

## ZUR THEORIE DER ORTHOGONALEN DETERMINANTEN

VON

E. NETTO

in GIESSEN.

Nachdem im sechsten Bande der *Acta mathematica* S. 319—320 Herr T. J. STIELTJES vermutungsweise den Satz ausgesprochen hatte: *Bedeutend  $a_{x\lambda}$  und  $b_{x\lambda}$  ( $x, \lambda = 1, 2, \dots, n$ ) orthogonale Systeme von der Determinante  $+1$ , und verschwindet die Determinante  $|a_{x\lambda} + b_{x\lambda}|$ , so verschwinden mit ihr gleichzeitig auch alle ihre Subdeterminanten  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung*, habe ich die Richtigkeit desselben im neunten Bande S. 295—300 dargelegt. Ich komme hier auf denselben Satz zurück, weil der eben angeführte Beweis des Vorzuges entbehrt, das Theorem in der Form einer Identität wiederzugeben; weil ausserdem die Determinante  $|a_{x\lambda} + b_{x\lambda}|$  noch in interessanter Weise gedeutet werden kann; und weil ich endlich eine Erweiterung des STIELTJES'schen Satzes mit Hülfe einer Determinanten-Formel geben werde, die mir noch nicht bekannt zu sein scheint.

Diese Formel knüpft an den LAPLACE'schen Determinanten-Zerlegungssatz an. Es sei  $|c_{ik}| = C$  ( $i, k = 1, 2, \dots, \mu$ ) eine Determinante des Grades  $\mu = m_1 + m_2$ ; der Coefficient von  $c_{a\beta}$  in der Entwicklung von  $C$  werde mit  $C_{a\beta}$ , der Coefficient von  $c_{a\beta} \cdot c_{\gamma\delta}$  mit  $C_{a\beta, \gamma\delta}$  u. s. w. bezeichnet. Dann können wir das LAPLACE'sche Theorem so schreiben:

$$(1) \quad \sum_{(i)} C_{1^{i_1}, \dots, m_1^{i_{m_1}}} \cdot C_{m_1+1, i_{m_1+1}, \dots, \mu^{i_\mu}} = C.$$

Bedeutet nun, unter Beibehaltung der Bezeichnungen,  $C$  eine Determinante des Grades  $\nu$ , wobei  $\nu > \mu$  sein soll, dann ist

$$(2) \quad \sum_{(i)} C_{1i_1, \dots, m_1 i_{m_1}} \cdot C_{m_1+1, i_{m_1+1}, \dots, \mu i_{\mu}} = C \cdot C_{11, 22, \dots, \mu\mu},$$

falls die Summationen in der Formel (2) genau so weit wie in (1) ausgeführt werden, so dass also bis auf die Folge stets

$$i_1, i_2, \dots, i_{m_1}, i_{m_1+1}, \dots, i_{\mu} \quad \text{mit} \quad 1, 2, \dots, \mu$$

identisch ist.

Der Beweis für diese Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes ist einfach zu führen. Der Übersichtlichkeit halber gebe ich ihn nur für den Fall  $m_1 = m_2 = 2$ ;  $\mu = 4$ ;  $\nu = 6$  wobei der Satz dann

$$(3) \quad C_{11,22} C_{33,44} + C_{12,23} C_{31,44} + C_{13,21} C_{32,44} + C_{13,24} C_{31,42} + C_{11,24} C_{32,43} + C_{12,24} C_{33,41} \\ = C \cdot C_{11,22,33,44}$$

lautet. Entwickelt man die Determinante 8<sup>ter</sup> Ordnung

$$\begin{vmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 & c_{25} & c_{26} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & 0 & 0 & c_{65} & c_{66} \end{vmatrix}$$

nach dem LAPLACE'schen Satze in die Summe von Producten aus Determinanten der vier ersten und der vier letzten Zeilen, dann entsteht die linke Seite der obigen Formel (3). Eine leichte Umformung führt die aufgestellte Determinante in die Gestalt



und ebenso erhält man umgekehrt durch Multiplication die Determinanten-  
beziehung

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \begin{vmatrix} \Sigma a_{1x} b_{1x} + 1, & \Sigma a_{1x} b_{2x} & , \dots, & U_{11}, \dots, & U_{1k} \\ \Sigma a_{2x} b_{1x} & , & \Sigma a_{2x} b_{2x} + 1, & \dots, & U_{21}, \dots, & U_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & u_{11} & , & u_{12} & , \dots, & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & u_{k1} & , & u_{k2} & , \dots, & 0, \dots, 0 \end{vmatrix} \\
 & \cdot \begin{vmatrix} b_{11}, \dots, b_{1n}, 0, 0, 0, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}, \dots, b_{nn}, 0, 0, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 0, 0, 1, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}, \dots, a_{1n} + b_{1n}, \dots, U_{11}, \dots, U_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1}, \dots, a_{nn} + b_{nn}, \dots, U_{n1}, \dots, U_{nk} \\ \Sigma u_{1k} b_{1k}, \dots, \Sigma u_{1k} b_{nk}, \dots, 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma u_{nk} b_{1k}, \dots, \Sigma u_{nk} b_{nk}, \dots, 0, \dots, 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Da die Determinante der  $b_{x\lambda}$  den Werth  $\pm 1$  besitzt, so folgt aus den beiden Gleichungen (4), (5), dass das System der  $k^{\text{ten}}$  Subdeterminanten von  $|a_{x\lambda} + b_{x\lambda}|$  ganz, linear und homogen durch dasjenige der  $k^{\text{ten}}$  Subdeterminanten von  $|\sum_x a_{\lambda x} b_{\mu x} + \varepsilon_{\lambda\mu}|$  darstellbar ist, und umgekehrt jenes durch dieses. Hier bedeutet  $\varepsilon_{\lambda\mu}$  wie gewöhnlich 0 oder 1, je nachdem  $\mu$  von  $\lambda$  verschieden oder gleich  $\lambda$  ist. Der Satz gilt natürlich auch für  $k = 0$ .

Mit den  $a_{\lambda\mu}$  und  $b_{\lambda\mu}$  bildet bekanntlich auch  $\sum_x a_{\lambda x} b_{\mu x}$  gleichzeitig ein orthogonales System, und wenn  $|a_{x\lambda}| = |b_{x\lambda}| = 1$  ist, so ist auch die De-

terminante von  $\sum_x a_{\lambda x} b_{\mu x}$  gleich 1. Bezeichnen wir dieses neue, compo-  
nirte System durch  $c_{\lambda\mu}$ , so sagt der STIELTJES'sche Satz, dass mit der  
Determinante  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $|c_{\lambda\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu}|$  auch alle ihre Subdeterminanten  
( $n - 1$ )<sup>ter</sup> Ordnung verschwinden.

Bedeutet also  $c_{\lambda\mu}$  ein beliebiges orthogonales System mit der De-  
terminante  $+1$ , so ist der STIELTJES'sche Satz zugleich eine Verall-  
gemeinerung und ein Specialfall des folgenden: *Mit der Determinante*  
 $|c_{x\lambda} + \varepsilon_{x\lambda}|$  *verschwinden zugleich alle ihre Subdeterminanten* ( $n - 1$ )<sup>ter</sup> *Ord-*  
*nung, wenn*  $c_{x\lambda}$  *ein orthogonales System mit der Determinante*  $D = +1$  *bedeutet.*

Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir, ohne zunächst über das  
Vorzeichen von  $D = |c_{x\lambda}|$  etwas festzusetzen,  $|c_{x\lambda} + \varepsilon_{x\lambda}|$  nebst ihren Sub-  
determinanten durch  $\Delta, \Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta}, \dots$ . Dann folgen aus den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} c_{11} + 1, c_{21}, \dots, & c_{n1} \\ \dots & \dots \\ c_{1n}, c_{2n}, \dots, & c_{nn} + 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} + 1, c_{12}, \dots, & c_{1n} \\ \dots & \dots \\ c_{n1}, c_{2n}, \dots, & c_{nn} + 1 \end{vmatrix}$$

bezw.

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots \\ c_{12}, c_{22} + 1, & c_{32}, & \dots \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33} + 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots \\ c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots \\ c_{31}, c_{32}, c_{33}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} c_{11} + 1 - 1, & c_{12}, & c_{13}, & \dots \\ c_{21}, & c_{22} + 1, & c_{23}, & \dots \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33} + 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} c_{11} + 1, & c_{12}, & c_{13}, \dots \\ c_{21}, & c_{22} + 1, & c_{23}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{22} + 1, & c_{23}, & \dots \\ c_{32}, & c_{33} + 1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die Relationen

$$(6) \quad \Delta D = \Delta,$$

bezw.

$$\Delta_{11}(I + D) = \Delta$$

oder statt der letzteren allgemeiner

$$(7) \quad \Delta_{xx}(I + D) = \Delta.$$

Ebenso liefert

$$\begin{vmatrix} c_{11} + I, c_{21}, & c_{31}, & c_{41}, & \dots \\ I, & O, & O, & O, \dots \\ c_{13}, & c_{23}, c_{33} + I, & c_{43}, & \dots \\ c_{14}, & c_{24}, & c_{34}, & c_{44} + I, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}, c_{12}, \dots \\ c_{21}, c_{22}, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} c_{11} + I, & c_{12}, & c_{13}, & \dots \\ c_{11} + I - I, & c_{12}, & c_{13}, & \dots \\ c_{31}, & c_{32}, c_{33} + I, & \dots \\ c_{41}, & c_{42}, & c_{43}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die Relation

$$\Delta_{12}D = -\Delta_{21}$$

oder ebenso allgemeiner

$$(8) \quad \Delta_{x\lambda}D = -\Delta_{\lambda x}. \quad (\lambda \neq x)$$

Die angegebene Methode führt in derselben Weise auf weitere Gleichungen, deren Bildungsgesetz durch die folgenden Resultate leicht erkannt wird. Es ist

$$\begin{aligned}
D\Delta &= \Delta, \\
D\Delta_{xx} &= \Delta - \Delta_{xx}, \\
D\Delta_{x\lambda} &= -\Delta_{\lambda x}, \\
D\Delta_{xx,\lambda\lambda} &= \Delta - (\Delta_{xx} + \Delta_{\lambda\lambda}) + \Delta_{xx,\lambda\lambda}, \\
D\Delta_{xx,\lambda\mu} &= -\Delta_{\mu\lambda} + \Delta_{xx,\mu\lambda}, \\
(9) \quad D\Delta_{x\lambda,\mu\nu} &= \Delta_{\lambda x,\nu\mu}, \\
D\Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu} &= \Delta - (\Delta_{xx} + \Delta_{\lambda\lambda} + \Delta_{\mu\mu}) + (\Delta_{\lambda\lambda,\mu\mu} + \Delta_{xx,\mu\mu} + \Delta_{xx,\lambda\lambda}) \\
&\quad - \Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu}, \\
D\Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\nu} &= -\Delta_{\nu\mu} + (\Delta_{xx,\nu\mu} + \Delta_{\lambda\lambda,\nu\mu}) - \Delta_{xx,\lambda\lambda,\nu\mu}, \\
D\Delta_{xx,\lambda\mu,\nu\rho} &= \Delta_{\mu\lambda,\rho\nu} - \Delta_{xx,\mu\lambda,\rho\nu}, \\
D\Delta_{x\lambda,\mu\nu,\rho\sigma} &= -\Delta_{\lambda x,\nu\mu,\rho\sigma}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Hier bedeuten  $x, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$  von einander verschiedene Zahlen.

Aus den erhaltenen Gleichungen wollen wir nun die auf unser Theorem bezüglichen Schlüsse ziehen. Wir hatten  $D = 1$  und  $\Delta = 0$  vorausgesetzt. Dann zeigt (7) sofort, dass alle  $\Delta_{xx}$  verschwinden, und zwar liegt dieses Resultat in der Form einer identischen Gleichung vor. Multiplicirt man ferner die bekannte Relation, die übrigens auch aus (2) entnommen werden kann,

$$\Delta_{xx}\Delta_{\lambda\lambda} - \Delta_{x\lambda}\Delta_{\lambda x} = \Delta \cdot \Delta_{xx,\lambda\lambda}$$

mit  $(1 + D)^2$  und trägt in das Product die Resultate (6) und (7) ein, so folgt

$$(10) \quad \Delta_{x\lambda}^2 D(1 + D)^2 = \Delta \{ (1 + D)^2 \Delta_{xx,\lambda\lambda} - \Delta \}$$

oder auch

$$(10') \quad \Delta_{\lambda\lambda}^2(1 + D)^2 = \Delta\{2(1 + D)\Delta_{xx,\lambda\lambda} - \Delta\}$$

oder endlich mit Hülfe von (9)

$$(10'') \quad \Delta_{\lambda\lambda}^2(1 + D)^2 = \Delta\{\Delta - 2\Delta_{xx} - 2\Delta_{\lambda\lambda} + 4\Delta_{xx,\lambda\lambda}\}.$$

Durch jede der Gleichungen (10) ist der noch übrige Teil des STIELTJES'schen Satzes in unserer Form mit Hülfe identischer Gleichungen ausgedrückt; denn es wird klargelegt, dass bei  $\Delta = 0$ ,  $D = +1$  alle  $\Delta_{\lambda\lambda}$  verschwinden müssen. Will man auch die Voraussetzung der Orthogonalität in die Formel selbst aufnehmen, so reicht es aus, nach KRONECKER'scher Art zu schreiben:

$$\Delta_{xx}(1 + D) \equiv \Delta,$$

$$\Delta_{\lambda\lambda}^2(1 + D)^2 \equiv \Delta\{2(1 + D)\Delta_{xx,\lambda\lambda} - \Delta\},$$

$$(\text{modd. } c_{a1}c_{\beta 1} + \dots + c_{an}c_{\beta n} - \varepsilon_{a,\beta}). \quad (a, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

Wir können aus den aufgestellten Formeln noch weitere Schlüsse ziehen. Wir wollen voraussetzen, dass  $D = -1$  sei. Dann muss wegen (6) die Determinante  $\Delta = 0$  werden; wir wollen weiter annehmen, dass auch noch die Subdeterminanten  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung von  $\Delta$  verschwinden. Dann liefert (9) die 3 Gleichungen

$$-\Delta_{xx,\lambda\lambda} = +\Delta_{xx,\lambda\lambda},$$

$$-\Delta_{xx,\lambda\mu} = +\Delta_{xx,\mu\lambda},$$

$$-\Delta_{x\lambda,\mu\nu} = +\Delta_{\lambda x,\nu\mu},$$

deren erster wir das Resultat  $\Delta_{xx,\lambda\lambda} = 0$  entnehmen. Die zweite liefert wegen der schon einmal benutzten Beziehung

$$\Delta_{xx,\lambda\lambda}\Delta_{xx,\mu\mu} - \Delta_{xx,\lambda\mu}\Delta_{xx,\mu\lambda} = \Delta_{x\lambda}\Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu}$$

in gleicher Weise  $\Delta_{xx,\lambda\mu} = 0$ . Es erscheint wahrscheinlich, dass auch alle  $\Delta_{x\lambda,\mu\nu}$  verschwinden. Um diese Vermutung belegen zu können, greifen



wir auf die in der Einleitung gegebenen Formeln zurück und benutzen hier (3) in der Gestalt

$$(11) \quad \Delta_{xx,\lambda\lambda} \Delta_{\mu\mu,\nu\nu} + \Delta_{x\lambda,\lambda\mu} \Delta_{\mu x,\nu\nu} + \Delta_{x\mu,\lambda x} \Delta_{\mu\lambda,\nu\nu} + \Delta_{x\mu,\lambda\nu} \Delta_{\mu x,\nu\lambda} \\ + \Delta_{xx,\lambda\nu} \Delta_{\mu\lambda,\nu\mu} + \Delta_{x\lambda,\lambda\nu} \Delta_{\mu\mu,\nu x} = \Delta \Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu,\nu\nu}.$$

Da man in jedem  $\Delta_{a\beta,\gamma\delta}$  die ersten Indices  $\alpha, \gamma$  oder die zweiten  $\beta, \delta$  unter einander vertauschen kann, so bleibt links nach den bereits erhaltenen Resultaten wegen  $\Delta_{xx,\lambda\lambda} = 0$  und  $\Delta_{xx,\lambda\mu} = 0$  nur ein nicht verschwindendes Glied, nämlich

$$\Delta_{x\mu,\lambda\nu} \Delta_{\mu x,\nu\lambda} = - \Delta_{x\mu,\lambda\nu}^2$$

zurück; und weil die rechte Seite wegen  $\Delta = 0$  verschwindet, so muss auch  $\Delta_{x\mu,\lambda\nu}$  zu Null werden. Es zeigt sich also: Ist  $D = -1$ , dann muss  $\Delta = 0$  sein; wenn auch alle Subdeterminanten  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung von  $\Delta$  verschwinden, so verschwinden gleichzeitig auch alle Subdeterminanten  $(n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung.

Die Richtung, in welcher die weiteren Resultate zu suchen sind, ist jetzt ersichtlich: Wir nehmen zunächst  $D = +1$ ,  $\Delta = 0$  und alle  $\Delta_{a\beta,\gamma\delta}$  bei gleichen oder ungleichen Indices  $= 0$ . Dann giebt (9)

$$\Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu} = - \Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\mu}, \\ \Delta_{xx,\lambda\lambda,\mu\nu} = - \Delta_{xx,\lambda\lambda,\nu\mu}, \\ \Delta_{xx,\lambda\mu,\nu\rho} = - \Delta_{xx,\mu\lambda,\rho\nu}, \\ \Delta_{x\lambda,\mu\nu,\rho\sigma} = - \Delta_{\lambda x,\nu\mu,\sigma\rho}.$$

Hier folgt das Verschwinden der drei ersten Arten von Subdeterminanten durch die bereits zweimal besprochene Schlussführung. Für die letzte Art reicht es aus, auf (2) zurückzugreifen, darin  $m_1 = m_2 = 3$  zu setzen, und die erweiterte LAPLACE'sche Formel mit dem Anfangsgliede  $\Delta_{xx,\mu\mu,\rho\rho} \Delta_{\lambda\lambda,\nu\nu,\sigma\sigma}$  aufzustellen; auf deren linker Seite bleibt alsdann nur  $\Delta_{x\lambda,\mu\nu,\rho\sigma} \Delta_{\lambda x,\nu\mu,\sigma\rho}$  von Null verschieden. Daraus folgt das erwartete Ergebnis.

Das allgemeine Resultat unserer Untersuchungen ist also das folgende: Je nachdem  $D = +1$  oder  $= -1$  ist, sind die ersten nicht sämtlich verschwindenden Subdeterminanten von  $\Delta$  von der Ordnung  $(n-2m)$  bzw.  $(n-2m-1)$ , wobei  $m$  eine positive Zahl oder die Null bedeutet.

Endlich möge noch erwähnt werden, dass, wenn man in (4) und (5) für die  $a_{x\lambda}$  das Einheitssystem einführt, eine Reihe von Beziehungen zwischen den Subdeterminanten von  $\Delta$  sich ergibt. So findet man z. B. für  $k = 1$

$$|c_{x\lambda}| \Delta_{a\beta} = \sum_x \Delta_{ax} c_{x\beta}.$$

Giessen d. 19. Mai 1894.

---