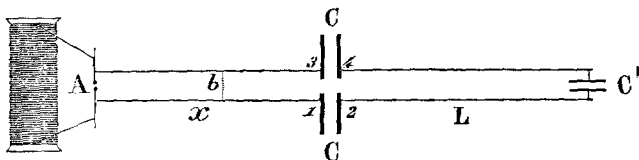


RICERCHE SULLE ONDE ELETTRICHE STAZIONARIE

Dott. E. SALVIONI.

È ben nota la disposizione sperimentale ideata da Lecher per lo studio dei fenomeni di risonanza elettrica, perchè fu a un tempo oggetto e strumento di numerose ricerche, tra le quali importantissime, per tacer d'altri, quelle di Bjerknes ¹⁾ di Cohn e Heerwagen ²⁾ e di H. Ebert e E. Wiedemann ³⁾. Essa è rappresentata, con una leggera modificazione da me introdotta anche in un lavoro precedente ⁴⁾, dalla figura qui inserita. Due fili metallici sono tesi, parallelamente l'uno all'altro, fra i bracci dello spinterometro A



e due lastre metalliche 1, 3; affacciate a queste, a distanza variabile, si trovano due altre lastre 2, 4, dalle quali si dipartono due altri fili eguali ai primi e tesi in modo da formarne come il prolungamento. Questi fili, all'altra estremità, o sono riuniti fra loro, o sono affatto liberi, o mettono capo alle armature di un condensatore: quest'ultimo caso si riterrà in quanto segue, perchè comprende i primi due come i casi limiti, nei quali la capacità del condensatore terminale sia zero o infinita.

Se i bracci dello spinterometro A (eccitatore) si mettono in comunicazione cogli elettrodi di un rocchetto di Ruhmkorff o di una macchina elettrica e se fra le palline ben terse si fa scoc-

1) *Wied. Ann.* Bd. 44, pag. 74; Bd. 47, pag. 69.

2) *Wied. Ann.* Bd. 43, pag. 343.

3) *Wied. Ann.* Bd. 48, pag. 549; Bd. 49, pag. 1 e 32.

4) *Rendiconto dell' Accademia dei Lincei*, sedute del 3 e 20 aprile 1892.

care una serie nudrita di scintille corte, ma vigorose, si destano, nello spazio che circonda i fili e fra le lastre del condensatore primario, dei sistemi di onde stazionarie. La lunghezza d'onda che corrisponde a ciascuno di questi sistemi si può sperimentalmente determinare, cercando, col così detto metodo del ponte, i nodi elettrici (punti in cui è nulla la forza elettrica corrispondente a una data vibrazione), e cioè, cercando le posizioni che deve avere un filo conduttore scorrevole sui fili del sistema di Lecher, perchè la forza elettrica che si esercita fra due punti affacciati fissi del sistema, per es. fra i due capi estremi, presenti un massimo d'intensità.

Tale determinazione si fa agevolmente per i sistemi di ordine non molto elevato, in generale sino al 4° o 5° ordine; per i sistemi d'onda d'ordine elevato la determinazione diventa sempre più difficile e richiede un lungo e paziente lavoro di ricerca, sia perchè le onde più corte abbiano un rapporto di smorzamento maggiore, o perchè l'energia messa in moto sia minore, o perchè, facendosi i nodi sempre più fitti, a quelli di un sistema si sovrappongano nodi di altri sistemi. Pertanto, quantunque l'esperienza non riesca a mettere in evidenza che alcuni sistemi d'ordine basso, è ragionevole pensare che essi in realtà sieno più numerosi, anzi probabilmente in numero infinito. E siccome, per ogni data disposizione sperimentale, tutti quanti debbono essere definiti, così deve essere possibile di determinare *a priori* le lunghezze d'onda di ciascuno di essi, date le condizioni geometriche di un sistema di Lecher. Questo problema che primo si presenta in questo campo di ricerche rimase fin ora insoluto; si potrebbe anzi dire che i fisici se ne sono disinteressati: un'eccezione sarebbe a farsi per un lavoro di H. Rubens ¹⁾ tendente a dimostrare che ciascun nodo divide sempre il sistema di Lecher in due parti le cui durate d'oscillazione stanno in un rapporto semplice fra loro; il lavoro di Rubens non presenta però, da questo lato, grande interesse, perchè nella dimostrazione intervengono delle costanti puramente empiriche e che non si possono determinare se non dopo che l'esperienza abbia fatto conoscere le lunghezze d'onda. La ragione principale di questo

1) *Wed. Ann.* Bd. 42, pag. 154.

disinteressamento stà però, a mio credere, nell'idea che le complicazioni nel circuito primario sieno tali da rendere impossibile una trattazione matematica anche solo approssimata. Così H. Ebert e E. Wiedemann osservano ¹⁾ che, quand'anche la scarica primaria non sia che la causa eccitatrice delle vibrazioni nel secondario, il modo in cui l'eccitazione ha luogo deve influire su queste, e che nel breve tempo in cui scocca la scintilla fra le palline dello spinterometro, il circuito primario vibra come fosse chiuso metallicamente dalla scintilla, mentre poi, cessata questa, vibra come un circuito aperto. Già in tale ordine di idee ero stato condotto nei primi tentativi fatti per estendere al circuito primario la teoria che Cohn e Heerwagen avevano stabilito per il secondario: durante i quali rimanevo dubbioso se dovessi considerare il circuito primario come chiuso metallicamente, ovvero come aperto nel punto ove ha luogo la scintilla; ma poi mi persuasi che fra le due la prima ipotesi era da scegliersi. Si sa infatti che le oscillazioni nei fili e specialmente nel circuito primario si smorzano rapidamente, onde i fenomeni che si osservano sono dovuti alle prime oscillazioni, le quali è verosimile si compiano prima che lo spazio fra le due palline abbia perduto la sua proprietà conduttrice. Tale idea ha trovato poi piena conferma nel confronto dei risultati delle esperienze con quelli del calcolo, come risulta da una nota presentata all'Accademia dei Lincei, dove ho svolto una teoria appunto sulla ipotesi che dove scocca la scintilla, le onde stazionarie presentino un nodo, e cioè che, durante le oscillazioni, il primario si comporti come fosse chiuso metallicamente dalla scintilla.

Queste e altre considerazioni, che qui non è il caso di riferire, mi indussero a pensare che le complicazioni che intervengono nel primario non sieno tali da esercitare una grande influenza perturbatrice sulle onde del sistema, e che pertanto si potesse, con qualche speranza, tentare di risolvere il problema suddetto e cioè di determinare *a priori* le lunghezze d'onda corrispondenti ai vari sistemi, date le condizioni che determinano la disposizione sperimentale, e cioè date:

¹⁾ Wied. Ann. Bd. 48, pag. 579

α , lunghezza di ciascun filo primario dallo spinterometro A ai piatti 1, 3;

L, lunghezza di ciascun filo secondario dai piatti 2, 4 alle armature del condensatore terminale;

b , distanza fra due fili paralleli;

a , raggio dei fili;

C, capacità di ciascuno dei due condensatori (1, 2) e (3, 4);

C', capacità del condensatore terminale.

A tale intento interessava anzitutto precisare i circuiti fra i quali ha luogo la risonanza. Per fissare le idee, prenderò a considerare il circuito d'ordine n , e gli n nodi sieno $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$; chiamasi z la lunghezza del tratto compreso fra i piatti del condensatore primario e il primo nodo, e z' quella del tratto compreso fra l'ultimo nodo e i piatti del condensatore terminale.

Ora l'esperienza dà, prescindendo da differenze sistematiche con molta probabilità da attribuirsi a perturbazioni d'ordine secondario, che i nodi $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots$ sono equidistanti: i circuiti chiusi $A_1 A_2 B_2 B_1, A_2 A_3 B_3 B_2, \dots, A_{n-1} A_n B_n B_{n-1}$ hanno quindi tutti la stessa durata d'oscillazione, e la equidistanza misura la semilunghezza d'onda comune.

In quanto al circuito aperto terminale $A_n C' B_n$, Cohn e Heerwagen, partendo dalle teorie di Maxwell, hanno stabilito che la lunghezza d'onda λ corrispondente, nell'aria, alla sua durata d'oscillazione soddisfa alla relazione ¹⁾

$$(1) \quad \operatorname{tg} \frac{2 \pi z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{8 \pi C' \log b/a};$$

le esperienze poi di Cohn e Heerwagen e quelle più estese di Ebert e Wiedemann hanno dimostrato che l'equazione è soddisfatta, ponendo per λ il valore della lunghezza d'onda comune ai circuiti chiusi precedenti. Il circuito chiuso terminale vibra dunque all'unisono con questi.

1) Cohn e Heerwagen, l. c., pag. 5. — Alla stessa formola è giunto anche Elsas, partendo dalle teorie di Helmholtz e Kirchhoff (*Wied. Ann.* Bd. 49).

Infine in una nota precedente ¹⁾ ho stabilito che la lunghezza d'onda propria del circuito A C A₁ B₁ C A soddisfa alla relazione:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\pi (z + x)}{\lambda} = \lambda \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi (z - x)}{\lambda}}{8 \pi C \log b/a}$$

e con le esperienze ho dimostrato che per il sistema d'onde di 1° ordine (cui corrisponde un solo nodo) l'equazione è soddisfatta, se si attribuisce a λ il valore della lunghezza d'onda propria al circuito rimanente; l'unico nodo divide dunque, in questo caso, il sistema di Lecher in due parti all'unisono. Una generalizzazione al caso dei sistemi d'onde d'ordine maggiore di 1 si presenta naturale: essa consiste nell'ammettere che nel sistema d'ordine $n + 1$ il circuito formato dal primario, dalle due coppie di lastre, e dal primo tratto di secondario, vibri sempre all'unisono cogli n circuiti chiusi seguenti e col circuito aperto terminale. Ora, se ciò si suppone, la lunghezza d'onda λ di ciascun sistema deve contemporaneamente soddisfare alle due equazioni precedenti e alla

$$(3) \quad L = z + \frac{n \lambda}{2} + z';$$

ma siccome, oltre λ , solo z e z' sono variabili nelle equazioni, così queste devono bastare a risolvere il problema. Dalle (2) e (3) eliminando z , si ottiene

$$(A) \quad \frac{\operatorname{tg} \pi \left\{ \frac{L + x}{\lambda} - \frac{n}{2} - \frac{z'(\lambda)}{\lambda} \right\}}{1 - \operatorname{tg}^2 \pi \left\{ \frac{L + x}{\lambda} - \frac{n}{2} - \frac{z'(\lambda)}{\lambda} \right\}} = \frac{\lambda}{8 \pi C \log b/a}.$$

In quanto alla (1) si noti che per ogni valore di λ essa dà una infinità di valori per z' dei quali però uno solo è compreso fra 0 e $\lambda/2$; questo solo interessa, perchè si è supposto che A_n sia il

1) Salvioni, sulla condizione, ecc. — *Rendic. Acc. dei Lincei*, 3 aprile 1892.

nodo più vicino al condensatore terminale; il corrispondente valore di z'/λ è quello che introdurremo nell'equazione (A). Si osservi poi che il primo membro di questa acquista uno stesso valore, ponendo $n = 0, 2, 4 \dots$ e pure uno stesso valore (diverso dal primo) ponendo $n = 1, 3, 5 \dots$.

Nel seguito si chiameranno, per brevità, *soluzioni pari* le λ ottenute con n pari e *soluzioni impari* le λ ottenute con n impari.

Mi proposi di verificare questa teoria, eseguendo un certo numero di esperienze sulla disposizione di Lecher, variando in essa le L, x, C : mi aspettavo che le soluzioni pari corrispondessero ai sistemi con numero n pari di internodi e le impari ai sistemi d'onde con numero n impari di internodi. I risultati furono invece molto diversi e tali da non potersi collegare fra loro al primo esame. Per riassumerli, distinguerò due casi tipici:

PRIMO CASO. — La x , lunghezza del filo primario, sia piccola rispetto all'internodo. In questo caso, tutte le lunghezze d'onda sperimentali coincidono con soluzioni date dalla equazione (A) e, in generale, con approssimazione molto maggiore che non si potesse aspettare. Serva ad esempio il prospetto seguente, che corrisponde ad una serie di esperienze, in cui le costanti avevano i seguenti valori:

$$x = 46, L = 1721, C = 25.8, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$$

n	λ sperimentale	λ teorico	soluzione
0	4208	4172	pari
1	2034	2032	impari
2	1316	1330	pari
3	980	978	impari
4	771	775	pari
5	643	638	impari
6	548	543	pari
7	471	472	impari
8	434	420	pari
9	356	370	impari

Per di più, conforme all'aspettazione, le λ corrispondenti a sistemi d'onda con numero n pari di internodi sono date da soluzioni pari, le altre da soluzioni impari. Vi è però una circostanza impreveduta: oltre le λ che si trovano sperimentalmente le equa-

zioni ne danno altre che dall'esperienza non risultano. Per la stessa serie ora ricordata, il calcolo dà le seguenti soluzioni (ordinate in valori decrescenti):

pari: 4172, 2380, 1910, 1330, 1000, 900, 775, 632, 590, 543, ecc.

impari: 2032, 1410, 1230, 978, 777, 715, 638, 530, 500, 472, ecc.

qui i valori che corrispondono alla esperienza sono sottolineati, e si succedono con regolarità, perchè fra due di essi sono compresi due valori di λ che non corrispondono ai risultati sperimentali.

SECONDO CASO. — La lunghezza x del primario sia grande rispetto all'internodo, ossia a $\lambda/2$. In questo caso i risultati sono molto differenti e si possono compendiare nei seguenti:

a) alcune lunghezze d'onda sperimentali concordano con valori λ dati dalla teoria e in generale l'accordo è così perfetto da non lasciar dubbio si tratti di coincidenze di numeri fortuite. Così, per es., nella serie di esperienze, in cui i dati erano:

$$x = 391, L = 1321, C = 14,3, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$$

si ebbero:

n	λ sperimentale	λ teorico	soluzione
0	3226	3225	pari
2	972	975	impari
3	730	740	pari
3	628	631	impari
5	468	464	impari
6	402	405	pari.

b) alcune volte soluzioni pari, (impari) concordano con lunghezze sperimentali corrispondenti a sistemi d'onde che hanno un numero rispettivamente pari, (impari) di internodi; altre volte si verifica l'opposto. Così nell'esempio precedente le soluzioni pari 3225, 405 sono nell'esperienza verificate per sistemi con numero pari (0, 6) di internodi, e le impari 631, 464 per sistemi con numero impari (3, 5) di internodi; ma la soluzione

impari 975 è verificata per un sistema con numero pari (2) e la pari 740 per un sistema con numero impari (3) di internodi;

c) la teoria dà, oltre alle sperimentali, altri valori di λ che non si ottengono nelle esperienze. Nell'esempio precedente la teoria dà 2775, 1680, 586 e queste non concordano con nessuna delle lunghezze d'onda sperimentali;

d) per converso, alcune (sempre poche) delle lunghezze sperimentali non vengono date dalla teoria: nell'esempio precedente si hanno sperimentalmente le lunghezze 1448 (1 internodo) e 564 (4 internodi).

Tali sono i risultati nei due casi tipici sopra distinti; nei casi intermedi poi, cioè quando la x non è nè molto grande, nè molto piccola rispetto a L , si hanno per i sistemi d'onda d'ordine meno alto gli stessi risultati del caso primo, e le maggiori complicazioni del caso secondo intervengono solo quando dai sistemi d'ordine più basso si passa ai sistemi d'ordine superiore.

Ma veniamo a descrivere le esperienze.

I fili del primario e del secondario sono di rame e tolti da una medesima matassa; sono fortemente tesi, e sono sostenuti orizzontalmente, a circa 150 cm. dal suolo, mediante fili di seta che si succedono a intervalli di circa 3 metri. Per lastre primarie mi servirono quattro dischi di ottone del diametro di cm. 18,6 e grossi mm. 2; sono sostenuti solidamente da altrettante squadre di legno, fissate a vite su una tavola, e da esse isolati mediante pezzi d'ebanite fissati fra il legno e le facce dei dischi che non si guardano. I fili sono saldati non al centro, ma agli orli dei dischi; ciò per aumentare il più possibile la distanza fra i due condensatori e attenuare così l'effetto dell'azione mutua fra questi ¹⁾. Lo spinterometro eccitatore è formato da due bacchette d'ottone (diam. 5 mm.) isolate su vetro, che si innestano in due brevi tratti tubulari portanti le palline d'ottone (diam. 2 cm.) fra le quali scocca la scintilla eccitatrice quando il rocchetto di Ruhmkorff agisce. In alcune serie di esperienze mi servii di un rocchetto di Carpentier, grande modello, con interruttore di Foucault, in altre di un rocchetto del Tecnomasio Italiano, di minori dimensioni, con interruttore a contatti di platino. La cor-

1) *Rend. Acc. dei Lincei*, 1. c.

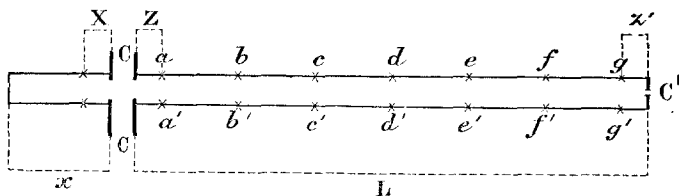
rente nel primario del rocchetto è in generale di circa 6 ampère. Infine fra le estremità del secondario è inserito un piccolo spinterometro con vite micrometrica, nel quale alle palline furono sostituite le punte di due aghi da cucire; e fra i fili di rame, è teso, un po' più in basso, fra due carucole, un filo di seta chiuso sopra se stesso, che porta il ponte scorrevole (filo di rame di circa 1 mm. di diam.).

Vorrei qui riferire in esteso le posizioni dei nodi trovate, sia con un solo ponte, sia con due; ma, per evitare l'ingombro di numerose tavole, mi restringerò a fare qualche osservazione generale sui risultati, dando in seguito le tavole delle sole lunghezze d'onda.

1.^o *Le posizioni determinate col solo ponte mobile non coincidono esattamente, con quelle determinate con un ponte mobile e un ponte fisso; e le differenze non sono trascurabili, avuto riguardo all'approssimazione che si raggiunge in ciascuna ricerca separatamente;*

2.^o *I nodi di uno stesso sistema non sono equidistanti e la distanza va aumentando verso le lastre primarie.*

Questa seconda osservazione fu già fatta da Birkeland e confermata da Wiedemann e Ebert: questi ultimi attribuiscono il fatto a complicazioni portate dal primario, il quale vibrerebbe ora come circuito aperto, ora come circuito chiuso sulla scintilla. Ma la relazione fra un fatto e l'altro non mi par chiara; sarei pertanto inclinato a ricercare la ragione di questo, come del precedente risultato, nel metodo stesso di ricerca, cioè nell'uso del ponte. Supponiamo infatti



(vedi figura) che i nodi a, b, c, \dots sieno distribuiti a distanze uguali e immaginiamo di collocare un ponte, per es., in e' ; la

durata d'oscillazione di entrambi i circuiti nei quali il ponte divide il sistema, aumenta per effetto del ponte, ma non nella stessa misura: in questo caso, per es., l'aumento è maggiore per il circuito a destra. La risonanza non ha più luogo perfettamente e per ristabilirla converrà spostare il ponte verso destra: il metodo del ponte darebbe dunque il nodo e spostato verso destra. Così presso l'estremità i nodi determinati col ponte sarebbero spostati verso destra, e i più vicini al primario spostati verso sinistra. Se tutto il sistema fosse simmetrico dalle due parti i nodi trovati con un solo ponte sarebbero simmetricamente disposti; ma ciò non è: l'azione perturbatrice del ponte è tanto maggiore quanto più è vicino al primario, perchè la sua autoinduzione si accompagna alla capacità del condensatore. Il ponte, per es., in a deve aumentare la durata d'oscillazione del circuito verso il primario molto più considerevolmente che quella dei circuiti che lo seguono; il nodo a a' determinato col ponte è quindi molto più dei seguenti spostato verso il primario; così si capisce come gli internodi determinati con un solo ponte risultino crescenti verso il primario. Per vedere poi ciò che si verifica quando, oltre al ponte mobile, si adopera un ponte fisso, basta osservare che, quando questo vien collocato in un nodo, per es., in e e' , come nelle mie esperienze, tutti i nodi si spostano realmente (tanto più quanto più vicini) per avvicinarsi a e e' ; quindi, cercandoli con un altro ponte, si trovano spostati in questo senso più che quando il ponte fisso mancava. Senza entrare in altri particolari, da quanto precede si vede come per ispiegare i due risultati, non è necessario ricorrere ad azioni perturbatrici del primario; aggiungerò solo che, se questa spiegazione è giusta, l'internodo più vicino al primario sarà tanto maggiore rispetto agli altri quanto più vicino alle lastre primarie è il primo nodo, quanto maggiore ne è la capacità, quanto più piccola è la lunghezza d'onda; e tutto ciò è confermato dall'esperienza.

Prima di passare alle tavole, nelle quali le varie lunghezze d'onda sperimentali sono messe a confronto colle lunghezze teoriche, mi occorre dire in qual modo queste ultime sono dedotte dalle formole

$$(A) \quad \frac{\operatorname{tg} \pi \left\{ \frac{L+x}{\lambda} - \frac{n}{2} - \frac{z'}{\lambda} \right\}}{1 - \operatorname{tg}^2 \pi \left\{ \frac{L-x}{\lambda} - \frac{n}{2} - \frac{z'}{\lambda} \right\}} = \frac{\lambda}{K C}$$

$$(B) \quad \frac{z'}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\lambda}{K C'} \quad \text{e} \quad K = 8\pi \log b/a$$

Coll'idea di semplificare il calcolo non ho inserito alcun condensatore fra le estremità libere, col che pensavo di potere supporre $C' = 0$, nel qual caso si ha $z'/\lambda = 1/4$. Ma, dovendo nelle misure disporre fra le estremità lo spinterometro, mi accorsi, dopo le prime esperienze, che per quanto questo si fosse scelto di piccole dimensioni, la sua capacità C' non era trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda. Essendomi provato a diminuire il più possibile le dimensioni dello spinterometro, ottenni per C' valori molto più piccoli, ma non ancora tali da verificare con approssimazione sufficiente la relazione $z' = 1/4 \lambda$. Mi attenni quindi al partito di conservare in tutte le misure il primo spinterometro che era d'uso più comodo e determinarne, con esperienze preliminari, la capacità C' , misurando le λ e le corrispondenti z' e introducendo questi valori nella formola (2), di cui, è bene ricordarlo, non è questione in queste ricerche. Nelle esperienze fatte a tale intento erano $L = 1715$, $x = 40$, $C = 25.8$, $a = 0.031$, $b = 12$: le λ e z' e i corrispondenti valori che risultarono per C' sono raccolti nel prospetto seguente:

λ	z'	C'	z'/λ osservato	z'/λ calcolato
1316	308	0.77	0.234	0.234
771	173	0.74	0.224	0.223
548	116	0.80	0.211	0.212
434	91	0.65	0.210	0.204
356	68	0.79	0.192	0.194
media		0.75		

Se si riflette che nel determinare le λ e z' si potrà in media commettere un errore dell'1 per cento, potrà, a primo esame, parer strano che qui si riguardino le C' , come costanti (come vuole la teoria di Cohn e Heerwagen), assumendone la media, mentre fra le C' e il valor medio si ha una differenza media del 6 per cento. Ma ciò dipende dalla forma dell'equazione (2): essendo z'/λ non molto inferiore a $1/6$, e però $\frac{2\pi z'}{\lambda}$ prossimo a $\frac{\pi}{2}$, tag $\frac{2\pi z'}{\lambda}$ e quindi la C' calcolata varia considerevolmente per piccole variazioni di z'/λ . Non importa quindi se le C' calcolate sono anche molto diverse; piuttosto, siccome del valore medio di C' ce ne dovremo valere solo per calcolare z'/λ nei singoli casi, è da vedere sino a che punto le z'/λ sperimentali concorrono colle z'/λ che si calcolano ponendo nella $\text{tg } \frac{2\pi z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{K C'}$ il valore medio di C' . L'ultima colonna del prospetto precedente contiene appunto le z'/λ così calcolate: le differenze tra queste e le corrispondenti sperimentali sono, in media, dell'1 per cento, e si ritorna così entro i limiti della approssimazione che si ha nelle esperienze. Pertanto, quando anche C' non fosse costante, si potrebbe sempre nei calcoli che seguono assumere per C' il valore medio 0,75; e questo appunto si è fatto.

La risoluzione matematica delle (A) e (B) presentando per me delle difficoltà, mi accontentai di una risoluzione grafica ottenuta come segue:

1.° Colla formola

$$\text{tg } \frac{2\pi z'}{\lambda} = \frac{\lambda}{K C'}$$

ho costruito una curva, prendendo λ come ascissa e

$$z'/\lambda = \frac{1}{2\pi} g^{-1} \frac{\lambda}{K C'} \quad (C' = 0,75 \quad \text{e} \quad K = 8\pi \log b/a = 176),$$

come ordinata. Questa serve per tutte le serie di esperienze.

2.° Coi valori di z'/λ letti sulla curva precedente, ho costruito nei tratti che interessano, i rami di curva che si hanno,

assumendo come ascissa ancora λ e come ordinata il primo membro dell'equazione (A). Questi rami sarebbero in numero infinito, parte nella regione positiva e parte nella regione negativa delle ordinate. Siccome i rami negativi non interessano, così gli intervalli, nei quali il primo membro dell'equazione (A) risulta negativo, venivano assegnati da un esame preliminare nel quale si determinavano i punti in cui le curve attraversano l'asse delle ascisse e i valori di λ compresi in questi intervalli venivano esclusi dallo studio successivo. Dei rami positivi si costruivano solo i primi, partendo da $\lambda = \infty$. La costruzione di tali rami è certo facile, ma richiede un lavoro paziente e che si deve ripetere ogni volta si variano la L o la x .

3.º Sullo stesso foglio, e riferita agli stessi assi, tiro infine la retta di cui il punto corrente ha per ascissa ancora λ e per ordinata $\frac{\lambda}{K C}$. È chiaro da quanto precede che le ascisse λ dei punti in cui questa retta incontra i rami precedenti soddisfano alle equazioni, e sono quindi le lunghezze d'onda teoriche dei vari sistemi. Nelle tavole che seguono, la 2ª e 3ª colonna contengono le lunghezze d'onda determinate in questo modo, e quelle date dall'esperienza, e nella 1ª la lettera p , o i indica se la λ è calcolata coll'equazione pari o colla impari. Dei valori poi raccolti nelle colonne successive dirò in seguito.

TAVOLA 1.^a

$L = 1721, x = 46, C = 25,8, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ		Numero degli internodi		Tratti attigui alle lastre		$\lambda/2$
	calc.	oss.	n_1	n_2	X	Z	
p	4170	4184	0	0	46	700	2085
p	2380	—	0	0	46	1150	1190
i	2030	2008	0	1	46	219	1015
p	1910	—	0	1	46	310	955
i	1408	—	0	1	46	686	704
p	1330	1316	0	2	46	71	665
i	1232	—	0	2	46	202	616
p	1000	—	0	2	46	491	500
i	980	978	0	3	46	26	490
p	900	—	0	3	46	167	450
p, i	775	770	0	3	46	385	387
i	720	—	0	4	46	121	360
p, i	635	643	0	4	46	313	318
p	592	—	0	5	46	113	286
p	542	548	0	5	46	251	271
i	532	—	0	6	46	12	266
i	495	—	0	6	46	115	247
i	475	472	0	6	46	197	237
p	465	—	0	6	46	230	232
p	440	—	0	7	46	91	220
p	420	422	0	7	46	166	210
i	385	382	0	8	46	104	192

TAVOLA 2.^a
 $L = 1721, x = 46, C = 8,34, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	3645	3720	0	0	46	828	1822
p	2380	—	0	0	46	1147	1190
i	1840	1880	0	1	46	363	920
p	1775	—	0	1	46	412	888
i	1410	—	0	1	46	685	705
p	1235	1260	0	2	46	197	618
i	1165	—	0	2	46	286	582
p	1000	—	0	2	46	491	500
i	930	936	0	3	46	114	465
p	875	—	0	3	46	210	438
i	780	—	0	3	46	376	390
p	745	746	0	4	46	66	372
i	698	—	0	4	46	171	349
p	638	—	0	4	46	307	319
i	620	622	0	5	46	36	310
p	580	—	0	5	46	146	290
p, i	534	533	0	6	46	6	267
p	490	—	0	6	46	149	245
i, p	470	474	0	6	46	214	235
p	438	—	0	7	46	99	219
p	418	418	0	7	46	180	209

TAVOLA 3.^a

$L = 1321, x = 395, C = 14,3, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	3225	3225	0	0	395	784	1712
i	2775	—	0	0	395	716	1388
p	1680	—	0	1	395	85	840
i	975	972	0	2	395	124	488
p	740	730	1	3	25	46	370
i	631	630	1	3	80	238	316
p	586	—	1	4	102	23	293
p	405	402	1	6	193	25	202
i	464	468	1	5	163	65	232

l'esperienza dà inoltre $\lambda = 1448$ e $\lambda = 564$

TAVOLA 4.^a

$L = 1321, x = 395, C = 8,34, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	2970	3030	0	0	395	603	1485
p	1710	—	0	1	395	59	855
i	972	973	0	2	395	116	486
p	725	728	1	3	31	67	362
i	631	628	1	3	80	238	316
p	589	—	1	4	101	16	294
i	465	472	1	5	163	63	232
p	402	398	1	6	194	35	201
i	361	359	2	6	34	168	180

l'esperienza dà inoltre $\lambda = 1441$ e $\lambda = 564$

TAVOLA 5.

 $L = 760, x = 46, C = 8.34, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	1770	1795	0	0	46	339	885
p	1080	—	0	0	46	509	540
i	902	908	0	1	46	103	451
p	780	—	0	1	46	195	390
p	600	600	0	2	46	30	300
i	635	—	0	1	46	305	318
i	542	—	0	2	46	103	271
i	455	460	0	2	46	211	228
p	442	—	0	3	46	6	221
p	375	398	0	3	46	124	188

TAVOLA 6.^a
 $L = 760, x = 46, C = 25.8, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	2100	2114	0	0	46	256	1050
p	1050	—	0	0	46	517	525
i	1000	999	0	1	46	30	500
p	855	—	0	1	46	140	428
p	640	638	0	1	46	301	320
i	615	—	0	2	46	12	308
i	555	—	0	2	46	86	278
i	465	474	0	2	46	199	232
p	446	—	0	3	46	0	223
p	390	400	0	3	46	97	195

TAVOLA 7.^a

$$L = 1214, \alpha = 45, C = 14.3, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	2860	2870	0	0	46	508	1430
i	2680	—	0	0	46	565	1340
p	1675	—	0	0	46	820	838
i	1420	1408	0	1	46	170	710
p	1330	—	0	1	46	236	665
i	1020	—	0	1	46	467	510
p	940	932	0	2	46	59	470
i	830	—	0	2	46	194	415
p	720	—	0	2	46	333	360
i	695	690	0	3	46	19	348
p	625	—	0	3	46	137	312
p	555	556	0	3	46	263	278
i	563	—	0	3	46	250	282
i	500	—	0	4	46	110	250
i	440	430	0	5	46	24	220

TAVOLA 8.^a

$$L = 926, \alpha = 78.5, C = 8.35, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
i	1310	—	1	0	134	619	655
p	1210	1220	1	1	179	39	605
i	765	—	2	2	19	10	382
p	725	726	2	2	59	40	362
i	530	—	2	3	254	19	265

l'esperienza dà inoltre $\lambda = 1018$ e $\lambda = 660$

TAVOLA 9.^a

$$L = 1321, \alpha = 206, C = 8.34, b = 12, a = 0.031, C' = 0.75$$

	λ calc.	λ oss.	n_1	n_2	X	Z	$\lambda/2$
p	2800	2860	0	0	206	643	1400
i	1530	1530	0	1	206	195	765

Le principali conclusioni che si possono trarre dall'esame di questi risultati sono state già raccolte precedentemente (pag. 160 e seguenti), assumendo come tipici i casi in cui λ è grande o piccola rispetto all'internodo. Ora, ognuno vede che i risultati sono molto slegati: per quanto numerose e soddisfacenti sieno le coincidenze, prima di pronunziarci favorevolmente sulla teoria, sentiamo il bisogno di scorgere una regola che valga a distinguere, fra le λ date dal calcolo, le buone dalle spurie. Dopo non pochi tentativi, riuscii a raggiungere tale intento. Rammento che, come punto di partenza si è supposto che il primo circuito comprendente le lastre, vibri all'unisono coi seguenti, o, in altre parole, che i sistemi d'onda sieno in questi e in quello gli stessi. Non volendo disdirci, dobbiamo quindi ammettere che quando la lunghezza x del filo primario, superi la semilunghezza d'onda, anche in esso si abbiano dei nodi. È ben vero che l'esperienza non è riuscita, almeno sin ora, a mettere in evidenza tali nodi; ma è chiaro che il metodo del ponte, l'unico fin ora usato, non è più applicabile, perchè, se un ponte si mette nel primario, non iscooccano più le scintille eccitatrici. Del resto, dal fatto spiccatissimo che i fenomeni elettrici sono nel primario di gran lunga più energici che nel secondario, si deve arguire che nel primario, oltre alle oscillazioni che si propagano nel secondario, se ne abbiano altre molto energiche che vengono riflesse dalle lastre e la cui energia tutta si consuma nel primario: queste non hanno influenza sulle onde di Lecher che si studiano, ma sovrapponendosi a queste, possono, nel primario, mascherarne i nodi. Comunque sia, porremo

$$L = Z + n_2 \lambda/2 + z'$$

$$x = X + n_1 \lambda/2$$

$$X < \lambda/2, \quad Z < \lambda/2$$

e saranno n_1 il numero degli internodi nel primario, n_2 il numero degli internodi nel secondario, e X , Z i segmenti attigui alle lastre. I risultati delle tavole si possono allora coordinare colla regola seguente: *Quando $X + Z$ è $< \lambda/2$ sono buone le sole*

soluzioni pari se $n_1 + n_2$ è pari e le impari se $n_1 + n_2$ è impari; quando invece $X + Z$ è $> \lambda/2$ sono buone le sole soluzioni pari se $n_1 + n_2$ è impari e le sole impari se $n_1 + n_2$ è pari.

Applicando questa regola ai più che cento casi riportati nelle tavole, si trova che essa cade in difetto 4 volte (Tav. 3^a per $\lambda = 464$, 4^a per $\lambda = 465$, 5^a per $\lambda = 375$, 6^a per $\lambda = 390$): ma è facile vedere che queste eccezioni non bastano a infirmarla. Ma è dessa generale? Per stabilirlo occorre, o dimostrare che questa regola è la sola conciliabile colle mie esperienze, o trovarne una ragione teorica. La prima cosa non è possibile, anzi non è difficile trovare una regola differente la quale pure si possa sostenere colle stesse esperienze. Ne ho cercato quindi la spiegazione colle considerazioni seguenti.

Rammettiamo che la formola che qui ha servito a determinare le λ , è stata dedotta (cfr. nota precedente, pag. 209) dalle espressioni

$$9) \Phi_1 = h \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\zeta) \Phi_2 = -h \operatorname{sen} 2\pi \left\{ \frac{L - n\lambda/2 - z'}{\lambda} \right\}$$

essendo Φ_1 e Φ_2 i potenziali (in un medesimo istante) sulle lastre affacciate 1, 2 e h una quantità che non dipende dalla posizione che le lastre occupano nel circuito. Qui bisogna notare che affatto arbitrariamente è stato attribuito il segno — al secondo membro della ζ), non essendovi ragione di stabilire che su due lastre affacciate il potenziale abbia segno opposto; ciò non porta alcun inconveniente sinchè n è indeterminato, ma diventa una restrizione arbitraria quando con n si intenda il numero di internodi nel circuito.

Ciò premesso, immaginiamo che le lastre si avvicinino l'una all'altra sino al contatto; la capacità C allora cresce e al limite è infinita. Ma, quando il contatto metallico è stabilito (per entrambe le coppie di lastre), il circuito di Lecher diventa un circuito chiuso, che vibra quindi dividendosi in circuiti tutti uguali fra loro. Ora

in questo caso limite dev'essere $\Phi_1 = \Phi_2$ in valore e in segno, epperò, posto come precedentemente

$$\gamma) \quad \begin{array}{ll} x = n_1 \lambda/2 + X & L = n_2 \lambda/2 + Z \\ X < \lambda/2 & Z < \lambda/2 \end{array}$$

si dovrà nell'equazione ζ) assumere n impari se n_1 e n_2 sono entrambi pari o entrambi impari, e n pari se di n_1 e n_2 l'una è pari e l'altra è impari, perchè se si facesse altrimenti, Φ_1 e Φ_2 risulterebbero uguali in valore assoluto, ma non in segno. Più brevemente possiamo dire che per $C = \infty$, nell'equazione ζ) e quindi anche nella (A) si deve assumere n pari se $n_1 + n_2$ è impari, n impari se $n_1 + n_2$ è pari. Si sarebbe concluso l'opposto se al secondo membro della ζ) si fosse attribuito il segno $+$.

Notiamo ora che per $C = \infty$, dovendo il circuito vibrare diviso in parti uguali, è $X + Z = \lambda/2$, e immaginiamo di ristabilire l'interruzione fra le lastre scostandole di pochissimo, cosicchè la C assuma un valore C_1 finito, ma molto grande: in questo passaggio, la capacità essendo diminuita, la λ sarà pure diminuita, e quindi per le γ), $X + Z$ sarà aumentato e si dovrà avere $X + Z > \lambda/2$.

Ma l'esperienza stabilisce senza alcun dubbio, essendo anzi questo il caso più comune, che per valori di C finiti può essere $X + Z < \lambda/2$. Si chiami C_2 un valore per cui questo ha luogo, e si immagini che partendo da C_2 la C cresca; la λ deve allora crescere, epperò $X + Z$ che è già $<$ di $\lambda/2$ deve diminuire. Ma d'altra parte si è detto sopra che per un valore C_1 abbastanza grande è $X + Z > \lambda/2$ e che questa disuguaglianza si mantiene per tutti i valori di C maggiori di C_1 , riducendosi al limite $X + Z = \lambda/2$ quando è $C = \infty$. L'assurdo non si può togliere, se non ammettendo che per un valore C_3 intermedio fra C_1 e C_2 un nodo, (per es. del secondario) arriva sulle lastre, cosicchè la Z definita dalle γ) passa bruscamente da valori infinitamente piccoli a valori infinitamente vicini a $\lambda/2$. Avremo così:

$$\begin{array}{lll} \text{per } C > C_3 & n_1 + n_2 = m & X + Z > \lambda/2 \\ \text{per } C < C_3 & n_1 + n_2 = m + 1 & X + Z < \lambda/2 \end{array}$$

Facendo diminuire C dall'infinito il numero dei nodi si mantiene lo stesso finchè C è $>$ di C_3 ; ma quando C passa per C_2 , un nodo compare su una lastra; diminuendo oltre, questo nuovo nodo si scosta dalla lastra, e quindi per $C < C_3$ il numero dei nodi riesce aumentato di uno. Si intende che per i vari valori di C , si considerano sistemi d'onde tali che si trasformino l'uno nell'altro con continuità al variare di C . Ora, se per una data C si ha una λ ponendo nella (A) un certo valore per n , al variare di C la nuova λ in cui la prima si trasforma per continuità, deve ottenersi dalla (A) variandovi solo C . La stessa n deve dunque introdursi in (A), quando C diminuisce dall' ∞ sino a zero, laddove $n_1 + n_2$ cresce di 1 quando C passa per C_3 . Ma per $C = \infty$ sono buone le soluzioni date da n pari se $n_1 + n_2$ è impari e da n impari se $n_1 + n_2$ è pari: lo stesso ha dunque luogo sinchè è $C < C_3$ o, per quanto precede, quando $X + Z$ è $> \lambda/2$. Quando invece $C < C_3$, cioè $X + Z < \lambda/2$ accade l'inverso, sono buone cioè le soluzioni date da n pari se $n_1 + n_2$ è pari e da n impari se $n_1 + n_2$ è impari. Ora questa è appunto la regola che ho trovato sperimentalmente, prescindendo affatto da tali considerazioni ¹⁾.

È poi facile dimostrare che le soluzioni λ che la regola dà per buone rendono positivo il numeratore del primo membro della (A), mentre le altre lo rendono negativo. Si possono quindi escludere tutte le altre, aggiungendo alla (A) la condizione.

$$\operatorname{tg} \pi \left\{ \frac{L + \alpha}{\lambda} - n/2 - z'/\lambda \right\} > 0$$

Di tale condizione si può dare una interpretazione fisica. Senza alcuna considerazione al limite, ma solo riflettendo sulle equazioni che servono di base, si può concludere che, se sulle

1) Le curve che mi hanno servito a calcolare le λ , danno subito i valori C_3 in ogni caso e per ogni sistema d'onde. È facile infatti vedere che basta considerare le intersezioni delle curve n pari, colle curve n impari, e tracciare le rette che congiungono questi punti coll'origine. Allora dalla diversa inclinazione di tali rette si hanno i valori C_3 , mentre le ascisse danno le corrispondenti lunghezze d'onda. Così nel caso $\alpha = 46$, $L = 760$ (Tav. V e VI) le curve danno che al diminuire di C , comparirà un nuovo nodo per $C_3 = 39$, $C_3 = 15,5$, $C_3 = 5$ rispettivamente nei sistemi d'ordine 2, 3, 4, e che le λ corrispondenti saranno 1030, 625, 445.

lastre affacciate 1,2 ovv. 3,4 il potenziale si suppone di segno opposto, la lunghezza d'onda dev'essere data da una soluzione pari o impari secondochè $n_1 + n_2$ è pari o impari, mentre se il potenziale si suppone dello stesso segno, la lunghezza d'onda dev'essere data da una soluzione pari o impari secondochè $n_1 + n_2$ è impari o pari. Applicando ciò alla regola si ha:

Se $X + Z \geq \lambda/2$, il potenziale ha lo stesso segno su due lastre affacciate; se $X + Z < \lambda/2$, il potenziale ha segno opposto. Nel caso di passaggio $C = C_3$ in cui $X + Z$ può considerarsi tanto maggiore quanto minore di $\lambda/2$, secondochè si voglia ritenere Z come uguale a zero o come uguale a $\lambda/2$, il potenziale ha sulle lastre secondarie il valore zero, e nel caso limite $C = \infty$ ($X + Z = \lambda/2$) il potenziale ha, oltre allo stesso segno, anche lo stesso valore.

Questa interpretazione fisica ci spiega come possa aver luogo il seguente caso paradossale che si verifica più volte nelle mie esperienze. *Dati due circuiti che comprendano le stesse coppie di lastre alla stessa distanza, cioè la stessa capacità C, ma che sieno di lunghezza diversa, può la durata d'oscillazione essere maggiore per il circuito più corto.* Per es., nella tavola 7^a al circuito $X (= 46) + Z (= 59)$ lungo 105 cm. spetta $\lambda = 932$, e al circuito $X (= 46) + Z (= 263)$ lungo 309 cm. spetta $\lambda = 556$, quantunque C abbia lo stesso valore 14,3 nell'uno e nell'altro. *Ciò si spiega, osservando che nel primo il potenziale ha segno opposto sulle armature di ciascun condensatore, nel secondo invece ha lo stesso segno; la stessa capacità ha, per questa ragione, maggiore effetto nel primo che nel secondo.*

Chiuderò, riassumendo i risultati principali di questo studio.

Ho riscontrato che i nodi determinati con un solo ponte non coincidono coi nodi determinati con due ponti, e ho confermato il fatto che gli internodi così trovati non sono uguali, ma crescenti verso il primario. Questi due risultati sono considerati da me come anomalie che vengono introdotte dal modo di esplorazione, ossia dall'uso del ponte e non sono da attribuirsi al modo di vibrazione del primario.

Partendo da una formola di Cohn e Heerwagen e da una da me precedentemente stabilita (entrambe dedotte dalla teoria di

Maxwell), ho formata una teoria per determinare a priori le lunghezze d'onda di tutti i possibili sistemi di Lecher, date le sole condizioni geometriche che la determinano, cioè le dimensioni dei fili e delle lastre.

L'accordo fra le lunghezze d'onda calcolate con questa teoria e le sperimentali è, in generale, quasi perfetto; risultato questo tanto più notevole inquantochè nel calcolo si è introdotto per la capacità dei condensatori il valore calcolato colla formola di Kirchhoff che serve nell'elettrostatica. È noto infatti essere stato da altri trovato che, per le oscillazioni rapide dell'ordine delle mie, la capacità di un condensatore è notevolmente differente dalla sua capacità elettrostatica. Il disaccordo si può spiegare, osservando che, mentre in elettrostatica e per le oscillazioni di lungo periodo, l'effetto del condensatore non dipende dalla posizione che esso ha nel circuito, nelle oscillazioni rapide, nelle quali la lunghezza d'onda è paragonabile colla lunghezza del circuito, l'effetto del condensatore dipende dalla posizione che esso occupa ¹⁾; tenendo conto di ciò, si può, secondo i miei risultati, introdurre nelle formole la capacità elettrostatica. Ciò vale almeno sino a che le dimensioni del condensatore restino piccole rispetto alla lunghezza d'onda; e infatti si scorge dalle tavole che l'accordo fra calcolo e esperienza è meno soddisfacente quando le lunghezze d'onda sono molto piccole.

La teoria darebbe, oltre alle sperimentali, altre lunghezze d'onda; ma queste vengono tutte escluse, aggiungendo una condizione che si può dimostrare con considerazioni al limite.

Dall'esperienza e dalla discussione si ha che la lunghezza dell'internodo che comprende le lastre può essere tanto maggiore, quanto minore della semi-lunghezza d'onda.

Il potenziale su due lastre affacciate (primaria e secondaria) può avere lo stesso segno, oppure segni opposti; ha lo stesso segno, se l'internodo che comprende le lastre supera la semi-lunghezza d'onda, e segni opposti nel caso contrario. Quando la capacità variando dall'infinito a zero, passa per un certo valore che la teoria assegna a priori, compare sulle lastre un nuovo

1) Cfr. mia nota c. s., come per l'aggiunta, ecc.

nodo, cosicchè per capacità più piccole, il sistema d'onde acquista un nodo di più.

Infine, quando la lunghezza del primario è grande rispetto all'internodo, l'esperienza rileva alcune lunghezze d'onda che il presente calcolo non dà.

Luglio 1893.

A G G I U N T A

Nello stabilire questa teoria, ho ammesso (pag. 173) che quando la lunghezza α del primario è maggiore dell'internodo, si abbiano dei nodi anche nel primario. Questo fatto nuovo può riguardarsi come indirettamente dimostrato dall'accordo che risultò fra l'esperienza ed il calcolo; ciò non ostante mi parve bene dimostrarlo direttamente colla esperienza.

Ma l'unico metodo sin qui usato per la ricerca dei nodi non si poteva applicare al primario, perchè, quando il ponte conduttore si colloca sul primario, cessano le scintille eccitatrici e le oscillazioni non hanno più luogo. Dovendo perciò ricorrere a qualche metodo che non presentasse tale inconveniente, pensai di approfittare di una osservazione da me fatta in un lavoro precedente ¹⁾, dove avevo studiata l'influenza che ha sulla lunghezza d'onda una capacità inserita tra i fili secondari. Risultava infatti da quel lavoro che un condensatore inserito tra i fili secondari, ne aumenta la durata d'oscillazione, ma in diverso grado secondo la posizione che esso ha rispetto ai nodi; e che l'effetto è minimo (teoricamente nullo) quando il condensatore è collocato in un nodo.

Se dunque, fissato un ponte conduttore in un nodo del secondario così da dividere tutto il sistema di Lecher in due circuiti in risonanza, si inserisce poi tra i fili di uno di questi un condensatore, la risonanza, in generale turbata per l'aggiunta di

1) " Come per l'aggiunta, ecc. », l. c.