Ein Minimumproblem für Ovale.

Von

Julius Pál in Györ (Ungarn).

1. Herr Prof. Fujiwara (Sendai, Japan) hatte die Güte, meine Aufmerksamkeit auf folgende Frage zu lenken:

Unter allen Ovalen, in welchen man die Einheitsstrecke wenden kann, ist dasjenige festzustellen, dessen Flächenmaß möglichst klein ist.

In voller Ausführlichkeit und Präzision ist die Frage die folgende: Ein Oval C ist zur Konkurrenz zugelassen, wenn in demselben zwei stetige Kurven

$$x = f(t),\ y = g(t) \quad \text{und} \quad x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{1}$$

verlaufen, für welche

$$[f(t) - \varphi(t)]^2 + [g(t) - \psi(t)]^2 = \text{konst.} = 1 \tag{1a}$$

und

$$f(0) = \varphi(1),\ f(1) = \varphi(0), \quad g(0) = \psi(1),\ g(1) = \psi(0) \tag{1b}$$

ist.

Unter diesen Ovalen C ist dasjenige festzustellen, dessen Flächenmaß

$$\gamma = \gamma(C)$$

minimalen Wert hat.

Herr Fujiwara vermutet, daß die gesuchte Minimalfigur das gleichseitige Dreieck mit der Höhe 1 ist. In dieser Arbeit werde ich nachweisen, daß diese Vermutung in der Tat zutrifft.

2. Es sei H ein Oval, a eine Gerade seiner Ebene,

$$d = d(H, a) \tag{2}$$

bedeute die Entfernung der beiden zu a parallelen Stützgeraden von H und

$$\delta = \delta(H)$$

sei die kleinste der Zahlen (2). Dann wird bekanntlich δ die *Dicke des Ovals H* genannt.

Die laut (1) gewendete Einheitsstrecke wird in einem Zeitmoment senkrecht auf a stehen; daher ist für jedes C und a

$$d(C, a) \geqq 1$$

und für jedes C

$$\delta(C) \geqq 1.$$

3. Wir werden nun beweisen:

Satz I. *Ist für das Oval H*

$$\delta(H) \geqq 1,$$

so ist sein Flächenmaß

$$\gamma(H) \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn H das Fujiwara-Dreieck ist.

Hieraus folgt a fortiori:

Satz II. *Das Fujiwara-Dreieck ist eine und die einzige flächenminimale Figur unter den Ovalen C.*

Im folgenden bezeichne G stets ein Oval mit der Dicke

$$\delta(G) = 1.$$

Es genügt, die Ungleichheit (3) für Ovale G zu beweisen. Ist nämlich

$$\delta(H_1) > 1,$$

so sei G_1 das zu H_1 ähnliche, kleinere Oval mit

$$\delta(G_1) = 1.$$

Aus

$$\gamma(G_1) \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

folgt dann

$$\gamma(H_1) > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4. Es sei N irgendein Oval, r der Radius eines in der abgeschlossenen Ovalscheibe verlaufenden Kreises. Unter den Zahlen r gibt es eine größte; sie soll

$$\varrho = \varrho(N)$$

heißen; man hat unmittelbar

$$\varrho(N) \leqq \tfrac{1}{2}\delta(N).$$

In einer schönen, kleinen Arbeit hat Herr Blaschke [1]) bewiesen, daß

$$\varrho(N) \geqq \tfrac{1}{3}\delta(N) \tag{4}$$

ist. Von der Ungleichung (4) werde ich im folgenden wesentlichen Gebrauch machen.

---

[1]) Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. **23** (1915), S. 369.

5. Die Ungleichung (3) ist gewiß erfüllt für Ovale G mit

$$\pi \varrho^2 > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

oder

$$\varrho = \varrho(G) > \sqrt{\frac{1}{\pi\sqrt{3}}} = r_0 \qquad (r_0 < \tfrac{1}{2}).$$

Wir betrachten also nur Ovale G mit

$$\text{(5)} \qquad \delta(G) = 1 \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{3} \leqq \varrho \leqq r_0 \qquad (r_0 < \tfrac{1}{2}).$$

Für ein Oval N mit

$$\varrho(N) < \frac{\delta(N)}{2},$$

also gewiß für ein Oval G, welches die Bedingung (5) erfüllt, gilt nach der eben zitierten Arbeit des Herrn Blaschke:

„Es gibt einen einzigen auf G verlaufenden Kreis vom Radius $\varrho(G)$; dieser heiße g, sein Mittelpunkt O. Es gibt zumindest ein spitzwinkliges Dreieck, dessen Ecken sowohl auf der Kreislinie g, wie auf der Ovallinie G liegen."

Fixieren wir ein solches Dreieck; es soll PQR heißen. Die Kreistangenten in P, Q und R berühren auch die Ovallinie G und bilden ein Dreieck $P_1Q_1R_1$, welches das Oval G enthält.

Das Dreieck $P_1Q_1R_1$ wird durch den Kreis g in vier Stücke zerschnitten, die der Reihe nach I, II, III, IV heißen sollen (siehe Fig. 1); jedes dieser Stücke enthält ein Stück des Ovals. Die Flächenmasse dieser vier Stücke seien γ_1, γ_2, γ_3, γ_4; es ist

$$\gamma_4 = \pi \varrho^2.$$

Für die Zahlen γ_1, γ_2, γ_3 will ich jetzt untere Schranken feststellen.

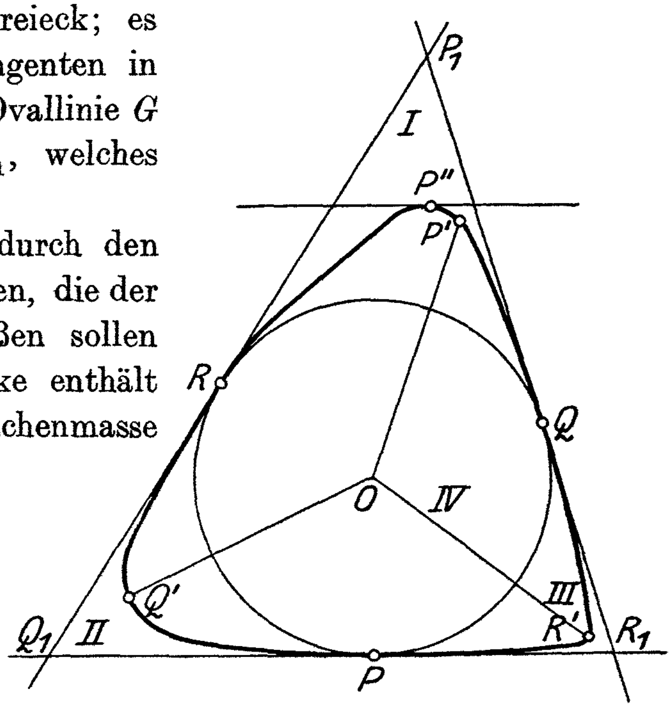

Fig. 1.

6. Auf der zu Q_1R_1 parallelen Stützgeraden fixiere ich einen Punkt P'' der Ovallinie; er liegt höher als jeder Kreispunkt (wegen $\varrho < \frac{1}{2}$) und folglich auf I; wegen $\delta(G) = 1$ ist seine Entfernung von O zumindest $1 - \varrho$. Aus

$$OQ = \varrho < 1 - \varrho \leqq OP''$$

folgt, daß der auf I fallende Bogen QP'' zumindest einen Punkt enthält, dessen Entfernung von O genau $1 - \varrho$ ist; es sei P' ein solcher Punkt.

Entsprechend fixiere ich auf *II* und *III* fallende Punkte Q' und R' der Ovallinie mit den Radienvektoren

$$OP' = OQ' = OR' = 1 - \varrho.$$

Die kleinste konvexe Figur, die den Kreis g und das Dreieck $P'Q'R'$ aufnimmt, besteht aus dem Kreis und drei dem Kreise aufgesetzten Kappen. Die Kappen liegen getrennt auf *I*, *II* und *III*. Eine der Kappen hat das Flächenmaß

$$\varrho\sqrt{1-2\varrho} - \varrho^2 \arccos\frac{\varrho}{1-\varrho}$$

und folglich ist

$$\begin{aligned}(6)\qquad \gamma(G) &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\ &\geqq \pi\varrho^2 + 3\varrho\sqrt{1-2\varrho} - 3\varrho^2 \arccos\frac{\varrho}{1-\varrho} = f(\varrho),\end{aligned}$$

wo ϱ statt $\varrho(G)$ steht, und unter arc cos der übliche Hauptwert verstanden wird.

7. Für die Werte

$$\tfrac{1}{3} < \varrho < \tfrac{1}{2}$$

erfüllt $f(\varrho)$ die Ungleichung

$$(7)\qquad f(\varrho) > f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A fortiori ist für ein Oval G

$$\gamma(G) > \frac{1}{\sqrt{3}},$$

sobald $\varrho > \frac{1}{3}$ ist.

Die Ungleichung (7) beweist man z. B. so, daß man $f'(\varrho)$ berechnet und konstatiert, daß dieser Differentialquotient für $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}$ stets positive Werte hat. Ich ziehe vor, (7) durch eine elementar-geometrische Über) legung zu beweisen, da ein solcher Beweis der Natur der Frage viel mehr entspricht.

8. In Fig. 2 ist $A_0B_0C_0$ das Fujiwara-Dreieck, O sein Mittelpunkt; um O schlagen wir den Kreis g mit dem Radius ϱ, $\frac{1}{3} < \varrho < \frac{1}{2}$ und tragen auf den Halbstrahlen OA_0, OB_0, OC_0 die Strecken

$$OA = OB = OC = 1 - \varrho$$

auf; die kleinste konvexe Figur, die den Kreis g und das Dreieck ABC aufnimmt, heiße F. Das Flächenmaß von F ist $f(\varrho)$, dasjenige von $\triangle A_0B_0C_0$ ist $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

F enthält das Dreieck $A_0B_0C_0$ bis auf sechs kleine, untereinander kongruente Dreiecke; eines dieser Dreiecke ist B_0BD. Wir wollen zeigen, daß das, was von F *außerhalb* $\triangle A_0B_0C_0$ liegt, *flächengrößer* ist, als $6 \times \triangle B_0BD$.

Der Mittelpunkt von $A_0 B_0$ heißt C_1. Wir zeichnen $C_1 E$ parallel, gleichgerichtet und gleichlang mit $A A_0$; E liegt auf der Kreisscheibe g, da $C_1 E = A_0 A = \varrho - \frac{1}{3}$ der Minimalabstand der beiden konzentrischen Kreislinien ist. M ist der Schnittpunkt von $C_1 A$ und $E A_0$. Das Dreieck $C_1 E M$ liegt außerhalb $\triangle A_0 B_0 C_0$, das ihm kongruente $\triangle A A_0 M$ enthält als *wirklichen* Teil eines der zu kompensierenden sechs Dreiecke. Damit ist also (7) bewiesen.

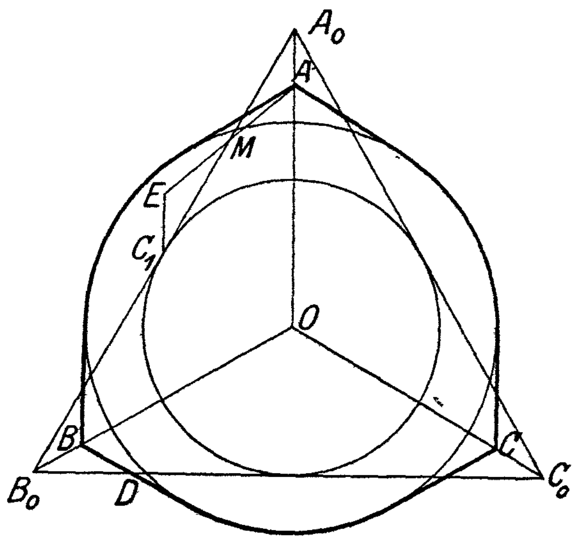

Fig. 2.

9. Zu besprehen sind noch die Ovale G mit

$$\delta(G) = 1 \qquad \text{und} \qquad \varrho(G) = \tfrac{1}{3}.$$

Es gibt aber nur *ein einziges* solches Oval, nämlich das Fujiwara-Dreieck. Für $\varrho = \frac{1}{3}$ ist nämlich (Fig. 1)

$$OP' = OQ' = OR' = \tfrac{2}{3},$$

und g wird von jedem der Punkte P', Q', R' unter 60^0 gesehen. Also sind PQR und $P_1 Q_1 R_1$ gleichseitige Dreiecke; $\triangle P_1 Q_1 R_1$ hat aber keinen wirklichen konvexen Teil G mit

$$\delta(G) = 1,$$

d. h. G ist das ganze Dreieck $P_1 Q_1 R_1$.

Damit sind die in 3. ausgesprochenen Sätze I—II bewiesen.

10. Der Satz I sagt nur scheinbar mehr aus als der Satz II; denn *die Einheitsstrecke kann in jedem Oval G gewendet werden.*

Dieser wohl von niemandem bezweifelte, doch meines Wissens nirgends sorgfältig besprochene Satz ist unmittelbar ersichtlich für ein „reguläres“ G, welches weder Ecken noch geradlinige Begrenzungsstücke hat und dessen Tangentenrichtung sich stets ändert [2]). Dagegen ist es nicht so einfach zu zeigen, daß das Wenden im *allgemeinen* Oval möglich ist. Der einfachste Beweis scheint mir die folgende explizite Vorschrift, nach welcher das Wenden vorgenommen werden kann:

11. Die Punkte $A(x = a, y = 0)$ und $B(x = b, y = 0)$ seien Endpunkte eines Durchmessers von G. Die beiden durch A und B begrenzten Bogen der Ovallinie seien durch

---

[2]) Es seien A, A' und P, P' die Berührungspunkte eines G umschriebenen Parallelogramms. Durchläuft P den Bogen AA' in positivem Sinne, so durchläuft P' den Bogen $A'A$ ebenfalls in positivem Sinne, und es ist $PP' \geq 1$. Also kann die auf AA' gezeichnete Einheitsstrecke gewendet werden.

$$y = f(x),\ f(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad y = g(x),\ g(x) \leqq 0. \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

dargestellt.

Im Viereck $a \leqq \xi \leqq b$, $a \leqq \eta \leqq b$ der (ξ, η)-Ebene definiere ich eine Punktmenge σ wie folgt: Der Punkt (ξ, η) gehöre dann und nur dann zu σ, wenn die Punkte

$$x = \xi, \quad y = f(\xi) \qquad \text{und} \qquad x = \eta, \quad y = g(\eta)$$

der Ovallinie auf parallelen Stützgeraden des Ovals liegen. Die Menge σ ist ein Kontinuum. Der höchste auf $\xi = \xi_0$ liegende Punkt von σ sei

$$\eta_0 = k(\xi_0).$$

Zufolge der Konvexität von G ist $k(\xi)$ eine monoton nicht zunehmende Funktion, und so bilden die Strecken

$$k(\xi - 0) \leqq \eta \leqq k(\xi + 0) \qquad (a \leqq \xi \leqq b)$$

eine stetige Linie, die die Punkte

$$\xi = a, \quad \eta = b \qquad \text{und} \qquad \xi = b, \quad \eta = a$$

verbindet. Durchläuft man diese nach einem Gesetz

$$\xi = \xi(\tau), \quad \eta = \eta(\tau) \qquad (0 \leqq \tau \leqq 1),$$

so entspricht der stetigen Änderung von τ eine sich stetig bewegende Sehne des Ovals; dieser Sehnenbewegung folgend kann die auf AB gelegene Einheitsstrecke gewendet werden.

Man kann kürzer wie folgt schließen: Der Durchschnitt von σ mit einer Geraden $\xi = \xi_0$ oder einer Geraden $\eta = \eta_0$ ist ein Punkt oder eine Strecke. Hieraus folgt, daß σ „zusammenhängend im Kleinen“[3]), folglich selbst eine stetige Linie ist. Es mag hinzugefügt werden, daß *irgendeine* auf G gezogene Strecke PQ von der Länge 1 auf G gewendet werden kann. Denn eine auf G gewendete Strecke nimmt eine zu PQ parallele Lage gewiß an, und parallel-gleiche Strecken von G können auf G ineinander verschoben werden.

12. Die zur besprochenen duale Frage ist:

Unter den Ovalen G ist dasjenige festzustellen, dessen Umfang minimal ist.

Der minimale Umfang ist π, er kommt aber nicht *einer* Figur zu, sondern allen mit der konstanten Breite 1. Dieses folgt, wie Herr Blaschke[4]) gelegentlich bemerkte, unmittelbar aus der Cauchyschen Formel, welche den Umfang des Ovals mit Hilfe der Stützwinkelfunktion ausdrückt.

---

[3]) Siehe Hahn, Jahresber. der Deutschen Math. Ver. **23** (1915), S. 318, und Sitzungsber. der Wiener Akademie **123**, IIa.

[4]) Berichte der Sächsischen Akad. Leipzig, **67**, S. 296.

13. Versucht man die Einheitsstrecke zu wenden, und brachte man sie dabei schon in die Lage AB, so braucht man für den *momentanen* Zweck, die Strecke nach rechts oder links weiter zu drehen, nur den auf AB senkrechten Streifen von der Breite 1. Dadurch verfällt man leicht auf den Gedanken, diese „Differentialbedingung" zu integrieren und die Minimalfigur unter den Ovalen mit der konstanten Breite 1 zu suchen. Dieser Plausibilitätsschluß erweist sich also für das Problem des kleinsten Umfangs als richtig, ist aber irreführend für das Problem der kleinsten Fläche.

14. Ist Y eine *nicht konvexe* Jordan-Kurve, so kann man ihr eine konvexe Kurve von kleinerem Umfang umschreiben. Fragt man daher nach der Jordan-Kurve kleinsten Umfangs, in welcher man die Einheitsstrecke wenden kann, so kann man sich von vornherein auf konvexe Kurven beschränken.

Es gibt aber nicht konvexe Jordan-Kurven, in welchen man die Einheitsstrecke wenden kann und die flächenkleiner sind als das Fujiwara-Dreieck. So begrenzt z. B. in Fig. 3 die stark ausgezogene Linie eine Figur, die ein wirklicher Teil des Fujiwara-Dreiecks ist und in welchem man schon wenden kann. (In der Figur sind die Mittelpunkte der drei Kreisbogen die Ecken des Dreieckes.) Daher ist es sinngemäß, die in 1. formulierte Aufgabe zu der folgenden zu erweitern:

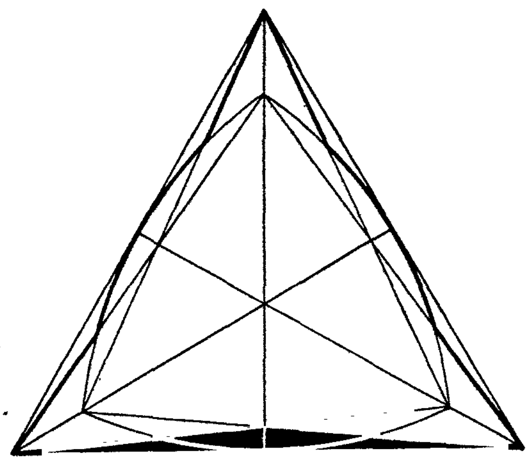

Fig. 3.

Es sei Y eine durch eine Jordan-Kurve begrenzte Scheibe, auf welcher man die Einheitsstrecke wenden kann. Es ist die flächenminimale unter den Scheiben zu bestimmen.

Diese Aufgabe scheint mir recht schwierig. Nicht nur, weil ein Ansatz, der die Variationsrechnung zur Hilfe herbeiriefe, nicht möglich ist, sondern auch, weil man über die allgemeine Jordan-Kurve nur topologisch, aber gar nicht metrisch Bescheid weiß. Es wollte mir nicht einmal gelingen festzustellen, welche von den Jordan-Scheiben Y, welche auf dem Fujiwara-Dreieck liegen, flächenminimal ist. Da außerdem ein Konvergenzsatz, wie er für konvexe Kurven von Herrn Blaschke[5]) gefunden wurde, allgemein für Jordan-Kurven nicht besteht, bleibt auch die Existenz einer Minimalscheibe fraglich.

---

[5]) Siehe Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 62.

15. Ich möchte noch sagen, wie die besprochene Frage in einen Kreis von schwierigen Problemen sich einordnet.

Es seien C und c zwei Ovale; es sei möglich, c stetig so zu bewegen, daß es stets in C bleibt, während die Arcus-Änderung eines mit c starr verbundenen Halbstrahles 2π beträgt. Dann wollen wir sagen, daß c in C ganz gewendet werden kann.

Man sieht ohne weiteres, daß dann als Anfangslage von c jede auf C mögliche Lagerung von c vorgeschrieben werden kann.

An diesen Begriff vom ganzen Wenden knüpfen sich zwei Gruppen von Fragen:

I. Gegeben ist ein Oval C. Man betrachtet alle in C ganz wendbaren Ovale c und fragt nach demjenigen c, für welches diese oder jene wichtige Ovalfunktion $f = f(c)$, $g = g(c)$, ... extremalen Wert hat.

So hat z. B. Herr Kakeya[6]) mit einfachen Mitteln gezeigt, daß bei fixiertem C das flächenmaximale c kreisförmig ist. Für den Beweis braucht man nur die klassische Isoperimetrie der Kreislinie, die Cauchysche Formel für den Umfang des Ovals und den Satz, daß unter den Ovalen gegebenen Durchmessers der Kreis flächenmaximal ist.

II. Fixiert sei das Oval c. Man betrachtet alle C, in welchen c ganz gewendet werden kann. Gesucht wird dasjenige C, für welches eine wichtige Ovalfunktion $f = f(C)$ extremalen Wert hat.

So kann man z. B. bei gegebenem c nach dem flächenminimalen C fragen. Diese Frage ist gelöst für den bescheidenen Spezialfall, daß c die Einheitsstrecke ist. Aber schon die nächst einfachen Fälle bieten wesentliche Schwierigkeiten. Fragt man z. B. nach dem flächenkleinsten C, in welchem man das Einheitsquadrat ganz wenden kann, so ist es überaus wahrscheinlich, daß die gesuchte Minimalfigur der umschriebene Kreis ist; aber es scheint mir, daß ein Beweis mit einfachen Mitteln nicht möglich ist.

16. Die formulierten Wendungsaufgaben führen zu einer natürlichen Verallgemeinerung der Kurven konstanter Breite.

Man betrachte eine Kurve, die im regulären n-Eck ganz wendbar ist, die aber beim Wenden in jedem Zeitmoment an alle Seiten des Polygons anstößt. Es sei c_n eine solche Kurve; im speziellen ist c_4 ein Oval konstanter Breite.

Die Kurven c_n wurden von den Herren Meißner[7]), Kakeya[8]) und Fujiwara[8]) nach verschiedenen Richtungen untersucht.

---

[6]) Some Problems on Maxima and Minima regarding Ovals. Science Reports of the Tôhoku Imp. University 6, Nr. 2. Sendai (1917).

[7]) Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zürich (1909).

[8]) Science Reports of the Tôhoku Imp. University 4 (1915) und 8 (1919); ferner The Tôhoku Mathem. Journal 11 (1917).

Betrachten wir alle Kurven c_4 mit normierter Größe (etwa der Breite 1) und fragen wir, für welche unter diesen Kurven die wichtigen Ovalfunktionen zum Extremum werden. Als Extremumfigur erhalten wir für die meisten Ovalfunktionen den Kreis oder das Reuleaux-Dreieck[8, 9]).

Unter den Kurven c_3 (mit normierter Größe) tritt sehr oft ein Kreisbogenzweieck als Extremumfigur auf[8]); dieses Zweieck mit dem umgebenden (normierten) Dreieck ist in Fig. 4 dargestellt.

Das gleichseitige Dreieck ist das flächenkleinste Oval, in welchem dieses Zweieck gewendet werden kann. Jede Figur vom Durchmesser 1, welche im Fujiwara-Dreieck gewendet werden kann, ist ein Teil dieses Zweieckes.

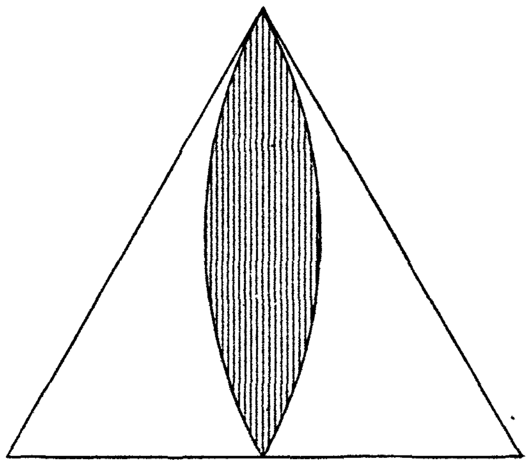

Fig. 4.

Bei der Verfolgung der Analogie der Kurven c_3 und c_4 wird man auf folgendes aufmerksam: Es gibt durchaus reguläre (z. B. algebraische) Ovale, welchen man in jeder Richtung ein Quadrat umschreiben kann, ohne daß sie von konstanter Breite wären.

17. Die Tatsache, daß die Einheitsstrecke in jedem Oval H mit $\delta(H) \geqq 1$ gewendet werden kann, führt zu folgender Fragestellung:

Der Halbstrahl a sei mit dem Oval c starr verbunden; es sei möglich, c so in das Oval C zu legen, daß a eine willkürlich vorgeschriebene Richtung hat. Folgt hieraus, daß c auf C ganz gewendet werden kann?[10])

Legt man c auf C, so entspricht dieser Lagerung ein Punkt (ξ, η, ζ), wobei etwa ξ und η die Koordinaten des Anfangspunktes von a, ζ die Richtung von a bedeute $[0 \leqq \zeta \leqq 2\pi]$. Die allen möglichen Lagerungen entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) bilden eine Menge σ und die Frage ist, ob σ im Kleinen zusammenhängt.

Jeder ebene Schnitt $\zeta =$ konst. von σ ist ein konvexer Bereich, dieses allein genügt aber nicht zum Zusammenhang im Kleinen.

Kjøbenhavn, Sept. 1920.

---

[9]) Blaschke, Math. Ann. 76 (1915).

[10]) Zusatz bei der Korrektur: Diese Frage ist, wie mir Herr Harald Bohr freundlichst mitteilt, bejahend zu beantworten. Herr Bohr untersucht nicht den Zusammenhang im Kleinen, sondern kommt mit einfachen Überlegungen über Konvexes zur bejahenden Antwort.