di funzioni analitiche delle variabili citate invarianti per H .

Siano ora ξ_1, \dots, ξ_ν le variabili complesse in discorso, $F(\xi_1, \dots, \xi_\nu)$ una funzione razionale (o anche soltanto uniforme delle stesse).

Indichiamo con $\xi'_i = \frac{\alpha_i \xi_i + \beta_i}{\gamma_i \xi_i + \delta_i}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) una trasformazione T generica del gruppo e così $F\left(\frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}\right)$ la trasformata di F mediante T . E

si costruisca al modo di POINCARÉ-PICARD la serie $\sum \frac{F\left(\frac{\alpha \xi + \beta}{\gamma \xi + \delta}\right)}{\prod_1^n (\gamma_i \xi + \delta_i)^4}$, ogni

termine, della quale corrisponde a una trasformazione del gruppo che trasporti la nostra rete in sè stessa, e viceversa.

Prendiamo un intorno σ qualsiasi a distanza finita dai punti singolari della F e dei suoi trasformati dalle succitate trasformazioni (se pur ne esistono nella nostra rete) interno alla rete stessa. Dico che in questo intorno la nostra serie converge assolutamente e in ugual grado. Infatti poichè in questo intorno i numeratori dei singoli termini della nostra serie restano inferiori a una costante assegnabile, basterà dimostrare la convergenza di

$$\sum \frac{1}{\left| \prod (\gamma_i \xi + \delta_i)^4 \right|}. \quad (1)$$

Ora il rapporto tra il massimo e il minimo valore di uno dei termini della (1) quando ξ varia nel nostro intorno è evidentemente finito; infatti, i punti le cui coordinate sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sono i trasformati del punto a distanza infinita per la trasformazione inversa di quella che corrisponde al termine considerato della nostra serie.

Non solo essi ma anche le loro proiezioni sugli spazii parziali sono, per l'ipotesi fatta, tutti esterni alla nostra rete e perciò le distanze di queste proiezioni dalle proiezioni del punto (ξ) che come sappiamo sono date da $\left| \xi + \left(\frac{\gamma_i}{\delta_i} \right) \right|$ sono superiori a una costante finita. Di più, con pseudo inversioni

convenientemente scelte potremo fare che questi punti $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ siano tutti a distanza finita e perciò $\xi + \left(\frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ non può diventare neppure infinito; ciò che dimostra il nostro asserto. Ora i denominatori di (1) misurano il coefficiente di dilatazione della nostra trasformazione considerata in Σ . Per le precedenti considerazioni, si trova allora, con i soliti metodi di POINCARÉ, che il termine della nostra serie corrispondente a una trasformazione T è minore del prodotto di una costante finita per il rapporto tra l'intorno σ' (in cui T porta σ) e l'intorno iniziale σ . Basta perciò dimostrare che i volumi di tutti gli intorni, in cui T trasforma σ , hanno una somma finita. E infatti, se σ è tanto piccolo, che esso e i suoi trasformati siano a due a due esterni uno all'altro, la nostra asserzione è evidente, perchè la somma dei loro volumi è minore del volume finito della nostra rete.

La serie iniziale è perciò, come abbiamo enunciato, assolutamente e uniformemente convergente e rappresenta quindi una funzione analitica delle nostre variabili ξ , che, come il semplice sguardo dimostra, resta moltiplicata, quando si eseguisca su di essa una operazione qualunque T del nostro gruppo, per un fattore dipendente solo da T .

I metodi di POINCARÉ-PICARD dimostrano facilmente che la nostra serie non è in generale identicamente nulla; basta perciò fare il quoziente di due tali serie, ottenute con due differenti funzioni F , per avere una funzione analitica delle nostre ξ invariante per il gruppo H .

Noi dovremmo ora studiare queste funzioni generalissime, di cui abbiamo qui accertata l'esistenza. Io però non lo farò, accontentandomi di enunciare che per esse si possono facilmente generalizzare i risultati ottenuti da PICARD e POINCARÉ nei casi più semplici. E mi accontenterò di far rilevare che anche nel tanto più complicato problema da noi studiato, si possono ottenere dei gruppi discontinui del nostro tipo definibili in modo puramente aritmetico, come abbiamo già detto.

Noi vogliamo ora parlare di una ulteriore generalizzazione delle teorie precedenti e giungeremo così a nuove generalissime funzioni uniformi di una o più variabili invarianti per un gruppo discontinuo di operazioni. Prima di studiare il caso generale, che abbiamo in vista studiamo un ulteriore caso preliminare, in cui riprenderemo le notazioni usate nella mia Memoria citata sui sistemi di forme quadratiche ed Hermitiane. Siano date ν forme Hermitiane Q_l del solito tipo $x_1^{(l)} \xi_1^{(l)} + \dots + x_{n_l-1}^{(l)} \xi_{n_l-1}^{(l)} - x_{n_l} \xi_{n_l}^{(l)}$ (*) ($l = 1, 2, \dots, \nu$)

(*) Analoghe considerazioni valgono per il caso di forme del tipo $\sum_{i=1}^{n_l} \omega_i^{(l)} \xi_i^{(l)}$.

sulle variabili $x_i^{(l)}$ e le immaginarie coniugate $\bar{x}_i^{(l)}$; e sia dato un gruppo discontinuo le cui trasformazioni trasformino in sè il dato sistema di forme.

Posto $\frac{x_i^{(l)}}{x_{n_l}^{(l)}} = u_i^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots, \nu$) ($i = 1, 2, \dots, n_l - 1$) e indicando con una lineetta sovrapposta il valore trasformato di una variabile, sia

$$\bar{u}_i^{(l)} = \frac{a_i^{(l)} u_i^{(l)} + \dots + a_{i, n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{i, n_l}^{(l)}}{a_{n_l, 1}^{(l)} u_1^{(l)} + \dots + a_{n_l, n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{n_l, n_l}^{(l)}} \quad (l = 1, 2, \dots, \nu) \quad (i = 1, 2, \dots, n_l - 1) \quad (2)$$

una trasformazione generica T del gruppo G in queste nuove variabili. Per un teorema dimostrato nella mia Memoria citata questo gruppo è *propriamente* discontinuo nelle variabili $u_i^{(l)}$, o con maggior precisione in una regione R , (definita nella mia Memoria) dello spazio S_k a $k = 2(n_1 - 1) + \dots + 2(n_l - 1)$ dimensioni, le cui coordinate sono le $v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ quando sia $u_i^{(l)} = v_i^{(l)} + i w_i^{(l)}$ [$v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ reali]. La regione R è finita ed è definita dalle

$$\sum_{i=1}^{n_l-1} \{ (v_i^{(l)})^2 + (w_i^{(l)})^2 \} < 1 \quad (l = 1, 2, \dots, \nu).$$

Io dico che esistono funzioni uniformi analitiche delle variabili $u_i^{(l)}$ esistenti proprio nella regione R di S_k che rimangono invarianti per il nostro gruppo. Sia F una funzione o razionale delle stesse variabili o anche soltanto uniforme in R e: noi indicheremo con F_T la sua trasformata per una trasformazione T del gruppo. Costruiamo ora l'Iacobiano I delle $\bar{v}_i^{(l)}$, $\bar{w}_i^{(l)}$ rispetto alle $v_i^{(l)}$, $w_i^{(l)}$ dove le v , w siano definite dalla (2), in cui si ponga $\bar{u}_i^{(l)} = \bar{v}_i^{(l)} + i \bar{w}_i^{(l)}$. Esso è naturalmente uguale al prodotto dell'Iacobiano delle $\bar{u}_i^{(l)}$ rispetto alle $u_i^{(l)}$ per la quantità immaginaria coniugata: in altre parole esso si può anche ottenere così: formiamo per ogni valore particolare dell'indice l l'Iacobiano (che indicheremo con I_l) delle $\bar{u}_i^{(l)}$ rispetto alle $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_l - 1$) e moltiplichiamolo per la quantità coniugata I_l^0 . Sarà

$$I = \prod_{l=1}^{\nu} I_l I_l^0.$$

Costruiamo ora l'Iacobiano I_l ; e poniamo

$$\bar{z}_k^{(l)} = a_{k, 1}^{(l)} u_1 + \dots + a_{k, n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1} + a_{k, n_l}^{(l)} \quad (k = 1, 2, \dots, n_l),$$

col che sarà

$$\bar{u}_i^{(l)} = \frac{\bar{z}_i^{(l)}}{z_{n_l}^{(l)}}.$$

Troviamo tosto che è, indicando per brevità con z_i le $z_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_l$)

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{\partial (\bar{u}_1^{(l)} \dots \bar{u}_{n_l-1}^{(l)})}{\partial (u_1^{(l)} \dots u_{n_l-1}^{(l)})} = \left[\frac{1}{z_{n_l}} \right]^{n_l} \left\{ z_{n_l} \frac{\partial (\bar{z}_1 \dots \bar{z}_{n_l-1})}{\partial (u_1 \dots u_{n_l-1})} - z_1 \frac{\partial (\bar{z}_{n_l} \bar{z}_2 \dots \bar{z}_{n_l-1})}{\partial (u_1 \dots u_{n_l-1})} + \dots \right\} = \\ &= \pm \left[\frac{1}{z_{n_l}} \right]^{n_l} \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \dots & \bar{z}_{n_l} \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{n_l}}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial u_{n_l-1}} & \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial u_{n_l-1}} & \dots & \frac{\partial \bar{z}_{n_l}}{\partial u_{n_l-1}} \end{vmatrix} = \pm \left[\frac{1}{z_{n_l}} \right]^{n_l} \begin{vmatrix} a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \dots & a_{1n}^{(l)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \dots & a_{nn}^{(l)} \end{vmatrix} = \\ &= \pm \left[\frac{1}{z_{n_l}} \right]^{n_l} \end{aligned}$$

supponendo il determinante della nostra proiettività uguale a 1. Quindi

$$\begin{aligned} I_l I_l^0 &= \left\{ \frac{1}{[a_{n_l 1}^{(l)} u_1 + \dots + a_{n_l n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1} + a_{n_l}] [a_{n_l}^{(l)} u_1 + \dots + a_{n_l}^{(l)}]_0} \right\}^{n_l} = \\ &= \left\{ \frac{1}{\text{mod}^2 [a_{n_l 1}^{(l)} u_1 + \dots + a_{n_l n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1} + a_{n_l}^{(l)}]} \right\}^{n_l}. \end{aligned}$$

Il prodotto di tutte queste quantità per $l = 1, 2, \dots, \nu$ ci dà il valore di $I I_0$. A ogni trasformazione T del gruppo corrisponde un valore di $I I_0$. Un tal valore sarà da noi indicato brevemente con I_T . Si costruisca allora la serie

$$\Sigma F_T I_T \quad (\text{A})$$

di cui ogni termine corrisponde a una trasformazione del gruppo. Io dico che in un intorno posto a distanza finita dai punti singolari di F in R e dai loro trasformati per G essa è uniformemente e assolutamente convergente. Basta a tal uopo dimostrare la convergenza assoluta e in ugual grado della

$$\Sigma I_T$$

nel nostro intorno. Coi metodi di POINCARÉ e di PICARD (*) si trova facilmente che la I_T nel nostro intorno varia fra due limiti $H \left[\frac{1}{\text{mod}^2 a_{n_l}^{(l)}} \right]^{n_l}$, $K \left[\frac{1}{\text{mod}^2 a_{n_l}^{(l)}} \right]^{n_l}$, dove

(*) Cfr. le Mem. di PICARD nei primi volumi degli *Acta Mathematica*.

H, K sono due costanti finite indipendenti dalla trasformazione T considerata. Posto $I_T = A \left[\frac{1}{\text{mod}^2 a_{n_i}^{(i)}} \right]^{n_i}$ si ha $H \leq A \leq K$, dove H, K sono costanti finite. Consideriamo ora il nostro contorno e i suoi trasformati per G : essi sono tutti interni a R e se l'intorno iniziale è abbastanza piccolo, essi non si coprono l'un l'altro e perciò la somma dei loro volumi è finita. Se $d\tau, d\tau'$ sono un elemento di volume dell'intorno iniziale e del suo trasformato per T , è $\frac{d\tau'}{d\tau} = I_T = A \left[\frac{1}{\text{mod}^2 a_{n_i}^{(i)}} \right]^{n_i}$. Poichè $\sum d\tau'$ è finito è dunque convergente la $\sum_T \left[\frac{1}{\text{mod}^2 a_{n_i}^{(i)}} \right]^{n_i}$ e quindi anche per le disuguaglianze citate la $\sum I_T$.

La (A) rappresenta perciò in R una funzione analitica che evidentemente per una trasformazione T di G resta moltiplicata per un fattore indipendente da F . I metodi di POINCARÉ dimostrano che una tal serie non è in generale identicamente nulla; il quoziente di due tali serie ci dà perciò una funzione invariante per il nostro gruppo. c. d. d.

Visto questo caso particolare, passiamo ora al caso generale che abbiamo in vista. Siano u_i^l ($l = 1, 2, \dots, \nu$) ($i = 1, 2, \dots, n_l - 1$) $n_1 + n_2 + \dots + n_\nu - \nu$ variabili qualsiasi e sia G un gruppo di cui ogni trasformazione sia del tipo (2), che non contenga trasformazioni infinitesime. Se noi non sappiamo se questo gruppo lascia invariato un sistema di forme Hermitiane non possiamo dire che esso è propriamente discontinuo. E noi ci facciamo le seguenti domande: Come possiamo riconoscere se un tal gruppo è o no propriamente discontinuo? Si può far servire un tal gruppo, anche se impropriamente discontinuo, alla costruzione di funzioni uniformi in modo analogo ai precedenti?

Ad ambedue le domande si risponde con le seguenti considerazioni. Se noi ricordiamo quanto ho detto nelle prime pagine della mia Memoria citata, noi vediamo che i nostri gruppi appariranno propriamente discontinui, appena noi scegliamo qualche varietà opportuna come elemento generatore nel solito spazio S_k , anzichè i suoi punti. E noi riconosciamo tosto che se noi consideriamo S_k (invece che come luogo di punti) come luogo dei sistemi di m punti in esso contenuti (dove m è un intero abbastanza grande) il gruppo riesce propriamente discontinuo. In altre parole io voglio dire che se accanto alle $u_i^{(l)}$ consideriamo degli altri sistemi di variabili, in numero sufficientemente grande, $v_i^{(l)}, w_i^{(l)}, z_i^{(l)}, \dots$ e se immaginiamo che G operi sulle v , sulle w, \dots in modo identico a quello, con cui opera sulle u , allora esso riuscirà propria-

mente discontinuo nello spazio (che indicheremo con Σ) le cui coordinate sono la parte reale e il coefficiente dell'immaginario delle singole variabili u , v , w , ... Una trasformazione del gruppo assume così il tipo

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(l)} &= \frac{a_{i1}^{(l)} u_1^{(l)} + \dots + a_{in_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{in_l}^{(l)}}{a_{n_l1}^{(l)} u_1^{(l)} + \dots + a_{n_l n_l-1}^{(l)} u_{n_l-1}^{(l)} + a_{n_l n_l}^{(l)}} \\ \bar{v}_i^{(l)} &= \frac{a_{i1}^{(l)} v_1^{(l)} + \dots + a_{in_l-1}^{(l)} v_{n_l-1}^{(l)} + a_{in_l}^{(l)}}{a_{n_l1}^{(l)} v_1^{(l)} + \dots + a_{n_l n_l-1}^{(l)} v_{n_l-1}^{(l)} + a_{n_l n_l}^{(l)}} \\ &\dots \end{aligned}$$

E per dimostrare il nostro asserto basta notare che una trasformazione (2) del gruppo primitivo di G è chiaramente determinata quando si diano in G_k un numero m (finito) sufficiente di punti e i loro trasformati. Se dunque perciò un sistema di m punti in S_k si potesse portare in un sistema infinitamente vicino, ne verrebbe come conseguenza che il gruppo contiene trasformazioni infinitesime. *Dunque il nostro gruppo G diventa certamente propriamente discontinuo ed è perciò possibile la costruzione di funzioni invariate per tutte le sue trasformazioni, appena si pensi G operante sui sistemi di m punti di S_k , dove m è un intero abbastanza grande, ma finito.*

Sono questi appunto i gruppi generali, cui accennavamo e di cui tutti i precedenti sono casi particolari. Se vogliamo poi vedere se il gruppo è propriamente discontinuo anche per sistemi di n punti, dove sia $n < m$, p. es. se esso è propriamente discontinuo addirittura in S_k si può procedere nel modo seguente. Si costruisca nello spazio Σ una rete di campi fondamentali per il nostro gruppo e consideriamo quella varietà subordinata che è definita dall'aver le coordinate u uguali a certe costanti e le sue trasformate per le trasformazioni di G che corrispondono ai campi della rete suddetta. Il gruppo G sarà o no propriamente discontinuo per i punti di S_k secondoche tali varietà sono o no a distanza finita l'una dall'altra.