18.

Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Montjoie.)

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ohne zweiten Theil zwischen y und der unabhängigen Veränderlichen x hat bekanntlich stets n Integrale y_1, y_2, .. y_n, der Beschaffenheit, dafs es unmöglich ist, n Constanten a_1, a_2, .. a_n zu bestimmen, welche den Ausdruck:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n = H$$

identisch zu Null machen, ohne dafs zu gleicher Zeit alle diese Constanten verschwinden; es ist in diesem Falle H das complete Integral jener Differentialgleichung. Läfst sich dagegen H durch constante Werthe von a_1, a_2, .. a_n, die alle oder zum Theil von Null verschieden sind, zum Verschwinden bringen, so reichen die Functionen y_1, y_2, .. y_n zur Darstellung des completen Integrals nicht aus. — Ganz ähnliche Verhältnisse finden bei den linearen Differenzengleichungen statt.

Hat man demnach n Integrale einer solchen Gleichung gefunden, so mufs man untersuchen, ob zwischen denselben eine lineare homogene Relation existirt, oder nicht, ob man also aus ihnen das complete, oder nur ein partikulares Integral zusammensetzen kann. Die Entscheidung dieser Frage hängt von analytischen Kriterien ab, welche im Folgenden hergeleitet werden sollen.

Wenn ferner durch die Anwendung dieser Kriterien gefunden ist, dafs zwischen gegebenen Functionen eine lineare homogene Relation besteht, so kann man verlangen, dafs dieselbe wirklich aufgestellt werde. Dabei zeigt es sich, dafs die Werthe der Coefficienten, mit welchen die einzelnen Functionen in dieser Relation behaftet sind, im Allgemeinen von den Grenzen abhängen, zwischen denen die unabhängige Veränderliche liegt, und für andere Grenzen ganz verschieden ausfallen. Die folgende Untersuchung wird lehren, dafs auch die Bestimmung dieser Grenzen nach allgemeinen Prinzipien von Statten geht, so dafs für die beiden Hauptfragen, auf welche man auf diesem Gebiete stöfst, leitende Grundsätze vorhanden sind.

Um die zu dieser Untersuchung erforderlichen Unterscheidungen treffen zu können, ist es nothwendig, den Begriff der Function in folgender Weise zu erweitern.

Es bezeichne x eine Veränderliche, welche *jeden reellen Werth* annehmen kann, m eine zweite Veränderliche, welche *nur positive und negative ganzzahlige Werthe* annimmt. Ist nun eine Function $f(x)$ zwischen den willkürlichen reellen Grenzen a und b gegeben, so stellt die Gleichung $y=f(x)$ eine Curve dar, welche von $x=a$ bis $x=b$ in gegebener Weise verläuft. Die Gleichung $y=f(m)$ dagegen stellt vermöge der über m getroffenen Bestimmung ein System von Punkten dar, deren Abscissen die zwischen den Grenzen a und b enthaltenen ganzen Zahlen sind. Sowie nun $f(x)$ eine Function von x ist, weil es für jedes zwischen a und b liegende x einen bestimmten Werth hat, so ist $f(m)$ eine Function von m, weil es für jedes zwischen a und b liegende m einen bestimmten Werth hat. Da man aber durch jenes System von Punkten beliebig viele unter einander nicht im Mindesten verwandte Curven $y=f_1(x)$ legen kann, so dafs, für jedes zwischen a und b liegende m, $f_1(m)=f(m)$ ist, so sieht man, dafs die Natur dieses Systems von Punkten, nämlich die Function $f(m)$ ganz unabhängig ist von den Werthen, welche $f(x)$ für die nicht ganzzahligen Abscissen annimmt. Man mufs also bei der Definition der Function von m die Vorstellung, dafs sie in einem Ausdrucke enthalten sei, der auch für nicht ganzzahlige Werthe der Veränderlichen gewisse Werthe hat, als ganz unwesentlich fallen lassen, und sich diese Function entweder graphisch durch ein auf bestimmte Axen bezogenes System von Punkten, oder was genau dasselbe ist, numerisch durch eine Tabelle gegeben denken, in welcher die eine Colonne diejenigen Werthe enthält, welche m annehmen kann, während die andere Colonne jedesmal den zugehörigen Functionalwerth liefert.

Da nach dem Gesagten unzählig viele Functionen von x dieselbe Function von m enthalten, so kann durch eine Function von m ohne Hinzufügung weiterer Bedingungen keine einzige Function von x bestimmt sein. Aber es ist wesentlich zu bemerken, dafs man von den Functionen von m zu den Functionen von x übergehen kann. Hängt nämlich $f(m)$ noch von einer willkürlichen Constanten ε in der Weise ab, dafs $f(m)=F(m\varepsilon)$ ist, wo ε nicht anders als in der Verbindung $m\varepsilon$ vorkommt, so setze man $m\varepsilon=x$; dann entspricht der Aenderung von m um eine Einheit die von x um ε, d. h. um eine Gröfse, welche vermöge ihrer Willkürlichkeit auf jeden Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

Auf dieselbe Art, wie die Functionen von m, lassen sich auch Functionen einer Veränderlichen m' definiren, welche sich nicht mehr wie m um constante, sondern um ganz beliebige Differenzen ändert. Aber da die Werthe, welche m' annehmen kann, eine bestimmte Aufeinanderfolge zeigen, so kann man m', und folglich auch jede Function von m' als Function von m betrachten.

Sind $n+1$ Functionen von m gegeben, $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$, so kann man stets eine lineare homogene Relation $Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m)=0$ aufstellen, in welcher mindestens einer der Coefficienten A, A_1, .. A_n von Null verschieden ist, und welche für bestimmte n aufeinanderfolgende Werthe von m, etwa für $m=m_0$, m_0+1, .. m_0+n-1 gültig ist. In dem besondern Falle, wo diese nämliche Relation auch noch für die Werthe $m=m_0-1$, m_0-2, .. m_0-q; m_0+n, m_0+n+1, .. m_0+n+p stattfindet, nenne ich die Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ ***linearabhängig für die Werthe*** $m=m_0-q$, m_0-q+1, .. m_0+n+p. Die Anzahl der Werthe von m, für welche gegebene Functionen von m linearabhängig sind, kann demnach nie kleiner sein, als die Anzahl der Functionen. Es ist nach dem Vorangeschickten kaum nöthig zu bemerken, dafs die Eigenschaft der Linearabhängigkeit sich nicht auf die Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ bezieht, in welchen jene enthalten sind, sondern nur auf die besondern Werthe, welche diese Functionen für die angegebenen ganzzahligen Werthe von x annehmen. — Sind die gegebenen Functionen in den Intervallen $m=m'$, $m'+1$, .. $m''-1$; $m=m''$, $m''+1$, .. $m'''-1$; ... $m=m^i$, m^i+1, .. m^k-1 linearabhängig, während die Relationen, durch welche diese Abhängigkeit ausgedrückt wird, in den einzelnen Intervallen verschieden sind, so nenne ich die Functionen wieder linearabhängig für die Werthe $m=m'$, $m'+1$, .. m^k-1.

Wenn die gegebenen Functionen in einem bestimmten Intervall den Bedingungen der Linearabhängigkeit nicht genügen, so nenne ich sie ***linearunabhängig für die in jenem Intervall enthaltenen Werthe von*** m.

Es ist nach dem oben Angedeuteten einleuchtend, wie diese Definitionen auf den Fall einer continuirlichen Veränderlichen x übertragen werden. Will man dieselben benutzen, um zu untersuchen, ob und innerhalb welcher Grenzen die Functionen $f(m)$, $f_1(m)$, .. $f_n(m)$ linearabhängig sind, so mufs man zunächst die Coefficienten A, A_1, .. A_n so bestimmen, dafs die Gleichung

$Af(m)+A_1 f_1(m)+\cdots+A_n f_n(m)=0$ für $m=m_0,\ m_0+1,\ \ldots\ m_0+n-1$ stattfindet, wo m_0 irgend einen besondern Werth von m vorstellt. Ist dies geschehen, so mufs man versuchen, ob diese Gleichung auch noch für einen der Werthe $m=m_0-1,\ m_0+n$ besteht, und wenn eins von beiden der Fall ist, weiter versuchen, ob sie auch noch für folgende Werthe von m gültig bleibt. Man gelangt alsdann von selbst zu den Grenzen, innerhalb derer die Linearabhängigkeit stattfindet. Besteht diese Relation aber nicht mehr für $m=m_0-1,\ m_0+n$, so mufs man die Coefficienten $A,\ A_1,\ \ldots\ A_n$ von Neuem für einen andern Werth von m_0 bestimmen, und dasselbe Verfahren wiederholen. Um dieses grade in den wichtigsten Fällen unbrauchbare Verfahren überflüssig zu machen, dienen die im Folgenden zu entwickelnden Kriterien für die Linearabhängigkeit der Functionen von m.

1.

Seien $n+1$ Functionen $f(m),\ f_1(m),\ \ldots\ f_n(m)$ gegeben, welche für die Werthe $m=m_0,\ m_0+1,\ \ldots\ m_0+n+p$ linearabhängig sind. Dann mufs $p \geqq 0$ sein. Es sind nun drei Fälle möglich:

1) entweder besteht zwischen diesen Functionen nur eine einzige lineare homogene Relation, welche für alle jene Werthe von m gültig ist;

2) oder es bestehen mehrere dieser Relationen, für die nämlichen Werthe von m;

3) oder endlich zerfällt jene Reihe von Werthen in $q+r$ Intervalle (deren jedes aus mehr als n Werthen besteht) von zweierlei Art, so dafs in den q Intervallen der ersten Art eine einzige lineare homogene Relation existirt, während in den r Intervallen der zweiten Art die gegebenen Functionen durch mehr als eine dieser Relationen mit einander verbunden sind. Hierin ist der Fall mitbegriffen, wo eine der Zahlen q oder r gleich Null ist.

Im ersten Falle hat man, wenn m einen der Werthe $m_0,\ m_0+1,\ \ldots\ m_0+p$ bedeutet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &Af(m)+A_1 f_1(m)+\cdots+A_n f_n(m)=0,\\ &Af(m+1)+A_1 f_1(m+1)+\cdots+A_n f_n(m+1)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &Af(m+n)+A_1 f_1(m+n)+\cdots+A_n f_n(m+n)=0.\end{aligned}$$

Setzt man demnach:

$$(1.)\qquad \Sigma \pm f(m) f_1(m+1) \ldots f_n(m+n) = \Delta(m),$$

$$(2.)\qquad \frac{\partial \Delta(m)}{\partial f_\mu(m+n)} = \Delta_\mu(m),$$

so folgt aus den n ersten jener Gleichungen für ein unbestimmtes ω:

$$(3.)\qquad A_\mu = \omega\, \Delta_\mu(m).$$

Da nun der Voraussetzung gemäfs wenigstens einer der Coefficienten A_μ von Null verschieden ist, so folgt, *dafs in unserm Falle wenigstens eine der Gröfsen $\Delta_\mu(m)$ für jedes der Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p+1 angehörige m von Null verschieden ist, während die Determinante $\Delta(m)$ für die Werthe $m=m_0$, m_0+1, .. m_0+p verschwindet.*

Im zweiten Falle hat man für jedes der Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p+n angehörige m wenigstens zwei von einander unabhängige Relationen:

$$Af(m)+A_1 f_1(m)+\cdots+A_n f_n(m) = 0,$$
$$Bf(m)+B_1 f_1(m)+\cdots+B_n f_n(m) = 0,$$

woraus wiederum für die Werthe $m=m_0$, m_0+1, .. m_0+p die Gleichung $\Delta(m)=0$ folgt. Da aber der Voraussetzung gemäfs die Quotienten $\frac{B}{A}$, $\frac{B_1}{A_1}$, .. $\frac{B_n}{A_n}$ wenigstens zum Theil von einander verschieden sind, so erhält man, wenn aus beiden Gleichungen eine der Functionen f_μ eliminirt wird, stets eine Relation derselben Art zwischen den übrigen Functionen, in welcher wenigstens ein Coefficient von Null verschieden ist. Daraus folgt, *dafs man in diesem Falle nothwendig die Gleichungen $\Delta_\mu(m)=0$ hat,* wo μ jede der Zahlen $0, 1, \ldots n$, und m einen beliebigen der Werthe m_0, m_0+1, .. m_0+p+1 vorstellt. Bestehen mehr als zwei Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander, so erhält man aufser den Gleichungen $\Delta(m)=0$, $\Delta_\mu(m)=0$ noch weitere Formeln, welche für unsern Zweck jedoch kein näheres Interesse haben.

Was *den dritten Fall* betrifft, so sieht man leicht, dafs wenn alle in den unentwickelten Determinanten $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ vorkommenden Argumente demselben Intervall angehören, sich die in den beiden ersten Fällen gegebenen Erörterungen mit den nöthigen Modificationen wörtlich wiederholen lassen. Liegen diese Argumente dagegen in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, so lassen sich in Bezug auf die in diesen Intervallen stattfindenden Relationen sehr verschiedene Voraussetzungen machen, von denen hier nur eine einzige discutirt werden soll. Nimmt man an, dafs von den linearen Relationen, welche in den einzelnen Intervallen stattfinden, keine auch im andern gültig ist, so kann man augenscheinlich aus diesen Relationen keine allgemeingültigen Gleichungen herleiten, in welchen aus beiden Intervallen bestimmte Functionalwerthe, aber aufser diesen keine andern Gröfsen mehr vorkommen. ***Man kann daher über den Werth von $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ im Allgemeinen gar nichts festsetzen, sobald die in ihnen vorkommenden Argumente verschiedenen Intervallen angehören; liegen dagegen diese Argumente in demselben Intervall, so ist auf jeden Fall $\Delta(m) = 0$, und es sind aufserdem alle $\Delta_\mu(m)$ gleich Null, oder wenigstens ein Theil derselben von Null verschieden, jenachdem das Intervall von der zweiten oder der ersten Art ist.*** Die Anzahl der Werthe von m, für welche die in $\Delta(m)$ vorkommenden Argumente zwei aufeinanderfolgenden Intervallen angehören können, ist gleich n, und kann diese Zahl nicht übersteigen, da jedes Intervall mehr als n Argumente umfafst. ***Sind daher $n+1$ Functionen linearabhängig, so kann es vorkommen, dafs n, aber nicht mehr aufeinanderfolgende Werthe ihrer Determinante $\Delta(m)$ von Null verschieden sind. Ist umgekehrt $\Delta(m)$ für mehr als n aufeinanderfolgende Werthe von m von Null verschieden, so können jene Functionen nicht für alle Werthe von m linearabhängig sein.***

2.

Ich gehe jetzt von der Voraussetzung aus, dafs $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \ldots m_0+p$ verschwindet, dagegen für die Werthe $m = m_0-1$, m_0+p+1 von Null verschieden ist. Dann gilt der Satz, ***dafs die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ für die Werthe $m = m_0, m_0+1, \ldots m_0+p+n$ linearabhängig sind.***

Es soll zunächst bewiesen werden, dafs dieser Satz für $n+1$ Functionen gilt, wenn er für n Functionen stattfindet. Setzt man:

$$(1.)\qquad \varphi(m) = Af(m) + A_1 f_1(m) + \cdots + A_n f_n(m),$$

und nimmt für die Coefficienten $A, A_1, \ldots A_n$ bestimmte Zahlen, welche den Gleichungen:

$$(2.)\qquad \varphi(m') = 0, \quad \varphi(m'+1) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(m'+n-1) = 0$$

genügen, wo m' irgend einen besondern Werth von m bedeutet, so erhält man aus den Gleichungen (2.) und einer der folgenden:

$$Af(m'-1) + A_1 f_1(m'-1) + \cdots + A_n f_n(m'-1) = \varphi(m'-1),$$
$$Af(m'+n) + A_1 f_1(m'+n) + \cdots + A_n f_n(m'+n) = \varphi(m'+n),$$

die Gleichungen:

$$(3.)\qquad A_\mu \Delta(m'-1) = (-1)^n \varphi(m'-1)\Delta_\mu(m'),$$
$$(4.)\qquad A_\mu \Delta(m') = \varphi(m'+n)\Delta_\mu(m').$$

Ist nun m' eine der Zahlen m_0, m_0+1, .. m_0+p, so verschwindet in (4.) der Voraussetzung zufolge die linke Seite, und man hat:

$$(5.)\qquad \varphi(m'+n)\Delta_\mu(m') = 0,$$

so dafs entweder $\varphi(m'+n)=0$ ist, oder sämmtliche $\Delta_\mu(m')$ verschwinden. Es zerfällt daher im Allgemeinen die Reihe m_0, m_0+1, .. m_0+p in Intervalle von zweierlei Art; in denen der ersten Art ist wenigstens eine der Gröfsen $\Delta_\mu(m')$ von Null verschieden, und es sind daher, wie behauptet, die Functionen f, f_1, .. f_n in diesem Intervall linearabhängig. In den Intervallen der zweiten Art, in welchen man die $n+1$ Relationen $\Delta_\mu(m')=0$ hat, sind je n der gegebenen Functionen linearabhängig vermöge der Voraussetzung, dafs obiger Satz für n Functionen gültig sei. In der That haben die Determinanten $\Delta_\mu(m)$ dieselbe Form wie $\Delta(m)$, während sie eine Function weniger enthalten.

In einem Intervall der ersten Art kann nur eine einzige lineare homogene Relation zwischen den gegebenen Functionen stattfinden; in einem der zweiten Art dagegen bestehen in Folge der gemachten Voraussetzungen $n+1$ Relationen, deren jede von einer Function frei ist. Eine Anzahl von $n+1$ Relationen dieser Form kann sich nicht aus einer einzigen Relation herleiten lassen, ***es bestehen daher in den Intervallen der zweiten Art mindestens zwei lineare Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander.***

Da $\Delta(m_0-1)=(-1)^n\{f(m_0-1)\Delta_0(m_0)+f_1(m_0-1)\Delta_1(m_0)+\cdots\}$ von Null verschieden ist, so mufs von den Gröfsen $\Delta_\mu(m_0)$, also auch von den zu ihnen proportionalen Gröfsen A_μ, eine wenigstens von Null verschieden sein. Die Werthe m_0, m_0+1, .. m_0+n gehören also zu einem Intervall der ersten Art, in welchem nur eine einzige Relation $\varphi(m)=0$ stattfindet; und diese Gleichung kann wegen (3.) nicht auch für den Werth $m=m_0-1$ bestehen. — Gehört ferner der Werth m_0+p zu einem Intervall der ersten Art, so besteht die in demselben stattfindende lineare Relation wegen (4.) auch für den Werth $m'=m_0+p+n$, während sie unmöglich für den folgenden Werth von m' stattfinden kann. Liegt jener Werth in einem Intervall der zweiten Art, so hat man der Voraussetzung gemäfs mindestens zwei von einander unabhängige lineare Relationen $\psi(m)=0$, $\chi(m)=0$, welche für die Werthe $m_0+p+n-1$, $m_0+p+n-2$, .. stattfinden. Für dieselben Werthe besteht also auch die Relation $\alpha\psi(m)+\beta\chi(m)=0$, in welcher man die Zahlen α und β so bestimmen kann, dafs dieselbe auch für $m=m_0+p+n$

stattfindet. Auch diese Relation kann unmöglich für $m = m_0 + p + n + 1$ stattfinden, wie man leicht sieht, wenn man in (4.) $m' = m_0 + p + 1$ setzt.

Es bleibt nur noch übrig, obigen Satz für zwei Functionen nachzuweisen, da er alsdann auf jede Anzahl von Functionen ausgedehnt werden kann. Dieser Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Vorangehenden, da nämlich in unserm Falle $\Delta_0(m) = -f_1(m)$, $\Delta_1(m) = f(m)$ ist, so besteht in den Intervallen der zweiten Art jede beliebige lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, während für die Intervalle der ersten Art die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen bereits nachgewiesen ist. Auch wiederholen sich die Bemerkungen, durch welche die Grenzen nachgewiesen wurden, innerhalb deren die Linearabhängigkeit nothwendig stattfindet.

Aus diesen Beweisen ergeben sich nun weiter folgende Sätze:

1) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(m), f_1(m), \ldots f_n(m)$ für alle Werthe von m linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend, dafs ihre Determinante $\Delta(m)$ für alle Werthe von m von Null verschieden ist.

2) Ist die Anzahl aufeinanderfolgender Werthe von m, für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, nie gröfser als n, so sind die Functionen $f(m)$, $f_1(m), \ldots f_n(m)$ für alle Werthe von m linearabhängig.

An diese Sätze, welche in Verbindung mit den im Anfange bewiesenen die vollständigen Kriterien für die Linearabhängigkeit oder Unabhängigkeit gegebener Functionen enthalten, schliefsen sich folgende Bemerkungen, die zur Bestimmung der Grenzen dienen, innerhalb welcher die Linearabhängigkeit im Allgemeinen durch verschiedene lineare Relationen ausgedrückt wird.

3) Sind zwei Intervalle, in welchen $\Delta(m)$ verschwindet, durch n oder weniger Werthe von m getrennt, für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, so kann keine lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, welche in dem einen Statt findet, auch im andern gültig sein.

Dies ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhin geführten Beweise. Ist ferner m' der erste Werth von m in einem Intervall der ersten Art, $m'-1$ der letzte in einem von der zweiten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in jenem stattfindende lineare Relation, welche also für $m = m', m'+1, \ldots$ besteht, so ist in (3.) $\Delta(m'-1) = 0$, dagegen von den Gröfsen $\Delta_\mu(m')$ mindestens eine von Null verschieden, also nothwendig $\varphi(m'-1) = 0$. Da ferner in der Gleichung $A_\mu \Delta(m'-2) = (-1)^n . \varphi(m'-2) \Delta_\mu(m'-1)$ beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'-2)$ verschwinden, so kann dieser Werth von Null verschieden sein, so dafs also die Relation $\varphi(m) = 0$ nothwendig für $m = m'-1$, aber nicht auch für

$m = m' - 2$ stattfindet. — Ist ferner $m'+1$ der erste Werth in einem Intervall der zweiten Art, m' der letzte in einem von der ersten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in letzterem stattfindende lineare Relation, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\varphi(m'+n) = 0$; aber da in der Gleichung

$$A_\mu \Delta(m'+1) = \varphi(m'+n+1)\Delta_\mu(m'+1)$$

beide Seiten unabhängig von $\varphi(m'+n+1)$ verschwinden, so kann dies von Null verschieden sein.

4) Sind also zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch in dem andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches die Werthe $m = m_0$, m_0+1, .. m'_0 umfafst, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation statt, welche für die Werthe $m = m_0 - 1$, m_0, .. $m'_0 + n$, aber nicht nothwendig auch noch für die Werthe $m_0 - 2$ und $m'_0 + n + 1$ gültig ist.

Um diese Sätze auf ein Beispiel anzuwenden, nehme ich an, dafs: $\Delta(m) = 0$ ist für jedes m, und dafs sämmtliche $\Delta_\mu(m)$ verschwinden, wenn m einer der Gruppen:

$$m_1,\ m_1+1,\ ..\ m'_1 - 1;\ m_2,\ m_2+1,\ ..\ m'_2 - 1;\ ..\ m_\mu,\ m_\mu+1,\ ..\ m'_\mu - 1$$

angehört, während für jeden andern Werth von m wenigstens eine jener Gröfsen von Null verschieden ist; und sei $m_1 < m'_1 < m_2 < m'_2 .. < m_\mu < m'_\mu$. Dann findet zwischen den $n+1$ Functionen eine einzige lineare Relation statt für $m = -\infty$, .. $m_1 + n - 1$; eine andere für $m = m'_1 - 1$, m'_1, .. $m_2 + n - 1$; eine dritte für $m = m'_2 - 1$, m'_2, .. $m_3 + n - 1$; u. s. f.; und endlich eine im Allgemeinen von jenen verschiedene für $m = m'_\mu - 1, m'_\mu, .. \infty$. Dagegen sind jede beliebige n von den gegebenen Functionen linearabhängig für die Werthe $m = m_1$, $m_1 + 1$, . . $m'_1 + n - 2$; $m = m_2$, $m_2 + 1$, . . $m'_2 + n - 2$; .. $m = m_\mu$, $m_\mu + 1$, .. $m'_\mu + n - 2$, und es finden in den einzelnen Intervallen im Allgemeinen verschiedene lineare Relationen statt.

3.

Ich werde jetzt die lineare Differenzengleichung:

$$(1.)\qquad P(m)f(m+n) + P_1(m)f(m+n-1) + \cdots + P_n(m)f(m) = 0$$

untersuchen, in welcher die Coefficienten $P, P_1, .. P_n$ analytische Functionen von m sind, und dabei die erlaubte Voraussetzung machen, dafs für keinen Werth von m sämmtliche Coefficienten verschwinden. Ist dies nämlich nicht der Fall, so darf man (1.) nur durch eine Function $\varphi(m)$ dividiren, welche nur dann verschwindet, wenn sämmtliche Coefficienten verschwinden, und sich jedesmal in derselben Weise der Null nähert, wie derjenige Coefficient, welcher von allen am langsamsten gegen Null convergirt. Ebenso werde ich voraussetzen, dafs für keinen Werth von m einer oder mehrere dieser Coefficienten unendlich grofs werden.

Es handelt sich bei dieser Untersuchung, wie im Folgenden bei den linearen Differentialgleichungen, wesentlich darum, genau festzusetzen, welchen Grad von Allgemeinheit das complete Integral einer solchen Gleichung im Allgemeinen, und welchen dasselbe unter gewissen Bedingungen erreichen kann. Dieser Grad hängt ab von der Anzahl linearunabhängiger Functionen, durch welche jener Gleichung und gleichzeitig etwaigen Bedingungen genügt wird.

Das allgemeinste Verfahren zur Integration von (1.) besteht darin, dafs man die Werthe $f(m_0)$, $f(m_0+1)$, .. $f(m_0+n-1)$ der gesuchten Function als willkürlich gegeben betrachtet, und dann mittelst (1.) die Werthe $f(m_0+n)$, $f(m_0+n+1)$, .. $f(m_0+n+p)$ successive bestimmt. Ist dies geschehen, und giebt man der Function $f(m)$ für alle übrigen Werthe von m einen willkürlichen Verlauf, so sage ich der Kürze wegen, dafs sie der Gleichung (1.) für die Werthe:

$$\text{(a.)}\qquad m = m_0,\ m_0+1,\ \ldots\ m_0+p$$

genügt.

Sind n Functionen $f_1(m)$, $f_2(m)$, .. $f_n(m)$ gegeben, welche der Gleichung (1.) für die Werthe (a.) genügen, so hat man demnach für die nämlichen Werthe von m:

$$\text{(2.)}\qquad \begin{cases} P(m)f_1(m+n)+P_1(m)f_1(m+n-1)+\cdots+P_n(m)f_1(m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P(m)f_n(m+n)+P_1(m)f_n(m+n-1)+\cdots+P_n(m)f_n(m) = 0, \end{cases}$$

und wenn man hieraus die Coefficienten P_1, P_2, .. P_{n-1} eliminirt, nach der frühern Bezeichnung:

$$\text{(3.)}\qquad P(m)\Delta_0(m+1) = (-1)^n P_n(m)\Delta_0(m).$$

Mittelst dieser Gleichung läfst sich nun zunächst leicht nachweisen, dafs unter gewissen Umständen n linearunabhängige Integrale der Gleichung (1.) existiren. Setzt man nämlich voraus, dafs die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ für die Werthe (a.) von Null verschieden sind, so kann man die willkürlichen

Werthe $f_1(m_0)$, $f_1(m_0+1)$, .. $f_1(m_0+n-1)$, $f_2(m_0)$ etc. immer so annehmen, dafs $\Delta_0(m_0)$ von Null verschieden ist. Da somit auch $\Delta_0(m_0+1)$, $\Delta_0(m_0+2)$, .. $\Delta_0(m_0+p+1)$ von Null verschieden sind, so folgt nach dem Frühern, dafs die Functionen f_1, f_2, .. f_n für die Werthe:

$$\text{(b.)} \qquad m = m_0, \; m_0+1, \; .. \; m_0+p+n$$

linearunabhängig sind.

Ich werde jetzt umgekehrt beweisen, dafs für alle Werthe von m, für welche n linearunabhängige Functionen der Gleichung (1.) genügen sollen, die Gröfsen $P(m)$ und $P_n(m)$ von Null verschieden sein müssen.

Sind die vorhin gegebenen Functionen für die Werthe (b.) linearunabhängig, so ist $\Delta_0(m)$ von Null verschieden für $m = m_0$, m_0+1, .. m_0+p+1, also in der ganzen Ausdehnung der Gleichung (3.) weder $\Delta_0(m)$ noch $\Delta_0(m+1)$ gleich Null. Es ist daher nicht möglich, dafs eine der Gröfsen $P(m)$ und $P_n(m)$, aber nicht zugleich die andere verschwinde; und umgekehrt würde, wenn dies der Fall wäre, eine der Gröfsen $\Delta_0(m)$ und $\Delta_0(m+1)$ gleich Null sein, also eine Linearabhängigkeit zwischen den gegebenen Functionen bestehen. Die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ können aber auch für keinen der Werthe (a.) zugleich verschwinden. Setzt man nämlich $\frac{\partial \Delta_0(m)}{\partial f_\mu(m)} = \Delta_{0,\mu}(m)$, woraus:

$$\Delta_0(m) = f_1(m)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m)\Delta_{0,2}(m) + \cdots$$
$$(-1)^{n-1}\Delta_0(m+1) = f_1(m+n)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m+n)\Delta_{0,2}(m) + \cdots$$

folgt, so ergiebt sich unter der Voraussetzung $P(m) = 0$ und $P_n(m) = 0$ aus den Gleichungen (2.), dafs entweder sämmtliche Coefficienten der Gleichung (1.), oder sämmtliche Gröfsen $\Delta_{0,\mu}(m)$ verschwinden. Das Erstere ist gleich im Anfange ausgeschlossen worden; wäre das Andere der Fall, so hätte man auch $\Delta_0(m) = 0$, $\Delta_0(m+1) = 0$, woraus der Voraussetzung zuwider die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen für die Werthe von m, $m+1$, .. $m+n$ folgt.

Bezeichnet man demnach durch m' die besonderen Werthe von m, für welche einer der Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$, oder beide zugleich verschwinden, so hat man folgende Regeln:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (1.) für einen der Werthe m' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (1.) durch n linearunabhängige Functionen

integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe m' jede dieser Functionen der Gleichung (1.) Genüge leiste.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (1.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen m' keinen geben, für welchen sämmtliche Functionen der Gleichung (1.) genügen.

4) Stellt man bei der Integration der Gleichung (1.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe m' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche diesen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Aus diesen Sätzen folgt, dafs bei der Integration der Gleichung (1.) die erste Aufgabe darin besteht, die besondern Werthe m' zu ermitteln. Dadurch zerfällt die Reihe der Werthe von m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind; in jedem einzelnen Intervall mufs die Integration besonders vorgenommen werden.

Hieran schliefst sich der bekannte Satz, dafs die Gleichung (1.) nie mehr als n linearunabhängige Integrale haben kann. Denn genügen die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ jener Gleichung für die Werthe (a.), so folgt $\varDelta(m)=0$, woraus sich weiter ergiebt, dafs diese Functionen für die Werthe (b.) linearabhängig sind. Bilden die Werthe (a.) eines der eben beschriebenen Intervalle, und sind in demselben die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ linearunabhängig, so sind $\varDelta_0(m_0)$, $\varDelta_0(m_0+1)$, .. $\varDelta_0(m_0+p+1)$ von Null verschieden, und es besteht für die Werthe (b.) eine einzige lineare Relation:

$$Af(m)+A_1f_1(m)+\cdots+A_nf_n(m)=0,$$

in welcher A von Null verschieden sein mufs. Denn, wäre $A=0$, so müfsten wegen der Linearunabhängigkeit von $f_1, f_2, \ldots f_n$ auch die übrigen Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$ verschwinden. Es besteht also für sämmtliche Werthe (b.) eine einzige Relation von der Form:

$$f(m) = a_1f_1(m)+a_2f_2(m)+\cdots+a_nf_n(m).$$

Genügen die Functionen $f, f_1, \ldots f_n$ der Gleichung (1.) in mehreren aufeinanderfolgenden Intervallen, in denen $f_1, f_2, \ldots f_n$ linearunabhängig sind, so kann für einen beliebigen der zwischen jenen Intervallen eingeschalteten Werthe m' wenigstens eine der letztern Functionen der Gleichung (1.) nicht Genüge leisten, also $\varDelta(m')$ nicht gleich Null sein.

Sind daher zwischen zwei dieser Intervalle n oder weniger Werthe m' eingeschaltet, so mufs die in dem einen stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein (§. 2. 3)).

4.

Die noch rückständige Untersuchung von Functionen, welche von einer stetigen Veränderlichen abhängen, erledigt sich aus dem Vorangehenden mittelst der identischen Gleichung:

$$(1.)\qquad \Sigma\pm f(m)f_1(m+1)\,.\,.\,f_n(m+n) = \Sigma\pm f(m)\Delta f_1(m)\,.\,.\,\Delta^n f_n(m),$$

in welcher nach der gewöhnlichen Bezeichnung von Differenzen:

$$\Delta^i f_k(m) = f_k(m+i) - i f_k(m+i-1) + \frac{i(i-1)}{1.2} f_k(m+i-2) - \cdots + (-1)^i f_k(m)$$

ist. Dieselbe wird einfach dadurch bewiesen, dafs man auf der rechten Seite für die Differenzen ihre Entwicklungen setzt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt. Aus (1.) ergiebt sich:

$$(2.)\qquad \Delta_\mu(m) = \frac{\partial\Delta(m)}{\partial\Delta^n f_\mu(m)}.$$

Nun wird an den frühern Betrachtungen gar nichts geändert, wenn man überall statt der Argumente m, $m+\mu$ der einzelnen Functionen dasselbe Vielfache derselben $(m+\mu)\varepsilon$ einführt, also auch nicht, wenn man $m\varepsilon = x$, $\varepsilon = \partial x$ setzt. Dann ist:

$$\Delta^i f_k(m\varepsilon) = \partial x^i f_k^{(i)}(x),$$

$$\frac{\Delta(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}} = \Sigma\pm f(x)f_1'(x)\,.\,.\,f_n^{(n)}(x) = \mathrm{E}(x),$$

$$\frac{\Delta_\mu(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n-1)}} = \frac{\partial\mathrm{E}(x)}{\partial f_\mu^{(n)}(x)} = \mathrm{E}_\mu(x),$$

u. s. w. Dies festgestellt, hat man folgende Sätze:

1) Verschwindet $\mathrm{E}(x)$ für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$, wo $x_0 < x_1$ ist, so sind die Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ für diese nämlichen Werthe von x linearabhängig. Ist $\varphi(x) = 0$ eine der linearen Relationen, welche für $x = x_1$ und kleinere Werthe von x stattfinden, und construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für alle Werthe von x, die gröfser als x_1 sind, so hat diese Curve für $x = x_1$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der n^{ten} Ordnung.

2) Sind zwei Intervalle, in denen $\mathrm{E}(x)$ verschwindet, durch Werthe von x getrennt, für welche $\mathrm{E}(x)$ von Null verschieden ist, so wird die

Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen in beiden Intervallen im Allgemeinen durch verschiedene Relationen ausgedrückt.

3) Damit gegebene $n+1$ Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, .. $f_n(x)$ für alle Werthe von x linearunabhängig sind, ist es erforderlich und hinreichend, dafs ihre Determinante $E(x)$ für alle Werthe von x von Null verschieden ist.

Nennt man ferner ein Intervall, in welchem mindestens eine der Gröfsen $E_\mu(x)$ von Null versohieden ist, ein Intervall der ersten Art, dagegen ein solches, in welchem sämmtliche $E_\mu(x)$ verschwinden, eines von der zweiten Art, während $E(x)=0$ vorausgesetzt wird, so hat man weiter:

4) Sind zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch im andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches sich von $x=x_0$ bis $x=x_1$ incl. ausdehnt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation $\varphi(x)=0$ statt. Construirt man die Curve $y=\varphi(x)$ für die Werthe $x<x_0$ und $x>x_1$, so hat der erste Zweig für $x=x_0$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der ersten, der andere für $x=x_1$ einen von der n^{ten} Ordnung. Nur in besondern Fällen kann in diesen Punkten der Contact auf eine höhere Ordnung steigen.

Ich wende mich zur Untersuchung der Differentialgleichung:

$$(3.)\qquad A(x)f^{(n)}(x)+A_1(x)f^{(n-1)}(x)+\cdot\cdot+A_n(x)f(x) = 0,$$

und betrachte statt derselben zunächst die Gleichung:

$$(4.)\qquad A(m\varepsilon)\frac{\Delta^n f(m\varepsilon)}{\varepsilon^n}+A_1(m\varepsilon)\frac{\Delta^{n-1}f(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}}+\cdot\cdot+A_n(m\varepsilon)f(m\varepsilon) = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$A_s = \varepsilon^{n-s}\Big\{P_s+(n-s+1)P_{s-1}+\frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1.2}P_{s-2}+\cdot\cdot \\ +\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s}P\Big\},$$

oder:

$$P_s = \frac{A_s}{\varepsilon^{n-s}}-(n-s+1)\frac{A_{s-1}}{\varepsilon^{n-s+1}}+\frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1.2}\frac{A_{s-2}}{\varepsilon^{n-s+2}}-\cdot\cdot \\ +(-1)^s\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s}A$$

die Form:

$$P(m\varepsilon)f((m+n)\varepsilon)+P_1(m\varepsilon)f((m+n-1)\varepsilon)+\cdot\cdot+P_n(m\varepsilon)f(m\varepsilon) = 0$$

annimmt. Es läfst sich daher alles, was im vorigen Paragraph festgestellt wurde, auch auf vorstehende Gleichung (4.) übertragen, welches auch der Werth von ε sei, also auch dann, wenn ε unter einer beliebigen Grenze liegt.

Bezeichnet man daher durch m' die Werthe von m, für welche bei einem bestimmten, unter einer gegebenen Grenze liegenden ε eine der Gröfsen

$$P(m\varepsilon) = \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

$$P_n(m\varepsilon) = (-1)^n \left\{ \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} - \frac{A_1(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{A_2(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}} - \cdots \right\},$$

oder beide zusammen im Vergleich zu allen übrigen Gröfsen P_s verschwinden, so sieht man augenblicklich, dafs, wenn jene Grenze immer kleiner genommen wird, diese Werthe sich auf diejenigen reduciren, für welche $P(m\varepsilon)$ verschwindet.

Macht man nun die erlaubte Voraussetzung, dafs es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen alle Coefficienten $A_s(x)$ verschwinden, oder für den einer oder mehrere derselben die Grenzen des Endlichen übersteigen, und bezeichnet durch x' diejenigen Werthe von x, für welche $A(x)$ verschwindet, so erhält man folgende Resultate:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (3.) für einen der Werthe x' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (3.) durch n linearunabhängige Functionen integriren, so ist dazu erforderlich, dafs für keinen der Werthe x' jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genüge.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (3.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen x' keinen geben, für den jede dieser Functionen der Gleichung (3.) genügt.

4) Stellt man bei der Integration von (3.) die Bedingung, dafs das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe x' genüge, so giebt es keine n, sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche jenen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Hat man n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche der in 2) aufgestellten Bedingung genügen, so erhält man durch Elimination von $A_1, A_2, \ldots A_n$ aus den Gleichungen:

$$A(x) f_1^{(n)}(x) + A_1(x) f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x) f_1(x) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A(x) f_n^{(n)}(x) + A_1(x) f_n^{(n-1)}(x) + \cdots + A_n(x) f_n(x) = 0$$

die folgende:

$$A(x)\frac{\partial E_0(x)}{\partial x} + A_1(x)E_0(x) = 0.$$

Da in der ganzen Ausdehnung dieser Gleichung $A(x)$ von Null verschieden ist, so hat man entweder $E_0(x) = 0$, also auch $\frac{\partial E_0}{\partial x} = 0$, oder:

$$\frac{\partial E_0}{E_0\,\partial x} + \frac{A_1}{A} = 0,$$

woraus:

$$(5.)\qquad E_0(x) = e^{-\int \frac{A_1(x)}{A(x)}\partial x}$$

folgt. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält eine durch die Integration eingeführte Constante, welche dadurch bestimmt werden mufs, dafs man für x einen besondern Werth einsetzt. Dabei entscheidet sich zugleich die Frage, ob E_0 gleich Null oder von Null verschieden ist, d. h. ob jene Integrale linear-abhängig oder linearunabhängig sind.

Die obigen vier Sätze bedürfen einer Erläuterung, welche ich für den dritten und vierten Satz an zwei einfachen Beispielen geben will. Die Gleichung $(x^2-1)f''+2xf'-2f=0$ hat die Integrale $f_1 = x$, $f_2 = x\lg\frac{x+1}{x-1} - 2$, während $x' = \pm 1$ ist. Diese Integrale sind linearunabhängig, also darf eines derselben für $x = -1$, und eines für $x = 1$ der Differentialgleichung nicht genügen. Dies ist in der That mit f_2 der Fall, da f_2 in der Nähe jener Werthe aufhört der Voraussetzung zu entsprechen, dafs seine Aenderung der Aenderung von x proportional sei, also von der Herstellung der Differentialquotienten f' und f'' für jene Werthe keine Rede sein kann. — Untersucht man die Wärmebewegung in einer Vollkugel nach der *Fourier*'schen Theorie für den Fall, wo die Temperatur u nur von der Zeit t und dem aus dem Centrum genommenen Radiusvector x abhängt, so hat man für alle Punkte der Kugel ohne Ausnahme $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Ist α eine willkürliche Constante, so kann man ein particulares Integral finden, wenn man noch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha^2 u$ hinzunimmt. Dann erhält man:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{a^2}xu = 0,$$

und es ist ein solches Integral zu suchen, welches dieser Gleichung für den Punkt $x = 0$ genügt. Diese Gleichung hat die Integrale:

$$f_1 = c_1\frac{\sin\frac{\alpha x}{a}}{x}, \qquad f_2 = c_2\frac{\cos\frac{\alpha x}{a}}{x},$$

von denen das Letztere zu verwerfen ist, weil es der Gleichung nicht für $x = 0$ genügt.

Aus art. 3 übertragen wir noch folgende Sätze. Hat man $n+1$ Functionen $f, f_1, \ldots f_n$, welche der Gleichung (3.) für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$ genügen, so sind dieselben für die nämlichen Werthe von x linearabhängig. Sind die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ in jenem Intervall linearunabhängig, so besteht in demselben eine einzige Relation von der Form:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x).$$

Genügen diese nämlichen Functionen der Gleichung (3.) in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, zwischen denen ein Werth x' liegt, für den $A(x)$, $A'(x), \ldots A^{(\mu)}(x)$ verschwinden, und ist $\mu \gtreqless n$, so mufs die in dem einen Intervall stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein.

5.

Es ist hier am Orte, einige Eigenschaften der im Vorhergehenden betrachteten Determinanten anzuschliefsen. Es ist:

$$\Sigma \pm VU.V_1 U_1'.V_2 U_2'' \ldots V_n U_n^{(n)} = VV_1 \ldots V_n \Sigma \pm UU_1'U_2'' \ldots U_n^{(n)},$$

und wenn man $U_{\nu+1}^{(\mu)} - U_\nu^{(\mu)} = \Delta U_\nu^{(\mu)}$, $\Delta U_{\nu+1}^{(\mu)} - \Delta U_\nu^{(\mu)} = \Delta^2 U_\nu^{(\mu)}$ etc. setzt:

$$\Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)} = \Sigma \pm UU_1'U_2'' \ldots U_n^{(n)},$$

eine Formel, welche man auf dieselbe Art, wie die Gleichung (1.) art. 4 beweist. Die Verbindung dieser Gleichungen giebt:

$$(1.) \quad \Sigma \pm VU.\Delta(VU').\Delta^2(VU'') \ldots \Delta^n(VU^{(n)})$$
$$= VV_1V_2 \ldots V_n \Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)}.$$

Setzt man in dieser $V = \frac{1}{U}$, $V_1 = \frac{1}{U_1}$, $\ldots$ $V_n = \frac{1}{U_n}$, so folgt:

$$\Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)} = UU_1U_2 \ldots U_n \Sigma \pm \Delta\left(\frac{U'}{U}\right) \Delta^2\left(\frac{U''}{U}\right) \ldots \Delta^n\left(\frac{U^{(n)}}{U}\right).$$

Wiederholt man diese Operation und setzt:

$$\Delta\left(\frac{U^{(\mu)}}{U}\right) = U^{\mu,0}, \quad \Delta\left(\frac{U^{\mu,0}}{U^{1,0}}\right) = U^{\mu,1}, \quad \Delta\left(\frac{U^{\mu,1}}{U^{2,1}}\right) = U^{\mu,2}, \quad \text{etc.},$$

so ergiebt sich schliefslich:

$$(2.) \quad \Sigma \pm U \Delta U' \Delta^2 U'' \ldots \Delta^n U^{(n)}$$
$$= UU_1 \ldots U_n . U^{1,0} U_1^{1,0} \ldots U_{n-1}^{1,0} . U^{2,1} U_1^{2,1} \ldots U_{n-2}^{2,1} \ldots U^{n-1,n-2} U_1^{n-1,n-2} . U^{n,n-1},$$

wodurch die Determinante zur Linken als das Product von $\frac{n+1.n+2}{2}$ Factoren dargestellt ist. Setzt man $U_\mu^{(\nu)} = f_\nu(m\varepsilon+\mu\varepsilon)$, $V_\mu = \varphi(m\varepsilon+\mu\varepsilon)$, $m\varepsilon = x$ und $\varepsilon = \partial x$, so erhält man aus (1.), wenn man durch $\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ dividirt und zur Grenze übergeht:

$$(3.)\qquad \Sigma\pm\varphi f\frac{\partial\varphi f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi f_2}{\partial x^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n\varphi f_n}{\partial x^n} = \varphi^{n+1}\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n}.$$

Bezeichnet man ferner die Grenze von $\frac{U^{\mu,\nu}}{\partial x}$ durch $f_{\mu,\nu}$, so dafs man hat:

$$f_{\mu,0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_\mu}{f}\right),\quad f_{\mu,1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,0}}{f_{1,0}}\right),\quad f_{\mu,2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_{\mu,1}}{f_{2,1}}\right),\quad \text{etc.},$$

so folgt aus (2.):

$$(4.)\qquad \Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = f^{n+1}f_{1,0}^n f_{2,1}^{n-1}\cdot\cdot f_{n-1,\,n-2}^2 f_{n,n-1}.$$

Die Gleichungen (3.) und (4.) sind zuerst von Herrn ***Hesse*** im 54sten Bande dieses Journals pag. 249, 250 veröffentlicht worden *).

Zur Tansformation der Veränderlichen in diesen Determinanten hat man die Formel:

$$(5.)\qquad \Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n f_n}{\partial t^n},$$

welche sich sehr leicht beweisen läfst, indem man für die Derivirten nach x die nach t mittelst der Formel:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial t^n}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^n + a_1^{(n)}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial t^{n-1}} + a_2^{(n)}\frac{\partial^{n-2}f}{\partial t^{n-2}} + \cdot\cdot$$

einführt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt.

Setzt man:

$$\Sigma\pm f\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\cdot\cdot\frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = \Delta,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial f_\mu^{(n)}} = \Delta_\mu,\quad \frac{\partial^\nu\Delta_\mu}{\partial x^\nu} = \Delta_\mu^{(\nu)},$$

so hat man folgendes System von Gleichungen, dessen Beweis ich übergehe:

---

*) Die in diesen beiden Gleichungen enthaltenen Ergebnisse waren bereits vor länger als einem Jahr von Herrn *Christoffel* gefunden und der Redaction dieses Journals mitgetheilt worden. Nur dem Umstande, dafs der Herr Verfasser dieser Arbeit einige Aenderungen in derselben vorzunehmen wünschte, ist es zuzuschreiben, dafs die nämlichen Ergebnisse, welche Herr ***Hesse*** in der citirten Abhandlung erhalten hat, von diesem früher veröffentlicht worden sind. ***B.***

$$
(6.)\quad \begin{cases}
\Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \,..\, \varDelta_n^{(n)} = \varDelta^n \\
\Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \,..\, \varDelta_{n-1}^{(n-1)} = (-1)^n \varDelta^{n-1} . f_n \\
\Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \,..\, \varDelta_{n-2}^{(n-2)} = (-1)^{2n} \varDelta^{n-2} \Sigma \pm f_{n-1} \dfrac{\partial f_n}{\partial x} \\
\Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' \varDelta_2'' \,..\, \varDelta_{n-3}^{(n-3)} = (-1)^{3n} \varDelta^{n-3} \Sigma \pm f_{n-2} \dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x} \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Sigma \pm \varDelta_0 \varDelta_1' = (-1)^{(n-1)n} \varDelta \Sigma \pm f_2 \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \,..\, \dfrac{\partial^{n-2} f_n}{\partial x^{n-2}} \\
\varDelta_0 = (-1)^{nn} \Sigma \pm f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \,..\, \dfrac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-1}} .
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen sind von Wichtigkeit für die Untersuchung solcher linearer homogener Differentialausdrücke, welche nach der Benennung des Herrn *Hesse* zu einander complementar sind. So enthält z. B. die vorletzte derselben die vollständige Integration einer linearen Differentialgleichung ohne zweiten Theil, für den Fall, dafs das Integral ihrer Complementargleichung bekannt ist.

Montjoie, 1857.