

Über das Problem der Nachbargebiete im Raum.

Von Heinrich Tietze in Wien.

In einem unlängst erschienenen Aufsatz von P. Wernicke¹⁾, der sich mit dem bekannten Vierfarbenproblem beschäftigt, wird die Frage nach der sogenannten chromatischen Zahl des (dreidimensionalen) Raumes aufgeworfen. Zu dieser Zahl führt die Aufgabe, bei einer vorgelegten Einteilung des Raumes (oder eines Raumteiles) den einzelnen Teilen Farben zuzuweisen, derart, daß 1. Teile des Raumes, die eine Begrenzungsfläche gemein haben, verschiedene Farben erhalten, 2. eine möglichst geringe Zahl von Farben zur Verwendung kommt. Unter der chromatischen Zahl des Raumes versteht man dann die geringste Zahl von Farben, mit der man bei einer beliebigen Raumeinteilung auslangt. Daß nun die chromatische Zahl des dreidimensionalen Raumes — und dann natürlich auch jedes Raumes von höherer Dimension — unendlich groß ist, hat bereits Stäckel²⁾ gezeigt, indem er ein Verfahren angab, im dreidimensionalen Raum eine beliebig vorgegebene Anzahl von Nachbargebieten zu konstruieren. Dabei versteht man unter n „Nachbargebieten“ n Gebiete derart, daß jedes mit jedem eine gemeinsame Begrenzungsfläche aufweist.³⁾

Stäckel weist nun darauf hin, daß die Nachbargebiete, die er konstruiert, nicht überall konvex sind und stellt die Frage, ob die

¹⁾ Math. Ann. 58. ²⁾ Zeitschrift f. Math. u. Phys., 42. Jahrgang. Ein älterer Beweis hiefür von Frederick Guthrie, Proc. Roy. Soc. Edinburgh X. Ein dritter Beweis wurde neuerdings von Dixon gegeben, Messenger 32. ³⁾ Ein besonders einfaches Beispiel von n Nachbargebieten erhält man folgendermaßen: Man lege eine quadratische Platte auf die xy -Ebene, derart, daß die Quadratseiten der x - bzw. der y -Achse parallel werden, und auf diese quadratische Platte eine zweite kongruente. Hierauf werde die eine Platte durch Schnitte parallel zur xz -Ebene, die andere durch Schnitte parallel der yz -Ebene je in n Stäbe geteilt, und der m te Stab der einen Platte mit dem m ten Stab der zweiten Platte ($m=1, 2, \dots, n$) zu einem Körper verschmolzen (s. Fig. 1. für den Fall $n=5$).

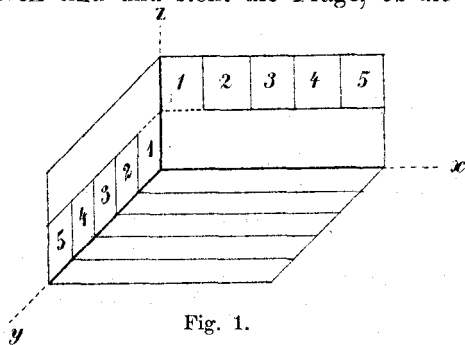


Fig. 1.

Anzahl der konvexen Nachbargebiete im dreidimensionalen Raum begrenzt sei.¹⁾ In den folgenden Zeilen soll nun der Beweis geführt werden, daß diese Frage zu verneinen ist, indem gezeigt wird, daß man eine beliebig vorgegebene Anzahl von Nachbargebieten herstellen kann, die sämtlich konvexe Polyeder sind.

Ehe wir an diesen allgemeinen Beweis herantreten, soll ein Beispiel dafür betrachtet werden, daß man sechs konvexe Polyeder konstruieren kann, die ein System von Nachbargebieten bilden. Daß man fünf derartige Polyeder angeben kann, bemerkt schon Stäckel. Er führt hierfür als Beispiel die Zerlegung eines Tetraeders $ABCD$ in ein Mitteltetraeder $EFGH$ und vier dreiseitige Pyramidenstumpfe $ABCEFG$, $ABDEFH$, $ACDEGH$, $BCDFGH$ an (s. Fig. 2). Dabei sollen der Einfachheit halber die Tetraeder $ABCD$ und $EFGH$ regulär und mit paarweise parallelen Kanten angenommen werden und es sollen ihre Mittelpunkte zusammen fallen.

Aus der besprochenen Zerlegung von $ABCD$ wollen wir nun eine andere ableiten, bei der das Tetraeder in 6 konvexe Nachbargebiete zerfällt. Hierzu wähle man auf den Strecken BF und FH

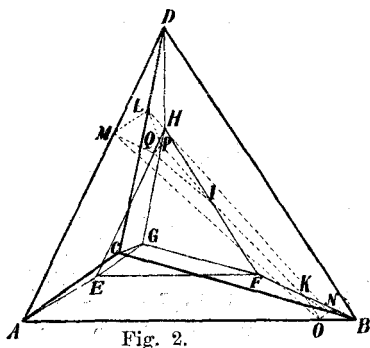


Fig. 2.

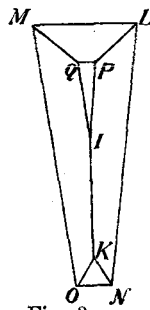


Fig. 3.

bezw. die Punkte K , I und lege durch dieselben eine zu AC parallele Ebene. Den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Tetraeder $ABCD$ zeigt Fig. 3.

Läßt man nun in dem Tetraederteil $ACLMNO$ die ursprüngliche Einteilung bestehen, während man den Tetraederteil $BDBLMNO$ als ein einziges Teilpolyeder auffaßt, so erhält man eine Einteilung von $ABCD$ in die 6 konvexen Polyeder $EFGIPQ$, $ACNOKEFG$, $AMQIKOEF$, $ACLMEGPQ$, $CLPIKNFG$, $BDBLMNO$, die ein System von Nachbargebieten darstellen.

Das eben entwickelte Beispiel, welches zeigt, daß man mehr als fünf konvexe Nachbargebiete konstruieren kann, legt die Vermutung nahe, daß die Zahl der konvexen Nachbargebiete beliebig

¹⁾ Übrigens findet sich diese Fragestellung schon bei Frederick Guthrie angedeutet (a. a. O.).

groß werden kann. Diese Vermutung soll nun durch den Schluß von n auf $n+1$ ihre Bestätigung finden.

Die konvexen Polyeder, mit denen wir dabei operieren, definieren wir in folgender Weise:

Es sei eine endliche Anzahl von Ebenen E_1, E_2, \dots gegeben und von jeder Ebene E_i sei die eine Seite als positiv, die andere als negativ bezeichnet. Gibt es dann einen Teil des Raumes, dessen Punkte in Bezug auf alle Ebenen E_i auf der positiven Seite liegen, so nennen wir ihn ein Polyeder.

Es kann nun der Fall eintreten, daß wir einige der Ebenen E_i fortlassen können, ohne daß sich das Polyeder dabei ändert (vergrößert). Es sind das diejenigen Ebenen E_i , die keine Punkte enthalten, die auf den positiven Seiten sämtlicher übrigen Ebenen liegen. Von diesen für die Definition des vorgelegten Polyeders unwesentlichen Ebenen wollen wir absehen. In Bezug auf die übrigen, für die Definition des Polyeders wesentlichen Ebenen E_i definieren wir die Begrenzungspolygone wie folgt: Die Gesamtheit der Punkte einer Ebene E_i , die auf den positiven Seiten aller übrigen Ebenen liegen, heiße ein Begrenzungspolygon des Polyeders. Ein Polyeder mit m Begrenzungspolygonen heiße ein m -fläch(m -eder).

In der gewählten Definition der Polyeder ist schon die Beschränkung auf konvexe Polyeder enthalten. Jedoch können sich bei unserer Definition die Polyeder auch ins Unendliche erstrecken, in welchem Fall sie als unendliche Polyeder bezeichnet werden sollen.

Wir betrachten nun Einteilungen des gesamten Raumes in unendliche Polyeder, die ein System von Nachbargebieten bilden. Aus einer solchen Einteilung in unendliche Polyeder läßt sich dann ein System (konvexer) im Endlichen gelegener Nachbargebiete erhalten, indem man jedes unendliche Polyeder in genügend großer Entfernung durch ebene Flächen begrenzt.

Wir nehmen an, wir hätten eine Einteilung \mathfrak{T}_n des Raumes in n unendliche Polyeder, wobei folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. Je zwei Polyeder stoßen mit Teilen ihrer Begrenzungsflächen aneinander.

2. Eines der Polyeder ist ein 1-fläch (Halbraum). Seine Begrenzungsebene werde mit D bezeichnet. Von den beiden Halbräumen d_1, d_2 , in die der gesamte Raum durch die Ebene D zerfällt, bildet der eine, etwa d_1 , das eben genannte 1-fläch, während d_2 in die $n-1$ übrigen Polyeder zerfällt.

3. Es läßt sich eine Ebene E von folgender Art legen.

a) Die Ebene E schneidet jedes der n Polyeder in einer (endlichen oder unendlichen) polygonalen Fläche. Dabei sollen diese Schnittpolygone im Innern der Polyeder liegen, also nicht etwa Begrenzungspolygone sein.

Aus a) folgt, daß E nicht zu D parallel sein kann. E und D werden sich also in einer Geraden g schneiden. Durch g wird E in zwei Halbebenen E_1, E_2 zerlegt, von denen E_1 im Halbraum d_1 ,

E_2 im Halbraum d_2 liegen möge. Durch die Ebene E wird der gesamte Raum in zwei Halbräume geteilt, die mit e_1, e_2 bezeichnet werden sollen. Die in e_1 , bzw. e_2 liegende Halbebene von D werde mit D_1 , bzw. D_2 bezeichnet.

b) Einer der Halbräume, die durch E gebildet werden, etwa e_1 , hat die Eigenschaft, daß in ihm alle n Polyeder zu je zweien in Flächenstücken aneinandergrenzen. Wir könnten also den Halbraum e_2 fortlassen und die übrigbleibenden Teile der n Polyeder würden wieder n Nachbargebiete sein.

Bezüglich der Schnittfigur der Begrenzungsflächen der n Polyeder mit der Ebene E wissen wir zunächst: Durch den Strahl g wird E (s. Fig. 4) in zwei Halbebenen E_1, E_2 geteilt. E_1 stellt die Schnittfläche von E mit dem 1-flach d_1 vor; E_2 enthält die $n-1$

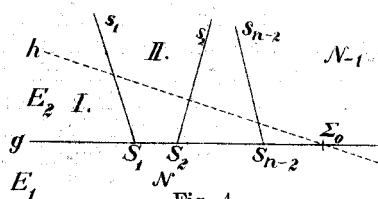


Fig. 4.

übrigen Schnittflächen. Sämtliche Schnittlinien (Strahlen, Halbstrahlen oder Strecken) außer g , die wir mit s_1, s_2, \dots bezeichnen wollen, liegen in der Halbebene E_2 . Es sollen nun noch die Bedingungen erfüllt sein:

c) Alle Schnittlinien s schneiden g , u. zw. in durchaus verschiedenen Punkten S_1, S_2, \dots . Die Gerade g wird dadurch in die Stücke $\infty S_1, S_1 S_2, S_2 S_3, \dots$ zerlegt.

d) Jede der $(n-1)$ von den Polyedern gebildeten Schnittflächen, die die Halbebene E_2 erfüllen, soll in einem der eben genannten Stücke $\infty S_1, S_1 S_2, \dots$ an die Gerade g grenzen. Da die Schnittflächen konvexe polygonale Flächen sind, so können sie nicht in mehr als einem Stück an g grenzen.

Somit gibt es genau $n-2$ Schnittlinien s . Die Schnittflächen der Polyeder mit E sind in Fig. 4 der Reihe nach mit I, II, . . . $N-1, N$ bezeichnet.

Wir sehen nun für einen Augenblick von der Ebene E ab und betrachten die ursprüngliche Teilung \mathfrak{T}_n des Raumes in n Polyeder. Insbesondere betrachten wir die Ebene D und das System \mathfrak{S} von Schnittlinien, das auf D von den übrigen Begrenzungsflächen ausgeschnitten wird. Dabei interessieren uns vorzüglich diejenigen dieser Schnittlinien, welche die Gerade g schneiden. Die dadurch auf g erhaltenen Schnittpunkte können aber offenbar keine andern als die Punkte S_1, S_2, \dots, S_{n-2} sein und in jedem dieser Punkte kann nur eine dieser Schnittlinien die Gerade g schneiden. Es mögen diese Schnittlinien der Reihe nach mit t_1, t_2, \dots, t_{n-2} bezeichnet werden. Fassen wir speziell die Halbebene D_1 ins Auge, so wird dieselbe ein Bild wie Fig. 5 ergeben.

In den Punkten 1, 2, 3a) bis d) haben wir jene Voraussetzungen entwickelt und jene Bezeichnungen eingeführt, die es uns ermöglichen, folgenden Satz auszusprechen:

Wenn wir unsere Teilung \mathfrak{T}_n des Raumes in n Polyeder dahin abändern, daß wir die Ebene E als neue Begrenzungsfläche einführen, u. zw. so, daß im Halbraum e_1 die ursprünglichen Begrenzungsflächen erhalten bleiben, hingegen im Halbraum e_2 alle ursprünglichen Begrenzungsflächen getilgt werden, somit e_2 als 1-flach neu eingeführt wird, dann erhalten wir eine Teilung \mathfrak{T}_{n+1} des Raumes in $n+1$ Polyeder, die ebenso wie die Teilung \mathfrak{T}_n die Bedingungen 1., 2., 3 a), b), c), d) erfüllt.

Beweis: Auf Grund der Voraussetzung 3b) stoßen die n in e_1 liegenden Reste der ursprünglichen n Polyeder zu je zweien in Flächenstücken aneinander. Ferner grenzt auch das $(n+1)^{\text{te}}$ Polyeder, nämlich das 1-flach e_2 wegen 3a) an alle n vorhergenannten Polyeder unserer neuen Einteilung \mathfrak{T}_{n+1} . Somit ist für dieselbe 1. erfüllt.

Desgleichen ist 2. erfüllt, wobei an Stelle von D, d_1, d_2 die Gebilde \bar{E}, e_2, e_1 zu setzen sind.

Ferner wollen wir eine Ebene F konstruieren und von derselben dann nachweisen, daß sie in Bezug auf die Teilung \mathfrak{T}_{n+1} den Bedingungen entspricht, die in 3. von der Ebene E in Bezug auf die Teilung \mathfrak{T}_n gefordert wurden.

Hiezu konstruieren wir zunächst in der Ebene E eine Gerade h derart, daß h die sämtlichen Geraden $g, s_1, s_2, \dots, s_{n-2}$ im Endlichen in lauter verschiedenen Punkten $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-2}$ schneidet, daß ferner alle Punkte $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-2}$ in der Halbebene E_2 liegen, und daß auf jeder Geraden s_i ($i=1, 2, \dots, n-2$) zwischen S_i und Σ_i kein Schnittpunkt von s_i mit irgend einer anderen Geraden

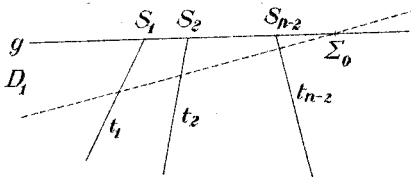


Fig. 5.

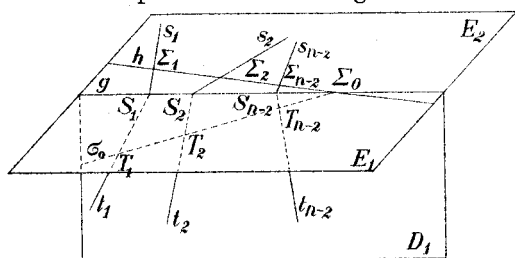


Fig. 6.

s liegt. Eine solche Gerade h läßt sich stets konstruieren; wir brauchen nur auf der Geraden g den Punkt Σ_0 entweder im Stück ∞S_1 oder $S_{n-2} \infty$ zu wählen (in den Fig. 4, 6 ist der letztere Fall dargestellt) und durch Σ_0 eine Gerade so zu ziehen, daß der in E_2 gelegene Halbstrahl mit $\Sigma_0 S_1$ einen genügend kleinen Winkel bildet.

In analoger Weise legen wir in der Ebene D eine von g verschiedene Gerade σ_0 durch Σ_0 derart, daß der in D_1 liegende Halbstrahl von σ_0 die Geraden t_1, t_2, \dots, t_{n-2} im Endlichen in lauter verschiedenen Punkten T_1, T_2, \dots, T_{n-2} schneidet und daß auf jeder der Geraden t_i ($i=1, 2, \dots, n-2$) zwischen S_i und T_i kein Schnittpunkt von t_i mit irgend einer Schnittlinie des auf S. 4 definierten Systems \mathcal{S} liegt (vgl. Fig. 5 und 6).

Die Ebene F legen wir nun durch die Geraden h, σ_0 . Die Schnittfigur der Ebene F mit den $(n+1)$ Polyedern und ihren Begrenzungsflächen veranschaulicht Fig. 7.

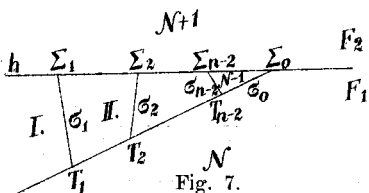


Fig. 7.

Daß Bedingung 3 a) für F zutrifft, ist evident. Wenn wir nun mit f_1, f_2 die beiden durch F gebildeten Halbräume bezeichnen, u. zw. mit f_2 denjenigen, in welchem S_1, S_2, \dots, S_{n-2} liegen, so genügt offenbar der Halbraum f_1 der in 3 b) von dem

Halbraum e_1 geforderten Bedingung.

Desgleichen ist 3 c) erfüllt, wobei $s_1, s_2, \dots, s_{n-2}; S_1, S_2, \dots, S_{n-2}$ durch $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}; \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-2}$ zu ersetzen sind.

Die beiden Halbebenen, in die F durch h zerlegt wird, mögen mit F_1, F_2 bezeichnet werden, je nachdem sie im Halbraum e_1 , bzw. e_2 liegen. Die Reste der n ursprünglichen Polyeder, die bei der neuen Einteilung \mathcal{T}_{n+1} des Raumes übrig bleiben, erfüllen den Halbraum e_1 ; ihre Schnittfiguren mit F liegen somit in F_1 . Dieselben grenzen (s. Fig. 7) sämtlich an die Gerade h , so daß auch die Bedingung 3 d) von der Ebene F erfüllt wird.

Der Satz von S. 5 ist also bewiesen. Da man nun eine Teilung \mathcal{T}_2 mit den verlangten Eigenschaften herstellen kann — man braucht nur den Raum durch eine Ebene in zwei Halbräume zu teilen, — so ist damit auch gezeigt, daß man den Raum in beliebig viele konvexe Polyeder teilen kann, die ein System von Nachbargebieten darstellen.