

### **3. Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers im Bereich von 0 bis 80°; von Max Jakob.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

#### **A. Allgemeines.**

Das Wärmeleitvermögen des Wassers und anderer Flüssigkeiten in Abhängigkeit von der Temperatur mit Sicherheit zu kennen, ist von großer Wichtigkeit sowohl für die Theorie der Flüssigkeiten<sup>1)</sup> als auch für die technische Beurteilung von Strömungs- und Wärmeübertragungsverhältnissen in Flüssigkeiten und Gasen auf Grund der Ähnlichkeitsgesetze.<sup>2)</sup> Diese Größe ist daher auch von vielen Forschern und nach den verschiedensten Methoden gemessen worden. Deren Ergebnisse weichen aber weit voneinander ab, wie aus Fig. 1 ersichtlich ist. Nicht nur die Absolutwerte sind zum Teil auf 10% und mehr unsicher; es ist auch in den Messungen der letzten 50 Jahre keine kontinuierliche Annäherung an einen wahrscheinlichsten Verlauf der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur zu erkennen, sondern ein gesetzloses Pendeln zwischen größeren und kleineren Werten; ja es ist noch nicht einmal entschieden, ob das Wärmeleitvermögen mit zunehmender Temperatur zu- oder abnimmt. Oberhalb von 47° endlich sind überhaupt noch keine Messungen vorgenommen worden.

Als nun an die Reichsanstalt aus der Praxis der Antrag gestellt wurde, die Wärmeleitfähigkeit eines Transformatoröles

1) Vgl. z. B. H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809; R. Goldschmidt, Phys. Zeitschr. 12. S. 417. 1911.

2) Vgl. z. B. W. Nusselt, Der Wärmeübergang in Rohrleitungen (Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete d. Ingenieurwesens, Heft 89. S. 1. 1910); L. Prandtl, Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten (Phys. Zeitschr. 11. S. 1072. 1910); W. Nusselt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges (Gesundheits-Ingenieur 38. S. 477 u. 490. 1915); W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 60. S. 541. 1916.)

zwischen 20 und 70° zu bestimmen (als Grundlage für die Berechnung von Transformatorkühlern im Sinne der Nusselt-

kcal m<sup>-1</sup> Stunde<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>

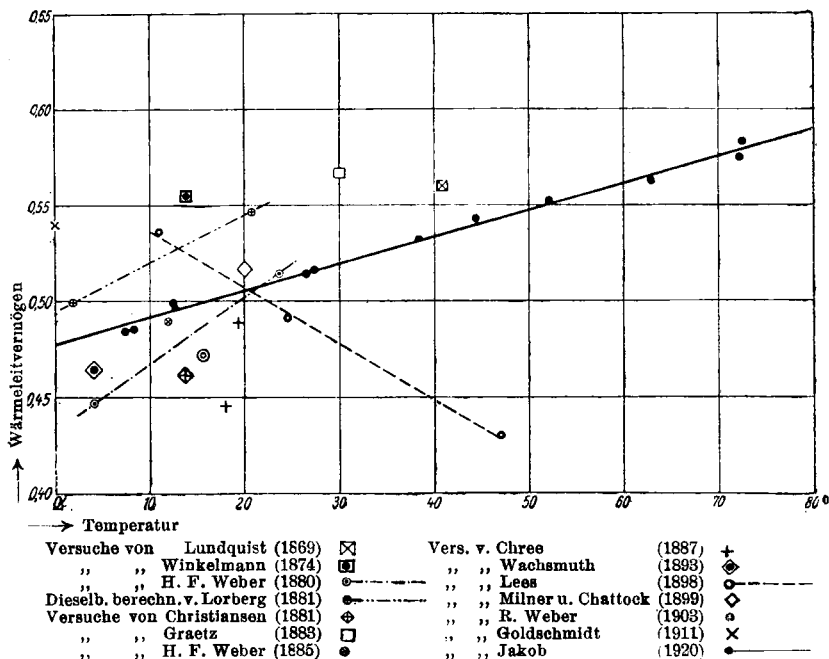


Fig. 1.

schen Untersuchungen), da zeigte es sich, daß keine der bekannten Methoden diese Bestimmung mit Sicherheit erlaubte, und es war erforderlich, eine neue Methode auszuarbeiten. Es lag dann nahe, mit diesem Verfahren eine genaue Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit des Wassers auszuführen.<sup>1)</sup>

#### B. Die bisher angewandten Verfahren und ihre Ergebnisse.

Zunächst sollen nun die bisher angewandten Verfahren in zeitlicher Folge einer kritischen Betrachtung unterzogen werden. Wir werden dabei wichtige Einzelheiten kennen lernen, die nur übernommen zu werden brauchten, und andererseits Fehler, die bei unseren Versuchen vermieden werden mußten.

1) Ein kurzer Bericht ist bereits in den Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 1920. S. 406 veröffentlicht.

1. Von den ältesten Bestimmungen verdient nur die von Lundquist<sup>1)</sup> Erwähnung. Dieser hat eine in einen Glaszylinder eingefüllte Wassermenge nach Ångströms Vorgang periodischer Erwärmung und Abkühlung unterworfen und aus dem Temperaturverlauf zweier Quecksilberthermometer, die mit 25 mm vertikalem Abstand horizontal in den Glaszylinder eingeführt waren, bei 40,8° die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 0,559_8 [\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Stde}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}]$$

gefunden. Die absolute Genauigkeit der Methode läßt sich schwer beurteilen; möglicherweise ist der Wärmeübergang durch Konvektion bei den wechselnden Temperaturen etwas vergrößert; die Einzelbeobachtungen weichen um höchstens 5% voneinander ab.

2. Winkelmann<sup>2)</sup> hat die zu untersuchende Flüssigkeit in den 2 bis 5 mm weiten Ringraum zwischen zwei konzentrischen, vertikalen Messingzylindern gebracht und die Abkühlung der Luft im inneren Zylinder gemessen, nachdem der ganze Apparat in Eis gesteckt war. Infolge der Flüssigkeitsströmung in der Ringschicht, ist sein Wert  $\lambda = 0,554_4$  bei 14° viel zu hoch, wie H. F. Weber<sup>3)</sup> ausführlich nachgewiesen hat.

3. Letzterer Forscher hat in der gleichen Abhandlung eine bemerkenswerte neue Methode angegeben. Das Wasser wurde dabei zwischen zwei kreisförmige, horizontale, durch kleine Glasstückchen voneinander getrennte Kupferplatten gebracht und durch seine eigene kapillare Spannung am Rand vor dem Ausfließen bewahrt. In einem bestimmten Augenblick wurde nun die untere Kupferplatte auf eine horizontale Eisfläche, bzw. mit einem kühlenden Wasserstrom in Berührung gebracht und das Plattensystem mit einer Kupferhaube von der Temperatur des Kühlmittels überdeckt. Aus der zeitlichen Temperaturabnahme und verschiedenen Konstanten der Anordnung ließ sich dann die Wärmeleitfähigkeit des Wassers berechnen, wenn noch die äußere Wärmeableitung des Plattensystems durch besonderen Versuch bestimmt war. So erhielt Weber

1) C. G. Lundquist, Upsala Universitets Årsskrift 1869. 29 S.

2) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 153. S. 481. 1874.

3) H. F. Weber, Wied. Ann. 10. S. 103, 304 u. 472. 1880.

für  $4,1^\circ \lambda = 0,447_0$  und

für  $23,7^\circ \lambda = 0,514_2$

und hieraus unter Annahme linearer Zunahme mit der Temperatur  $t$  die Gleichung

$$(1) \quad \lambda = 0,433_2 (1 + 0,00786 t)$$

(Strichpunktierte Gerade in Fig. 1).

4. Lorberg<sup>1)</sup> hat Webers Berechnungsmethode angezweifelt und abgeändert. Er berechnet aus Webers Versuchen

für  $1,9^\circ \lambda = 0,499_0 - 0,000046 h$ ,

für  $20,8^\circ \lambda = 0,546_6 - 0,000046 h$

als wahrscheinlichste Werte.<sup>2)</sup> Dabei ist  $h$  die äußere Wärmeleitfähigkeit der Wasserlamelle. Weber hat diese vernachlässigt; Lorberg macht zwar darauf aufmerksam, daß in  $h$  ein Betrag für die Verdampfung am Rand enthalten sei, hält aber  $h/\lambda$  für wesentlich kleiner als 1, wonach das Korrekturglied  $0,000046 h$  innerhalb der von Weber erstrebten Genauigkeit läge und somit zu vernachlässigen wäre.

5. Weber hat in einer späteren Veröffentlichung<sup>3)</sup>, laut welcher er den im Vergleich zur Formel (1) etwas höheren Wert  $\lambda = 0,489_6$  für  $12^\circ$  gefunden hat<sup>4)</sup>, Lorbergs Einwände erwähnt und eine Widerlegung in nahe Aussicht gestellt, eine solche aber offenbar ebensowenig veröffentlicht, wie das ebenfalls damals angekündigte ausführliche Versuchsmaterial.

Aus Fig. 1 ist ersichtlich, daß die von Lorberg berechneten Werte (obere strichpunktierte Gerade) bei  $4^\circ$  um etwa  $10\%$  höher sind als die von Weber berechneten. Es scheint jedoch, daß in Wirklichkeit  $\lambda$  zwischen beiden Geraden liegt. Die Verdampfung am Rand der Wasserlamelle macht nämlich mehr aus, als Lorberg angenommen hat, wie aus Webers

1) H. Lorberg, Wied. Ann. 14. S. 291 u. 426. 1881.

2) Nach seinen Ausführungen kann man die obigen Werte mit gleichem Recht auf 0 wie auf  $3,9^\circ$  und auf  $18,5$  wie auf  $23,2^\circ$  beziehen: ich habe daher die Mittelwerte  $1,9^\circ$  und  $20,8^\circ$  angenommen.

3) H. F. Weber, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1885. S. 809.

4) Die Temperatur ist in dieser Abhandlung nicht genau angegeben. Es ist nur erwähnt, daß sie zwischen  $9$  und  $15^\circ$  gelegen hat. Ich habe daher den Mittelwert  $12^\circ$  angenommen.

eigenen Angaben<sup>1)</sup> hervorgeht. Die von Lorberg unter Vernachlässigung der Verdampfungswärme berechneten Werte sind also zu hoch. Nach all dem sind Webers Werte so unsicher, daß es sich erübrigt, auf experimentelle Mängel, wie die Befestigung des Thermoelementes in der Mitte der oberen Kupferplatte, einzugehen.

6. Kurz nach Webers erster Untersuchung hat Christiansen<sup>2)</sup> die Wärmeleitfähigkeit des Wassers relativ zu Luft bestimmt, indem er drei Kupferplatten mit dünnen Zwischenschichten von Luft und Wasser übereinander anordnete und ihre Temperaturdifferenzen bestimmte, wenn Wärme im Dauerzustande von oben nach unten hindurchströmte. Die Luftschicht war dabei nur 0,2 mm stark; der geringste Feuchtigkeitsniederschlag auf den angrenzenden Kupferflächen mußte die Wärmeleitfähigkeit des Wassers zu gering erscheinen lassen. Christiansen fand bei 13,7° das Wärmeleitvermögen des Wassers 21,0 mal so groß als das der Luft bei 27,9°. Da das letztere nach den neuesten Versuchen

$$0,022 [\text{kcal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{Stde}^{-1} \cdot \text{Grad}^{-1}]$$

beträgt<sup>3)</sup>, so ergibt sich der in Fig. 1 eingetragene Wert  $\lambda = 0,462$ .

7. Während die bisher erwähnten Messungen an ruhendem Wasser angestellt sind, hat Graetz<sup>4)</sup> versucht, die Wärmeleitfähigkeit aus der Menge und dem Temperaturabfall der ein

---

1) Weber bemerkt (a. a. O. S. 305), daß die Flüssigkeit nach dem Einfüllen „rings an den Plattenrändern mit einem ca. 1 mm dicken, regelmäßig gekrümmten Bauch herausdrängte“ und sagt weiter: „Beim Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Weite der Ausbauchung so groß gewählt, daß die nach erfolgter Abkühlung stattfindende Einbauchung von nahezu gleicher Größe war.“ Er legt das Zurücktreten des Flüssigkeitsrandes der Abkühlung (beim Aufbringen der Platten auf Eis) zur Last; durch diese hätte jedoch die Ausbauchung sich nur um wenige Hundertel mm verringern können. Die Einbauchung des Flüssigkeitsrandes ist in Wirklichkeit der Verdampfung zuzuschreiben. Da die Versuchsdauer nur wenige Minuten betrug, so verdampft dabei fast ebensoviel in die übergestülpte Kupferglocke von nicht bezeichneter Größe wie bei gleicher Temperatur und Luftfeuchtigkeit in die freie Atmosphäre. Vgl. hierüber auch S. 556 dieser Abhandlung.

2) C. Christiansen, Wied. Ann. 14. S. 23. 1881.

3) W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

4) L. Graetz, Wied. Ann. 18. S. 79. 1883.

enges Rohr von bestimmter niedrigerer Außentemperatur durchströmenden Flüssigkeit zu bestimmen. Er hat dabei — mit einer relativen Genauigkeit der Versuchspunkte von  $\pm 5\%$  — den Mittelwert  $\lambda = 0,567_0$  für  $30^\circ$  gefunden, in einer späteren Abhandlung<sup>1)</sup> aber selbst ausgeführt, daß die Werte seiner früheren Arbeit zu groß sind.<sup>2)</sup>

8. Hieran schließt sich in zeitlicher Folge die Untersuchung von Chree<sup>3)</sup>, der auf der Oberfläche der einen vertikalen Zylinder erfüllenden Wassermenge eine Schale aufsetzte und das Wasser erwärmte, indem er in die Schale plötzlich heißes Wasser eingoß. Aus der Temperaturänderung eines in einiger Tiefe gespannten Platindrahtes versuchte er  $\lambda$  zu berechnen. Seine Versuche leiden aber außer an der Vernachlässigung des Einflusses der Randerscheinungen in dem Zylinder vor allem daran, daß die Wärmeabgabe des Wassers in der Schale an die Außenluft nur durch einen kaum einwandfreien Differenzversuch berücksichtigt wurde. Die von Chree gefundenen Werte ( $0,446_4$ ) (bei  $18^\circ$ ) und  $0,488_9$  (bei  $19,5^\circ$ ) weichen zudem auch voneinander um über  $9\%$  ab.

9. Die Webersche Lamellenmethode mit der Berechnungsweise von Lorberg hat Wachsmuth<sup>4)</sup> wieder aufgenommen. Sein Wert  $\lambda = 0,464_5$  für  $4,1^\circ$  liegt aber wesentlich unter dem, Lorbergschen Wert (vgl. Fig. 1).

10. Während aus den Versuchswerten von Lundquist Weber, Graetz und Chree eine Zunahme der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur mehr oder minder deutlich hervorzugehen scheint, hat Lees<sup>5)</sup> bei Wasser und anderen Flüssigkeiten eine beträchtliche Abnahme von  $\lambda$  mit zunehmender Temperatur gefunden. Er hat das Wärmeleitvermögen der Flüssigkeiten nicht absolut bestimmt, sondern relativ zu dem einer Glasplatte, deren Wärmeleitzahl er nach einem Verfahren für feste, schlechte Wärmeleiter absolut gemessen hat.

1) L. Graetz, Wied. Ann. 25. S. 337. 1885 (vgl. insbesondere S. 349).

2) Trotzdem glaubte ich, den obigen Wert nicht unterdrücken zu dürfen, da L. Graetz ihn in A. Winkelmanns Handbuch der Physik (3. S. 524. 1906) ebenfalls angeführt hat.

3) C. Chree, Proc. of the Roy. Soc. 42. S. 300 u. 43. S. 30. 1887.

4) R. Wachsmuth, Wied. Ann. 48. S. 158. 1893.

5) Ch. Lees, Phil. Trans. (A) 191. S. 399. 1898.

Dies Verfahren besteht darin, die in einem scheibenförmigen Heizkörper elektrisch erzeugte Energie durch mehrere daraufgesetzte Scheiben aus Kupfer und dem zu untersuchenden Stoff hindurchzutreiben und aus der Heizenergie und den Temperaturen der Kupferplatten im Dauerzustand die äußere und innere Wärmeleitfähigkeit zu berechnen. Dabei wird vorausgesetzt, daß bei gleicher Außentemperatur die Wärmeabgabe an die Luft nur von der Temperatur und Größe der Außenflächen der einzelnen Platten abhängig sei. Nun ist aber zu beachten, daß es nicht genügt, durch Firnissen gleichartige Oberflächen herzustellen und die Hauptflächen der Platten vertikal zu richten, wie dies Lees tut, daß vielmehr das äußere Wärmeleitvermögen  $h$  auch bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit sehr wesentlich von der Form der Fläche abhängt<sup>1)</sup> und an den zylindrischen Rändern ganz anders sein wird als an den ebenen Endflächen, weil die Konvektion dabei verschieden ist. Dies hat Lees übersehen. Aber noch mehr; er berücksichtigt die Wärmeableitung durch die zur Messung der Plattentemperaturen angebrachten Thermoelemente, indem er einen gewissen Betrag zu der Dicke der betreffenden Kupferplatten hinzurechnet. Dabei nimmt er für Drähte von Zehnteln mm Stärke das gleiche  $h$  wie für seine Platten von 4 cm Durchmesser, während in Wirklichkeit  $h$  im ersteren Fall vielleicht viermal so groß ist.<sup>2)</sup> Da  $\sqrt{h}$  in Lees Gleichung eingeht, so wäre die Korrektur etwa zweimal so groß zu nehmen. Die Dicke der einzelnen Kupferplatten ist daher um den vollen Betrag der von Lees angegebenen Korrektur (der nicht weniger als 20 bis 30% der wirklichen Plattendicke ausmacht) zu gering angenommen, was allerdings zufällig infolge der Form der Gleichungen auf das Resultat nur einen Einfluß von einigen Prozenten ausübt. Auch die Befestigung der Thermoelemente ist nicht einwandfrei. Endlich wird die Gültigkeit der Formeln durch das viel zu kleine Verhältnis des (nur 4 cm betragenden) Durchmessers zu der Dicke der Platten beeinträchtigt. Es tritt nämlich eine erhebliche Krümmung der Wärmeströmungslinien in den Versuchsplatten auf, die nicht in Rechnung gesetzt ist.

1) Vgl. z. B. A. Winkelmann, Wied. Ann. **29**, S. 68. 1886.

2) Vgl. W. Nusselt, Gesundheitsingenieur, a. a. O.

Aus all diesen Gründen wird man den Werten für Glas und andere feste Stoffe kaum eine große Genauigkeit zuschreiben dürfen. Messungen mit Flüssigkeiten darauf zu gründen, ist überaus gewagt.

Bei diesen Messungen strömte die Wärme durch eine ähnliche, aber horizontal gestellte Scheibenanordnung und zwar zunächst durch eine zwischen Kupferplatten eingelegte Glasplatte und dann durch eine Flüssigkeitsschicht von 37 mm Durchmesser, welche am Rand von einem Ebonitring von 16 mm Dicke umschlossen war. Aus dem Temperaturgefälle im Glas und in der Flüssigkeit, dem äußeren Wärmeleitvermögen  $h$  (welches aus den Beobachtungen an festen Körpern, ohne Berücksichtigung der veränderten Lage der Platten, mit großer Unsicherheit abgeleitet ist) und der Wärmeleitfähigkeit des Glases wurde nun die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit gewonnen. Dabei störte natürlich sehr, daß die Wärme zum Teil in den Ebonitrang strömte; diesen Betrag suchte Lees durch einen Differenzversuch, bei dem sich statt der Flüssigkeit Luft zwischen den unteren Platten und dem Ebonitring befand, zu eliminieren. Bezüglich der Messung und Auswertung gilt das oben über die Messungen an festen Körpern Gesagte.

Die von Lees für Wasser ermittelten Werte  $\lambda = 0,491_4$  für  $24\frac{1}{2}^\circ$  und  $\lambda = 0,430_2$  für  $47^\circ$ , aus denen er graphisch linear den Wert  $\lambda = 0,536_4$  für  $11^\circ$  extrapolierte (vgl. gestrichelte Gerade in Fig. 1), müssen daher als ganz unsicher bezeichnet werden. Dasselbe gilt für die Gleichung

$$(2) \quad \lambda = 0,566_2 (1 - 0,0052 t)$$

mittels deren man seine Werte am besten wiedergeben kann.

11. Im Gegensatz zu dieser Arbeit verdient die Untersuchung von Milner und Chattock<sup>1)</sup> wegen ihrer Gründlichkeit besondere Beachtung. Läßt man durch eine Wasserschicht von der Fläche  $F$ , deren Dicke variiert werden kann und einmal  $d'$ , ein andermal  $d''$  betragen möge, von oben nach unten die gleiche Wärmeenergie  $W$  im Dauerzustande strömen, so gilt

1) S. R. Milner und A. P. Chattock, Phil. Mag. (5) 48. S. 46. 1899.



$$(3) \quad W = \frac{F}{d'} (t_1' - t_2) \lambda$$

und

$$(4) \quad W = \frac{F}{d''} (t_1'' - t_2) \lambda,$$

wenn die untere Temperatur  $t_2$  der Wasserschicht in beiden Fällen gleich gehalten wird, die obere Temperatur  $t_1'$ , bzw.  $t_1''$  beträgt. Hieraus folgt

$$(5) \quad \frac{W}{F} (d' - d'') = \lambda (t_1' - t_1'').$$

Man könnte aus jeder der Gleichungen (3) und (4) für sich  $\lambda$  berechnen. Milner und Chattock aber haben ihr Versuchsverfahren auf Gleichung (5) gegründet. Sie verwendeten zwei ganz gleiche Apparate, bei denen die ganz flachen, gleichgebauten und vom gleichen Strom durchflossenen Platindrahtheizkörper durch eine Brückenschaltung gleichzeitig als Differenzthermometer zur Messung von  $(t_1' - t_1'')$  dienten. Jeder Heizkörper ruhte auf einer dünnen Glasscheibe, welche die obere Grenze der Flüssigkeitsschicht bildete, während die untere ein Metallboden war, der durch Kühlwasser auf der Temperatur  $t_2$  gehalten wurde. Die Dicke der Schicht wurde durch Bewegung der einen sie begrenzenden Fläche mittels einer Mikrometerschraube beliebig eingestellt. Durch diese Differenzmethode, bei der beide Apparate gleichzeitig in Betrieb waren, sollte erreicht werden, daß zeitliche Ungleichmäßigkeiten im elektrischen Strom und Kühlwasser und andere Korrekturen sich gegenseitig aufheben. Ferner konnte man, ohne Rücksichtnahme auf den Absolutwert von  $d'$  und  $d''$ , durch Regulieren an der Mikrometerschraube einen Ausgangszustand für die Messung einstellen, bei dem die Meßbrücke stromlos, also  $t_1' - t_1'' = 0$  war, und dann  $d' - d''$  an der Schraube ablesen. Das Verfahren ist durch viele Feinheiten und Korrekturen ausgezeichnet; so waren die Heizkörper in eine mittlere Heizfläche (von 4 cm Durchmesser) und „äußere Schutzringe“ (von 11,5 cm Durchmesser) zerlegt; die Wärmeabgabe von den Heizkörpern nach oben wurde durch besondere Heizkörper verhindert, die ebenfalls auf die Temperaturen  $t_1'$  und  $t_1''$  geheizt wurden usw. Aus 33 Einzelversuchen, deren Abweichungen voneinander sich in den Grenzen von  $\pm 1,5\%$  halten, er-

mittelten die Verfasser für  $20^{\circ}$  den Wert  $\lambda = 0,515_9$ . Mit zunehmender Temperatur scheint nach diesen Versuchen  $\lambda$  zuzunehmen.

12. Im Dauerzustand der Wärmeströmung hat auch R. Weber<sup>1)</sup> eine Bestimmung von  $\lambda$  ausgeführt, jedoch nicht annähernd mit der von den eben genannten Forschern erzielten Genauigkeit. Weber hat die Temperatur einer in einem Glaszylinder befindlichen, von oben nach unten von Wärme durchströmten Flüssigkeitsschicht mit zwei im vertikalen Abstand von 9—10 mm voneinander angeordneten Thermo-  
elementen gemessen. Diesen Abstand hat er nur auf 2—3% genau bestimmen können, und er bezeichnet dies selbst als einen schwachen Punkt seines Verfahrens. Der Apparat war mit Wolle umhüllt; da ferner nur bei annähernd der Außentemperatur gleichen mittleren Temperaturen gemessen wurde, waren die Wärmeverluste gering. Sie wurden durch besondere Versuche bestimmt, wobei die Flüssigkeitsschicht durch Eiderdaunen ersetzt und der Glaszylinder einmal weggenommen, einmal beibehalten war. Bei der Verlustbestimmung hat der Verfasser aber offenbar irrtümlicher Weise der Oberfläche der Wollumhüllung die Außentemperatur zugeschrieben, während die 5—7 Watt betragende Verlustenergie einen Unterschied von der Größenordnung von  $10^{\circ}$  zwischen der Oberflächen- und Lufttemperatur zur Folge gehabt haben muß. Infolge dieses Irrtums ergibt sich übrigens aus den Versuchen der Wert 0,086 für die Wärmeleitfähigkeit der Wolle, 0,00014 für die der Eiderdaunen. Dies hätte den Verfasser veranlassen müssen, seine Verlustbestimmung nachzuprüfen, da ein solcher Unterschied undenkbar ist und vielmehr beide Stoffe ein Wärmeleitvermögen von der Größenordnung 0,03 [kcal. m<sup>-1</sup>. Stde<sup>-1</sup>. Grad<sup>-1</sup>] haben werden. Infolge des erwähnten Versehens muß Webers Wert  $\lambda = 0,473_0$  für  $15,7^{\circ}$  um einige Prozente zu klein sein.

13. Endlich ist nun noch eine Abhandlung von Goldschmidt<sup>2)</sup> zu erwähnen, der die von Schleiermacher für Gase angegebene Methode modifiziert hat. In ein aus der Versuchsflüssigkeit bestehendes Bad bringt er nämlich einen

1) R. Weber, Ann. d. Phys. 11. S. 1047. 1903.

2) R. Goldschmidt, a. a. O.

Messingklotz, der in einer vertikalen Durchbohrung eine mit dem Bad kommunizierende Silberkapillare von 2 mm lichter Weite trägt. In deren Achse ist ein feiner Platindraht gespannt, der gleichzeitig als Heizkörper und Thermometer für die Flüssigkeit in der Kapillare dient. Beim Anheizen des Drahtes mit dem Strom  $i$  nehme sein Widerstand um  $\Delta x$  zu (proportional der Temperaturerhöhung).  $\Delta i^2 x / \Delta x$  gibt dann ein relatives Maß für die Wärmeleitung, wenn der Messingklotz seine Temperatur nicht ändert. Die Konvektion soll durch die Enge der Kapillare vermieden, die Einwirkung der Enden der Kapillare und des Drahtes durch die geschickte Gegenschaltung eines Drahtes in einer kurzen Kapillare ausgeschaltet sein. Leider gründet Goldschmidt seinen Absolutwert auf den von Lees angegebenen Wert für Alkohol, der seinerseits wieder, wie oben ausgeführt, auf den Messungen an Glas beruht. Der so berechnete Wert für Wasser von  $0^\circ$   $\lambda = 0,540_0$  ist daher jedenfalls nicht brauchbar. Auffallend ist, daß Goldschmidt für verschiedene Flüssigkeiten (ebenso wie Lees) Zunahme von  $\lambda$  mit abnehmender Temperatur (zwischen  $+15$  und  $-79^\circ$ ) findet. Da er jedoch den Temperaturkoeffizienten der Wärmeleitfähigkeit des *Wassers* nicht untersucht hat, braucht hier darauf nicht eingegangen zu werden.

Von sämtlichen in diesem Abschnitt erwähnten Messungen sind wohl die von Milner und Chattock am einwandfreiesten. Deren Methode läßt sich jedoch nicht ohne weiteres auf beliebige Temperaturen anwenden und erfordert eine teure und komplizierte Apparatur. Es wurde daher eine Methode ausgearbeitet, die mindestens ebenso genau, einfacher und für verschiedene Temperaturen brauchbar ist.

## C. Das neue Meßverfahren.

### I. Grundlagen.

Bei dem in der Reichsanstalt neu ausgearbeiteten Verfahren wird in einem elektrischen Heizkörper im Dauerzustand stündlich die Wärmemenge  $W$  erzeugt; deren Hauptteil  $U = W - V$  durchströmt vertikal abwärts eine Wasserlamelle, die nach H. F. Webers Vorgang zwischen zwei horizontale Kupferplatten gebracht ist. Oberhalb der Temperatur  $4^\circ$  ist

dabei Wärmeübergang durch Konvektion im Wasser gänzlich ausgeschlossen. Aus der stündlichen Wärmemenge  $U = W - V$ , der Fläche  $F$  und der Dicke  $d$  der Flüssigkeitsschicht, sowie dem Temperaturabfall  $(t_1 - t_2)$  in dieser Schicht ergibt sich daher die Wärmeleitfähigkeit nach der Formel <sup>1)</sup>

$$(6) \quad \lambda = \frac{(W - V) d}{F(t_1 - t_2)}.$$

Die sämtlichen Größen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind ganz einfach zu messen mit Ausnahme von  $V$ . Um die Wärmemenge  $V$ , die, ohne die Flüssigkeitsschicht zu durchsetzen, nach außen abströmt, gering zu machen, ist ein Vakuummantelgefäß über das Plattensystem gestülpt. Hierdurch wird der Wärmeverlust durch Konvektion und Strahlung und die Verdampfung des Wassers wesentlich verringert, wie weiter unten auseinandergesetzt wird. Es wird aber ferner hierdurch eine derartige Abgrenzung und Definition der gesamten Versuchsanordnung ermöglicht, daß es gelingt, die Einzelanteile, aus denen sich  $V$  zusammensetzt, durch Rechnung und besondere Versuche mit der erwünschten Genauigkeit zu ermitteln. In der Verwendung des Vakuummantelgefäßes und der Bestimmung der Wärmeverluste  $V$  ist der Fortschritt begründet, den der Verfasser mit dem jetzt näher zu beschreibenden Verfahren erzielt zu haben hofft.

## II. Die Versuchseinrichtung.

In Fig. 2 ist der Versuchssapparat dargestellt. Die Wärmemenge  $W$  wird erzeugt in dem Heizkörper  $H_1$ . Dieser besteht aus vier hintereinandergeschalteten Drahtspiralen in einem mit Öl gefüllten zylindrischen Kupfergefäß von 2 mm Wandstärke. Der 3 mm starke Messingboden des Gefäßes ist außen möglichst eben gearbeitet; ein Deckel von 2 mm Kupferblech ist in die Zylinderwandung gut eingepaßt. Die Wände des Heizgefäßes mußten deshalb aus Kupfer hergestellt und so dick gehalten werden, damit die Temperatur sich auf seiner Oberfläche möglichst ausgleichen konnte, obwohl das Öl nicht ge-

---

1) Dabei ist vorausgesetzt, daß das Wärmeströmungsfeld in der ganzen Schicht homogen und auch am Rande nicht verzerrt ist. Der Randverlust der Lamelle war bei unseren Versuchen so gering, daß diese Voraussetzung als erfüllt gelten durfte.

rührt wurde. Die Heizspiralen bestehen aus 0,7 mm starkem Konstantandraht; ihre Gesamtlänge beträgt etwa  $14\frac{1}{2}$  m, ihr

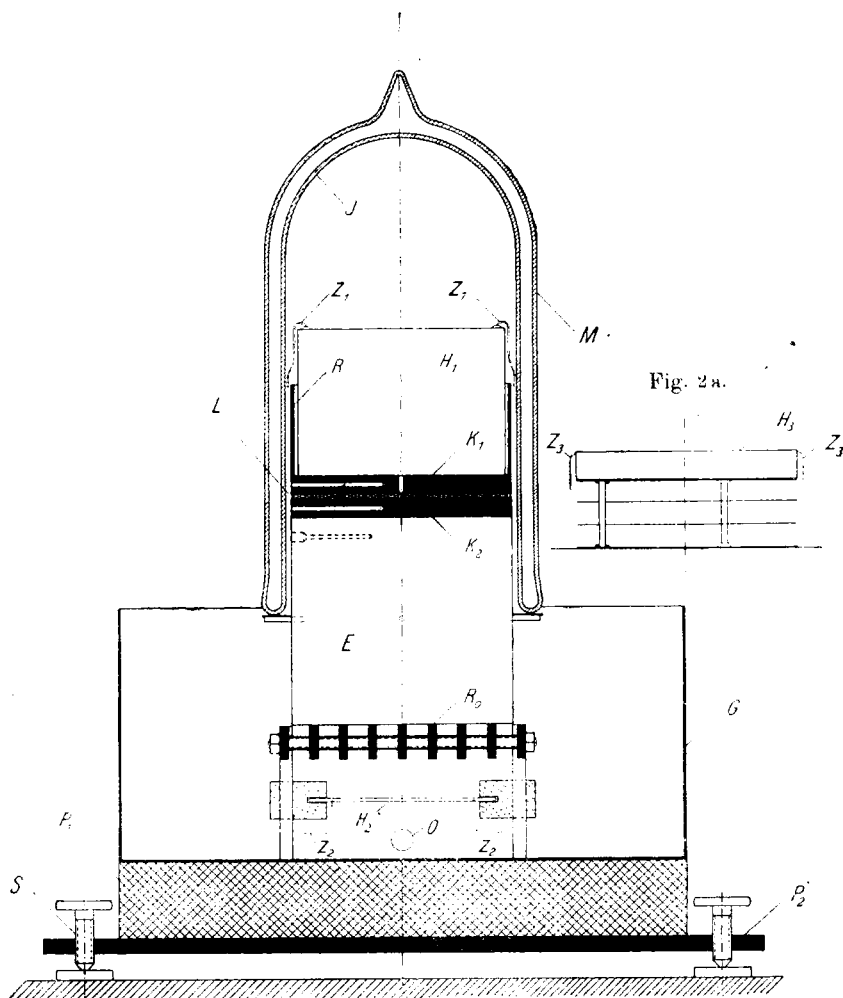


Fig. 2.

Widerstand etwa 20 Ohm. Die Zuleitungsdrähte  $Z_1$  (abgebrochen gezeichnet) sind durch Isolierbuchsen aus dem Deckel des Heizkörpers herausgeführt. Auf dem Deckel war

bei einigen Versuchen ein Thermoelement angelötet, dessen Drähte in üblicher Weise ein Stück weit auf der Deckelfläche geführt waren.

Je größer die Fläche der Wasserlamelle ist, desto größer wird die Wärmemenge  $U$  im Verhältnis zu der Verlustwärme  $V$ , desto größer also die Meßgenauigkeit. Dem äußeren Durchmesser der Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  war aber eine Höchstgrenze gesetzt durch die lichte Weite des größten guten Vakuummantelgefäßes, das zur Verfügung stand. Der Durchmesser der Platten wurde hiernach zu 117 mm (genau: 116,85 mm) gewählt; ihre Dicke betrug je 10 mm. Die obere Platte hat eine zentrale Bohrung von 2 mm Durchmesser zum Einfüllen der Flüssigkeit, jede Platte ferner eine seitliche 2,5 mm weite, fast bis zur Mitte reichende Bohrung zur Aufnahme der Thermoelemente, die zur Messung des Temperaturabfalles ( $t_1 - t_2$ ) dienten. Die bei der Versuchsanordnung einander zugekehrten Flächen der Platten wurden in der Hauptwerkstatt der Reichsanstalt sorgfältig plan geschliffen.

Durch drei kleine rechtwinklige Glasplättchen von je  $3 \times 3$  qmm Grundfläche, die sämtlich bei  $14^\circ$  (auf 0,001 mm genau) 2,248 mm hoch waren, wurden die Kupferplatten voneinander getrennt und die Dicke  $d$  der Wasserlamelle  $L$  festgelegt.

Auf der oberen Kupferplatte  $K_1$  sitzt ein 49 mm hoher,  $2\frac{1}{2}$  mm dicker Messingring  $R$  von genau dem gleichen Außendurchmesser wie die Kupferplatten. Er dient als Strahlungsschutz gegen  $H_1$  und zur Herstellung eines ringförmigen Raumes von überall gleicher Weite zwischen dem Plattensystem und dem Vakuummantelgefäß (vgl. hierüber S. 560). An seiner Außenfläche sind je 5 mm vom oberen und unteren Rand entfernt zwei Thermoelemente angelötet, deren Drähte in gleicher Höhe etwa um den halben Umfang des Ringes herum- und dann nach außen geführt sind.

Die untere Kupferplatte  $K_2$  sitzt auf einem verkupferten, zylindrischen Eisenklotz  $E$  von genau gleichem Durchmesser, der 10 mm von seinem oberen Rand eine Bohrung für ein Thermoelement enthält und etwa 55 mm vom oberen Rand vier Stifte trägt, auf welchen das Vakuummantelgefäß  $M$  aufliegt.

Letzteres, aus Glas und von der üblichen Bauart mit versilberten Wänden (die innere Wand ist noch besonders mit  $J$  bezeichnet), war so gleichmäßig zylindrisch, wie man von einem Glasgefäß dieser Größe erwarten kann; die lichte Weite in verschiedenen Tiefen schwankte nämlich um höchstens 2 Proz. ihres Wertes; in einer Tiefe von 50 mm (vom Rand gemessen) war sie im Mittel 122,5 mm. Aus dem Gewicht und den Dimensionen des Gefäßes und der Dichte der Glassorte ergab sich die Wandstärke zu etwa 2,1 mm. Die Dicke der Versilberungsschicht betrug etwa 0,00015 mm.

Der Eisenzylinder  $E$  ruhte auf einem eisernen Rost  $R_0$ , der auf dem Boden des Gefäßes  $G$  stand, und gab die von  $K_2$  herabströmende Wärme an den Inhalt von  $G$  ab. Dieser Inhalt bestand bei den Versuchen bis  $13^\circ$  aus schmelzendem Eis. Ein mit Eis gefüllter Blechtrichter mit innerer zylindrischer Wand, welche die Außenwand von  $M$  umschloß, war dabei auf das Gefäß  $G$  aufgesetzt. Das Schmelzwasser floß durch ein nahe dem oberen Rand von  $G$  angebrachtes (hinter  $E$  befindliches und daher in Fig. 2 nicht sichtbares) Ablaufrohr ab. — Bei den Versuchen zwischen  $20$  und  $40^\circ$  durchfloß Kühlwasser<sup>1)</sup>, welches bei der Öffnung  $O$  eintrat, das Gefäß  $G$ . — Bei noch höheren Temperaturen war das Gefäß mit Öl gefüllt. Dieses wurde von dem flachen durch Asbestgewebe isolierten Heizkörper  $H_2$  (Bauart Schniewindt) elektrisch geheizt.  $H_2$  ist mittels zweier Holzklötze zwischen den Füßen des Rostes  $R_0$  eingeklemmt; die Stromzuführungen  $Z_2$  sind abgebrochen gezeichnet. Die Temperatur der in  $G$  befindlichen Flüssigkeit wurde mit einem in einem Glasröhrchen eingeführten Thermoelement immer an der gleichen Stelle gemessen.

Das Gefäß  $G$  steht auf einer isolierenden Korkplatte  $P_1$ , diese wiederum auf einer Richtplatte  $P_2$ . Mittels der Schrauben  $S$  konnten die Platten  $K_1$  und  $K_2$  genau horizontal eingestellt werden.

Die Versuche wurden im allgemeinen in der Anordnung

---

1) Bei einem dieser Versuche (Nr. 7 der Tabelle 2, S. 569) war dabei die Anordnung nach der in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde (39. S. 184. 1919) angegebenen Fig. 11 getroffen. Der dort eingezeichnete Eisenzylinder  $E'$  erschwert wegen seiner großen Wärmekapazität die Messung.

der Fig. 2 ausgeführt. Nur zur Messung der Strahlungsverluste (vgl. Abschnitt III, 6) wurde der Eisenklotz  $E$  entfernt und dafür die in Fig. 2a dargestellte Anordnung so in das Gefäß  $M$  geschoben, daß die Platte  $K_2$  in gleicher Höhe blieb wie in Fig. 2 und auf  $H_3$  aufsaß.

$H_3$  ist ein kleiner Heizkörper, bestehend aus einer Konstantandrahtspirale, die in einem Messinggefäß in Öl liegt. Die Stromzuführungen  $Z_3$  sind wieder abgebrochen gezeichnet. Das Messinggefäß (vom gleichen Durchmesser wie  $K_2$ ) ruht auf einer Weißblechscheibe, die von drei Holzstäbchen getragen wird, welche selbst wiederum auf einer Weißblechscheibe stehen. Auf letzterer liegt bei den Strahlungsmessungen das Gefäß  $M$  auf. Zwischen den erwähnten Scheiben sind zwei weitere horizontale Weißblechscheiben als Strahlungsschützer angeordnet.

Als elektrische Stromquellen dienten Akkumulatoren-batterien, zur Messung der Heizenergie  $W$  Präzisionsampere-meter und -voltmeter von Siemens & Halske, die wiederholt nachgeprüft wurden.

Die Temperaturen wurden mit Thermoelementen bestimmt, die je aus einem 130 cm langen und 0,2 mm dicken Eisendraht und zwei je 65 cm langen und 0,25 mm dicken Konstantandrahten bestanden, an deren freie Enden je 120 cm lange und 0,5 mm dicke Kupferdrähte angelötet waren (Nebenlötstellen). Ihr Widerstand bei Zimmertemperatur betrug je 17,9 Ohm. Bei den Messungen befanden sich die eine Lötstelle und die beiden Nebenlötstellen durch Glasröhrchen geschützt in schmelzendem Eis. Als Meßinstrument diente ein Millivoltmeter von Siemens & Halske für Spannungen bis 18 mV. Der Widerstand des Instrumentes betrug 81,8 Ohm bei 19°; ein Skalenteil Ausschlag bedeutete 0,1 mV, entsprechend etwa 0,43° bei unmittelbarem Anschluß an die Thermoelemente.

### III. Die Wärmebilanz und die Bestimmung ihrer einzelnen Posten.

Von der im Heizkörper  $H_1$  im Dauerzustand stündlich erzeugten Wärmemenge  $W$  strömt, wie erwähnt, der größte Teil  $U$  durch die Wasserlamelle<sup>1)</sup>, ein Teil  $V$  aber auf anderen

1) In  $U$  ist ein vernachlässigbar kleiner Betrag für die Strahlung durch die Wasserschicht enthalten.



Wegen ab. Ich zerlege  $V$  in fünf einzelne Anteile  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  und  $V_5$  und erhalte so die Wärmebilanz

$$W = U + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

oder mit Benutzung von Gleichung (6)

$$(7) \quad W = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5.$$

Dabei bedeutet

- $V_1$  die Summe der kleinen Wärmemengen, welche vertikal nach unten abströmen durch die drei Glasplättchen zwischen  $K_1$  und  $K_2$ , durch die Luft in dem ringförmigen Raum zwischen der Wasserlamelle  $L$  und der inneren Glaswand  $J$  des Vakuummantelgefäßes, durch die Zuleitungsdrähte  $Z_1$  des Heizkörpers  $H_1$  und durch die Drähte der oberhalb von  $L$  angeordneten Thermoelemente,
- $V_2$  die zur Verdampfung von Wasser aus dem Rand der Lamelle  $L$  aufgewandte Energie,
- $V_3$  die in der Höhe von  $L$  durch die Innenwand  $J$  des Vakuumgefäßes vertikal nach abwärts strömende Wärmemenge,
- $V_4$  die durch Strahlung (und Leitung) quer zu den Wänden des Gefäßes  $M$  oberhalb von  $L$  nach außen abgeführte Wärme,
- $V_5$  endlich die Summe der Wärmemengen, welche von  $H_1$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$ ,  $R$  und dem oberhalb  $L$  liegenden Teil der Wand  $J$  aufgenommen worden sind, wenn diese am Ende eines Versuches eine etwas höhere Temperatur haben als am Anfang. Sind die Endtemperaturen niedriger, so ist  $V_5$  negativ (Wärmeabgabe).

Wie nun die Posten der Wärmebilanz Gl. (7) im einzelnen bestimmt wurden, das soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

#### 1. Die gesamte Heizwärme $W$ .

$W$  wurde in üblicher Weise aus Strom und Spannung erhalten. Die Energie, welche in den Zuleitungen  $Z_1$ , soweit diese *unterhalb* der Lamelle  $L$  verlaufen, erzeugt wird, wurde dabei entsprechend der Länge dieser Drahtstücke (2,77 Proz. der Gesamtdrahtlänge) in Abzug gebracht.  $W$  wurde bei fast allen Versuchen annähernd zu 15,9 kcal/h gewählt, nur bei zwei Versuchen zu 10,2.

2. Der Betrag  $\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$ .

Die Beziehung

$$U = \frac{F(t_1 - t_2)}{d} \lambda$$

gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Wasserlamelle die Kupferplatten unmittelbar berührt, daß also nicht etwa dünne Luftschichten den Wärmeübergang verschlechtern.

Es erwies sich als nötig, das Wasser auszukochen und noch etwas warm ganz langsam zwischen die Platten einzufüllen; sonst perlte Luft aus dem Wasser aus und setzte sich an den Platten fest, während bei richtigem Vorgehen vor und nach dem Versuch die Platten bei horizontaler Durchleuchtung der Wasserlamelle blank spiegelnd erschienen.

In dem Ausdruck für  $U$  ist  $d = 0,002248$  m zu setzen (vgl. S. 550); die Veränderlichkeit von  $d$  in den Temperaturgrenzen der Versuche ist zu vernachlässigen.

Die Fläche der Wasserlamelle ist  $F = F_K - F_G - F_L$ , wobei  $F_K$  die Fläche einer Kupferplatte bedeutet,  $F_G = 0,000027$  qm die Summe der Querschnitte der 3 Glasplättchen zwischen den Platten und  $F_L$  der Querschnitt des schmalen Luftringes zwischen dem Rand der Kupferplatten und dem Meniskus der Wasserlamelle.  $F_L$  wurde folgendermaßen bestimmt: Zu Beginn und am Ende eines jeden Versuches wurde der Meniskus mittels einer Mikrometerschraube mit nadelfeiner Spitze an verschiedenen Stellen des Umfanges ausgemessen. Bei den Versuchen mit größerer Verdampfung wurde ferner unmittelbar nach dem Versuch soviel Wasser nachgefüllt, bis der Meniskus wieder genau gleich viel ausgebaucht oder eingebaucht war wie zu Beginn des Versuches. Aus der nachzufüllenden Wassermenge und  $d$  ließ sich berechnen, wie groß  $F_L$  in dem für die Berechnung von  $\lambda$  zugrundegelegten Zeitraum (vgl. Abschnitt 7, S. 567) im Mittel war. Dabei mußte natürlich jeweils die Änderung von  $F_L$  mit der Temperatur des Wassers berücksichtigt werden. Bei unseren Versuchen betrug  $F$  zwischen 0,0097 und 0,0106, im Mittel 0,0102 qm.

Der Temperaturabfall  $(t_1 - t_2)$  in der Wasserschicht ergibt sich aus der Differenz der Angaben der in die Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  eingeführten Thermolemente. Von dieser Differenz

ist noch der Temperaturabfall in den Kupferplatten abzuziehen. Er beträgt etwa 1 Proz. von  $(t_1 - t_2)$  und ist aus der Wärmeleitfähigkeit des Kupfers, der Fläche  $F$  und der annähernd bekannten Wärmemenge  $U$  aufs einfachste zu berechnen.

Da bei den Versuchen  $(t_1 - t_2)$  etwa  $5,6-6,8^\circ$  (bei zwei Versuchen  $4,4^\circ$ ) betrug, war eine sehr sorgfältige Prüfung der Thermoelemente erforderlich, damit die Temperaturdifferenz auf mindestens  $\frac{1}{2}$  Proz. genau gemessen werden konnte. Sämtliche Elemente wurden zunächst am Kompensator und mit dem Zeigergalvanometer geeicht.<sup>1)</sup> Die Mittelwerte der 4 Versuchspunkte bei  $20, 40, 60$  und  $80^\circ$  habe ich durch die Gleichung

$$(8) \quad \frac{t}{A} = 0,439 - 0,000\,077\,A$$

mit einer Genauigkeit von  $\frac{1}{2}$  pro Mille dargestellt, wobei  $A$  den bei der Temperatur  $t$  am Instrument abgelesenen Wert bedeutet.

Da die einzelnen Thermoelemente etwas voneinander abwichen, das Material der Drähte also offenbar nicht ganz homogen war, wurde außerdem die zwischen den beiden zur Messung von  $(t_1 - t_2)$  dienenden Thermoelementen bei gleicher Temperatur vorhandene Differenz besonders bestimmt, indem die bezüglichen Lötstellen *beider* Elemente zusammen in das Loch der oberen Kupferplatte des Versuchsapparates gesteckt und die Angaben  $A$  an 7 Punkten zwischen  $0$  und  $83^\circ$  verglichen wurden. Es ergab sich, daß die zwei Elemente fast völlig unabhängig von der Temperatur sich um  $0,06$  bis  $0,04^\circ$  im Mittel um  $0,05^\circ$  unterschieden. Die betreffende Korrektur wurde an den Ablesungen angebracht.

### 3. Die Summe $V_1$ verschiedener kleiner Wärmeverluste.

Die nach der auf S. 553 gegebenen Definition unter der Bezeichnung  $V_1$  zusammengefaßten Wärmeverluste lassen sich aus den bekannten Werten des Wärmeleitvermögens für Glas, Luft, Konstanten und Eisen und aus dem vertikalen Temperaturgefälle in der Höhe der Lamelle  $L$  (in Fig. 2) mit ge-

---

1) Für die Ausführung dieser Messungen bin ich Herrn Geheimrat Scheel zu besonderem Dank verbunden.

nügender Genauigkeit berechnen. Diese Verlustwerte betragen im einzelnen höchstens einige Promille, zusammen nur 0,8 und 1,0 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$ .

#### 4. Die Verdampfungswärme $V_2$ .

Heizt man den Apparat, ohne daß das Vakuummantelgefäß  $M$  übergestülpt ist, so findet infolge der kräftigen Konvektion am Rand der Flüssigkeitslamelle eine ziemlich schnelle Verdampfung statt. Es wäre dabei unmöglich, die Versuche, besonders die bei höheren Temperaturen, durchzuführen, da es nicht gelingen könnte, schnell genug einen Dauerzustand einzuregulieren. Durch den Mantel  $M$  wird die Verdampfung äußerst verringert. Die Luft zwischen den inneren Metallkörpern und dem Mantelgefäß ist schnell mit Wasserdampf gesättigt, und dann verdampft nur noch soviel, wie durch den schmalen Ring zwischen diesen Körpern und dem Mantel nach unten (also ohne Konvektion) diffundieren kann. Da die Luft unterhalb der Lamelle  $L$  um mehrere Grad kälter ist als die oberhalb von  $L$ , so fällt der diffundierende Wasserdampf unten aus und schlägt sich an den Metallflächen unterhalb  $L$  nieder. Würde die ganze dabei freiwerdende Kondensationswärme unmittelbar unterhalb  $L$  der Kupferplatte  $K_2$  zugeführt und sich sofort über deren ganze Fläche  $F_K$  verteilen, so würde selbst bei der größten beobachteten Verdampfung der Temperaturabfall in  $K_2$  bis zu der Stelle der Thermoelementbohrung noch nicht um  $1/1000^\circ$  vergrößert. Selbst in diesem ungünstigsten Fall würde also das Resultat durch die Kondensationswärme nicht beeinflusst. Dagegen geht die Verdampfungswärme  $V_2$ , weil von  $H_1$  geliefert und in der Gesamtwärme  $W$  inbegriffen, mit dem vollen Betrag in das Meßergebnis ein. Sie ist aus der bekannten Verdampfungswärme des Wassers und der Verdampfungsmenge ohne weiteres zu berechnen. Wie die letztere bei jedem Versuch festgestellt wurde, ist bereits auf S. 554 auseinandergesetzt. Sie nahm mit zunehmender Temperatur bis auf etwa 0,55 g/h bei  $72\frac{1}{2}^\circ$  zu, in welchem Fall  $V_2$  etwa 2 Proz. der gesamten zugeführten Wärme ausmacht, gegenüber  $1/2$  Proz. bei  $8^\circ$ .

5. Die Wärmeableitung  $V_3$  längs der inneren Glaswand.

In der inneren Glaswand  $J$  des Vakuummantelgefäßes  $M$  wird die Temperatur von oben nach unten geringer. Es strömt daher in dieser Wand Wärme axial ab. In der Fig. 3 sind die Wand  $J$  und die ihr benachbarten Teile des Apparates ober- und unterhalb der Wasserlamelle  $L$  im Schnitt

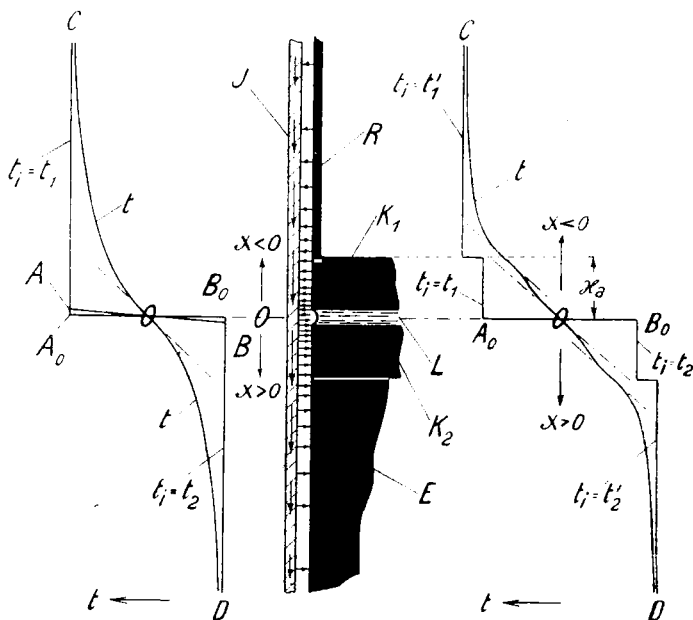


Fig. 3a.

Fig. 3.

Fig. 3b.

besonders dargestellt. Bei den folgenden Rechnungen wird zunächst von der Strahlung von Wärme durch den Ringraum zwischen  $R$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$ ,  $E$  und der Wand  $J$  abgesehen, was man bei den niederen Temperaturen ohne weiteres darf.<sup>1)</sup> Dann findet im Dauerzustand eine Wärmeleitung durch den Luftring und die Glaswand etwa im Sinn der in Fig. 3 eingezeichneten Pfeile statt.<sup>2)</sup> Der Temperaturverlauf ist in den

1) Spätere Betrachtungen (vgl. S. 563, Fußnote 1) und Messungen (vgl. Abschnitt 8) zeigen, daß die Rechnungen auch bei den höheren Temperaturen genau genug sind.

2) Die axiale Wärmeableitung im Luftring ist dabei vernachlässigt. Sie ist gering und in  $V_1$  so eingerechnet, als ob sie ohne Rückwirkung auf  $V_3$  wäre.

daneben gezeichneten Diagrammen dargestellt, von welchen wir zunächst Fig. 3a betrachten wollen. In dieser Figur sind mit  $x$  bezeichnet die vertikalen Abstände der horizontal gegenüberliegenden Punkte der Fig. 3 von einer durch die Mitte der Wasserlamelle zu legenden Nulllinie, oberhalb welcher  $x < 0$ , unterhalb welcher  $x > 0$  sei. Die Temperaturen sind in horizontaler Richtung eingetragen.  $t_i$  bedeute die Temperatur der Metallkörper und zwar sei  $t_i = t_1$  für  $R$  und  $K_1$ ,  $t_i = t_2$  für  $K_2$  und  $E$ . Die Temperatur der Glaswand sei mit  $t$  bezeichnet. Der Temperaturverlauf in dem Metallkörper (und im Wasser) ist dann durch den Linienzug  $CABD$  dargestellt, den man genügend genau durch  $CA_0B_0D$  ersetzen kann, der Temperaturverlauf in der Glaswand durch eine Kurve  $COD$ . Von dieser Kurve brauchen wir die Tangente  $(dt/dx)_0$  an der Stelle  $x = 0$ . Aus ihr, dem genügend genau bekannten Wärmeleitungsvermögen  $\lambda_G$  der Glassorte, sowie dem Querschnitt  $f_G$  der Glaswand (vgl. S. 551) erhält man den gesuchten Wert  $V_3$  nach der Formel<sup>1)</sup>

$$(9) \quad V_3 = -\lambda_G \cdot f_G \cdot \left( \frac{dt}{dx} \right)_0.$$

Es ist nun also der Verlauf der Kurve  $COD$  zu bestimmen: In ein elementares Stück der Glaswand  $J$  von der Länge  $dx$  tritt im Dauerzustand stündlich *ein* die Wärmemenge

$$\lambda_L \cdot \frac{f_L}{s_L^2} \cdot dx (t_i - t) - f_G \cdot \lambda_G \frac{dt}{dx}.$$

Aus dem gleichen Element tritt stündlich *aus* die Wärmemenge

$$- f_G \lambda_G \left( \frac{dt}{dx} + \frac{d^2 t}{dx^2} dx \right).$$

Hierin bedeutet  $f_L$  den Querschnitt,  $s_L$  die Weite des Luft-ringes,  $\lambda_L$  die Wärmeleitfähigkeit der Luft. Da die beiden Wärmemengen gleich sein müssen, erhalten wir als Differentialgleichung des Temperaturverlaufes längs der Glaswand

---

1) Es ist hierbei angenommen, daß die Temperatur im Glasquerschnitt überall gleich wäre, was genügend genau zutrifft. Die Wärmeableitung durch den nur  $0,15 \mu$  starken Silberbelag (vgl. S. 551) ist vernachlässigbar.

$$(10) \quad \frac{d^2 t}{dx^2} = c t + b = c(t - t_i)$$

mit

$$(10a) \quad c = \frac{f_L \cdot \lambda_L}{L^2 \cdot f_G \cdot \lambda_G} \quad \text{und} \quad b = -c t_i$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (10)

$$x = \int \sqrt{\frac{dt}{a + 2 \cdot f'(c t + b) dt}} + C$$

mit den Konstanten  $a$  und  $C$  ergibt, da  $c > 0$ , durch Integration

$$(11) \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \pm [b + c t \pm \sqrt{c} \sqrt{a + 2 b t + c t^2}] + C.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$(12) \quad \frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{a + 2 b t + c t^2} = \pm \sqrt{a + c t(t - 2 t_i)}.$$

Das Vorzeichen  $+$  scheidet aus, wie leicht einzusehen ist.

Es sind nun die Konstanten  $a$  und  $C$  zu bestimmen.

Für  $x < 0$  (Ast I der Kurve) seien sie mit  $a_I$  und  $C_I$ , für  $x > 0$  (Ast II der Kurve) seien sie mit  $a_{II}$  und  $C_{II}$  bezeichnet.<sup>1)</sup> Für  $x = \pm \infty$  muß gelten  $t = t_i$  und  $dt/dx = 0$ .

Aus (12) folgt hiernach

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_I = c t_i^2 \\ \text{und} \\ a_{II} = c t_2^2. \end{array} \right.$$

Für  $x = 0$  muß gelten

$$t_I = t_{II} = t_0 \quad \text{und} \quad (dt/dx)_I = (dt/dx)_{II} = (dt/dx)_0.$$

Aus (12) folgt somit

$$(14) \quad t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

was man auch aus Symmetriegründen vermuten konnte. (Vgl. die zu- und abnehmende Größe der Pfeile in der Glaswand  $J$  in Fig. 3.)

Aus (11) und (13) erhält man nun

$$(15) \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \pm 2 c(t - t_i) + C,$$

<sup>1)</sup> Analog bedeutet  $t_i$  die Temperatur  $t$  für den Ast I usw.

aus (14) und (15)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{\mp \sqrt{c}} \ln \pm c(t_2 - t_1) \\ \text{und} \\ C_{II} = \frac{1}{\mp \sqrt{c}} \ln \pm c(t_1 - t_2), \end{array} \right.$$

aus (15) und (16)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \\ \text{und} \\ x_{II} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}. \end{array} \right.$$

(Da  $\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \leq \frac{1}{2}$  und  $\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \leq \frac{1}{2}$  sind nur die Vorzeichen der Gl. (17) mit der Fig. 3a in Übereinstimmung.) Durch Gl. (17) ist der Verlauf von  $t$  dargestellt durch je einen Ast zweier logarithmischer Kurven, die bei  $x = 0$  eine gemeinsame Tangente haben. Es folgt nun endlich aus Gl. (17) oder aus (12) und (13)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (dt/dx)_I = \sqrt{c}(t - t_1) \\ \text{und} \\ (dt/dx)_{II} = -\sqrt{c}(t - t_2) \end{array} \right.$$

und mit (14) der gesuchte Wert für  $x = 0$  in der einfachen Form

$$(19) \quad (dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Die obige Rechnung setzt voraus, daß der zylindrische Luft-ringraum zwischen den Metallkörpern und der Glaswand sich nach oben und unten in gleicher Weite  $s_L$  ins Unendliche erstreckt. Aus der maßstäblich gezeichneten Fig. 3a ist aber ersichtlich, daß schon eine Erstreckung von je 5 cm nach oben und unten praktisch genügt. Aus diesem Grund wurde der Messingring  $R$  etwa 5 cm hoch gewählt und der Eisenklotz  $E$  etwa 5 cm tief in das Vakuummantelgefäß eingelassen.

Bei unseren Rechnungen war ferner bisher vorausgesetzt, daß zwischen den Metallkörpern  $R$  und  $K_1$  und zwischen  $K_2$  und  $E$  ein vollkommener Temperatúrausgleich stattfindet. In



Wirklichkeit wurde zwischen  $R$  und  $K_1$  und zwischen  $K_2$  und  $E$  ein Temperatursprung festgestellt, der je nach dem mehr oder minder gelungenen Zusammenbau verschieden groß war und im allgemeinen weniger als  $1^\circ$ , in manchen Fällen aber auch über  $1^\circ$  betrug.<sup>1)</sup> Da nun die gesamte Temperaturdifferenz  $(t_1 - t_2)$  im Durchschnitt weniger als  $6^\circ$  betrug, so war noch zu untersuchen, welchen Einfluß dieser Temperatursprung auf das Ergebnis haben konnte.

Der Temperaturverlauf ist in Fig. 3b dargestellt. Entsprechend den vier Temperaturstufen<sup>2)</sup>  $t_1'$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_2'$  (Temperaturverlauf  $CA_0OB_0D$  in den Metallkörpern) hat die Kurve  $CO D$  des Temperaturverlaufes  $t$  in der Glaswand 4 Äste I', I, II und II', die je in einem Wendepunkt (verursacht durch den Temperatursprung von  $t_i$ ) ineinander übergehen.

Glücklicherweise ist auch die Berechnung dieser Kurve leicht möglich. Die Differentialgleichung (10), ihre Lösung (11) und somit auch Gl. (12) bleiben unverändert. Nehmen wir Symmetrie gegenüber der Stelle  $x = 0$  an, also  $t_1' - t_1 = t_2 - t_2'$  (was in Wirklichkeit nicht völlig, aber genügend genau stimmt), so können wir uns auf die Betrachtung der Kurvenäste I' und I beschränken. An deren Übergangsstelle  $x = x_a$  herrsche die Temperatur  $t = t_a$  in der Glaswand. Da für  $x = -\infty$  auch hier  $dt/dx = 0$  sein muß, folgt aus Gl. (12)

$$(20) \quad a'_1 = c t_1'^2.$$

Aus (11) und (20) erhält man weiter, wenn man  $C_1'$  durch Einsetzen von  $x_a$  und  $t_a$  eliminiert, nach einer Diskussion der Vorzeichen

$$(21) \quad x_1' = x_a + \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{t - t_1'}{t_a - t_1'}$$

und hieraus die der Gl. (18) analoge Gleichung

$$(22) \quad (dt/dx)_1' = \sqrt{c} (t - t_1')$$

1) Der Deckel des Heizkörpers  $H_1$  (vgl. Fig. 2) war, wie besondere Messungen ergaben, um mehrere Grad wärmer als der Ring  $R$ . Der Strahlungsschutz, den dieser bietet, ist also durchaus nötig.

2) In  $R$  ist ein Temperaturgefälle von oben nach unten gemessen worden. Es geht also ein Teil der Wärmemenge  $W$  durch  $R$  auf  $K_1$  über. Für die vorliegenden Rechnungen kann die Temperatur von  $R$  überall gleich angenommen werden.

und für die Stelle  $x = x_a$

$$(23) \quad (dt/dx)_a = \sqrt{c} (t_a - t_1').$$

Da der Kurvenast I an der Stelle  $x = x_a$  die gleiche Tangente haben muß, so folgt nun aus (10a), (12) und (23)

$$(24) \quad a_1 = c [t_1'^2 - 2t_a(t_1' - t_1)]$$

und aus (12) und (24) für  $x = 0$  mit  $t = t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$

$$(25) \quad \left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = -\sqrt{c} \sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}.$$

In dieser Gleichung ist nur  $t_a$  noch unbekannt. Nun gewinnt man, indem man aus der Gl. (11) durch Einsetzen von  $x_a$  und  $t_a$  die Konstante  $C_1$  eliminiert, die Formel

$$(26) \quad x = x_a + \frac{1}{\pm \sqrt{c}} \ln \frac{b_1 + ct \pm \sqrt{c} \sqrt{a_1 + 2b_1t + ct^2}}{b_1 + ct_a \pm \sqrt{c} \sqrt{a_1 + 2b_1t_a + ct_a^2}}$$

und hieraus mit der Benutzung von Gl. (10a) und (24) nach kurzer Umrechnung und Einsetzen des Wertes  $t = t_0$  für  $x = 0$ .

$$(27) \quad x_a = \frac{1}{-\sqrt{c}} \ln \frac{t_0 - t_1 - \sqrt{(t_1' - t_a)^2 - (t_1 - t_a)^2 + (t_1 - t_0)^2}}{(t_a - t_1) - (t_1' - t_a)}.$$

Diese Gleichung muß für  $t_1 = t_1'$  nach Gl. (17) den Wert

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln 2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

ergeben. Dies ist der Fall, da die Gl. (17) widersprechenden Vorzeichen der Gl. (26) ausgeschlossen wurden. Gl. (27) ist eine quadratische Gleichung, als deren Wurzel man  $t_a$  in elementarer Weise berechnen kann. Durch Einsetzen des gefundenen Wertes in Gl. (25) erhält man  $(dt/dx)_0$  und damit nach Gl. (9) den gesuchten Wert  $V_3$ .

Es soll nun an einem Beispiel dargelegt werden, wie das Ergebnis beeinflußt wird, je nachdem man  $(dt/dx)_0$  nach Gl. (19) oder Gl. (25) berechnet. Bei Versuch Nr. 4 der Tabelle 3 (S. 570) war<sup>1)</sup>  $t_1' = 17,3^0$ ,  $t_1 = 16,1$ ,  $t_2 = 9,3$ ,  $t_2' = 8,1$  und

1) Die Temperaturen sind auf Zehntel Grade abgerundet, und  $t_1'$  und  $t_2'$  sind um ein weiteres Zehntel sinngemäß so korrigiert, daß Symmetrie gegen  $x = 0$  besteht.

$c = 5310 \text{ [m}^{-2}\text{]}. \text{ Nach Gl. (19) erhielt man}$

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t_2 - t_1}{2} = -248$$

oder

$$(dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{t'_2 - t'_1}{2} = -335 \text{ und nach Gl. (17)}$$

$t_a = 14,6$  oder  $= 15,25$ , je nachdem man  $t_1$  und  $t_2$  oder  $t'_1$  und  $t'_2$  als maßgebend für die Berechnung ansehen wollte. Der wirkliche Wert  $(dt/dx)_0$  muß zwischen  $-248$  und  $-335$  liegen. Nehmen wir an, er liege genau in der Mitte, es sei also  $(dt/dx)_0 = -291,5$ , so könnte  $(dt/dx)_0$  in Wirklichkeit höchstens um 15 Proz. größer oder kleiner sein. Da nun  $V_3$  nur 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$  ausmacht, so kann der mögliche Fehler nur 2 Promille von  $W$  betragen. Da  $t_a$  zwischen 14,6 und 15,25 liegen muß, so läßt sich der richtige Wert leicht durch Probieren (statt durch Rechnen) aus Gl. (27) ermitteln. Man findet  $t_a = 15,07$  und  $(dt/dx)_0 = -286$ , macht also bei der Annahme des Mittelwertes  $-291,5$  sogar nur einen Fehler von 0,2 Promille (bezogen auf  $W$ ). Statt mit der exakten Gl. (27) ist daher bei allen Versuchen mit dem Mittelwert

$$(28) \quad (dt/dx)_0 = \sqrt{c} \frac{(t_2 - t_1) + (t'_2 - t'_1)}{4}$$

gerechnet worden. Indem man diesen Wert in Gl. (9) einsetzt, erhält man

$$(29) \quad V_3 = \sqrt{c} \frac{(t_1 - t_2) + (t'_1 - t'_2)}{4} \lambda_G f_G$$

und mit Benutzung von Gl. (10a)

$$(30) \quad V_3 = \frac{(t_1 - t_2) + (t'_1 - t'_2)}{4} \frac{1}{s_L} \sqrt{f_L \lambda_L f_G \lambda_G \cdot 1}$$

1) All diese Ableitungen gelten ganz streng nur, wenn nicht gleichzeitig Strahlung durch den ringförmigen Luftraum und den Vakuummantel stattfindet, also bei nicht allzu weit von der Außentemperatur abweichender Temperatur des Wassers. Bei höheren Temperaturen spielt die im folgenden Abschnitt behandelte Strahlung eine Rolle. Ihr Einfluß auf die axiale Temperaturverteilung in der Glaswand  $J$  ist im wesentlichen so, als ob die  $t$ -Kurve der Fig. 3a und 3b parallel zur  $t$ -Richtung nach rechts verschoben wäre, wobei  $V_3$  also unverändert

Nach dieser Gleichung ist der Wärmeverlust  $V_3$  bei den einzelnen Versuchen berechnet und, wie erwähnt, gleich 0,8 bis 1 Proz. der Gesamtheizwärme  $W$  gefunden worden.

#### 6. Der Strahlungsverlust $V_4$ .

Trotz der Verwendung eines guten Vakuummantelgefäßes  $M$  mit versilberten Wänden war der Wärmeverlust durch Strahlung quer zu den Wänden bei der höchsten Versuchstemperatur von  $72\frac{1}{2}^{\circ}$  größer als sämtliche anderen Verluste zusammen. Dieser Verlust konnte aber durch besondere Versuche genau bestimmt werden. Dabei befand sich zwischen den Kupferplatten  $K_1$  und  $K_2$  (Fig. 2) kein Wasser, sondern Luft, und es war der in Fig. 2a dargestellte Heizkörper  $H_3$  statt des Eisenklotzes  $E$  unter  $K_2$  geschoben, wie auf S. 552 beschrieben ist. Es wurde nun durch gleichzeitige Heizung mit  $H_1$  und  $H_3$  bei verschiedenen Temperaturen  $t_1$  ein Dauerzustand von der Art hergestellt, daß  $t_2$  höchstens um etwa  $0,1$  oder  $0,2^{\circ}$  niedriger war als  $t_1$ . Dann ging nur ein ganz geringer Anteil  $U$  der Wärmemenge  $W$  von oben nach unten durch die Luftschicht zwischen den Platten (während  $U$  bei den Hauptversuchen 90 bis 98 Proz. von  $W$  betrug) und ebenso war  $V_1$  und  $V_3$  ganz gering, weil auch in dem Luft-ring und in der Glaswand in der Höhe von  $L$  fast kein Temperaturabfall in der  $x$ -Richtung stattfand.  $V_2$  entfiel überhaupt, da kein Wasser verwendet wurde, und  $V_5$  ließ sich ebenfalls ganz klein halten, weil nicht aus Rücksicht auf die Verdampfung die Einregulierung der Temperaturen sehr schnell erfolgen mußte, sondern ein fast vollkommener Dauerzustand abgewartet werden konnte (vgl. hierüber S. 567). Fast die ganze in  $H_1$  erzeugte Wärmemenge  $W$  wurde also durch Strahlung nach außen abgegeben. Dies ist aus den Wärmebilanzen ersichtlich, die durch Versuche bei der Außentemperatur  $t_{\text{II}} = 14,5$  und drei verschiedenen Innentemperaturen  $t_1$  (an  $K_1$  und  $R$  gemessen)<sup>1)</sup> erhalten wurden (vgl. Tabelle 1). In  $U$  ist ein

bliebe. Zur Kontrolle der Richtigkeit der Einzelverlustmessungen ist übrigens bei der höchsten Versuchstemperatur auch eine Gesamtverlustmessung vorgenommen worden (vgl. Abschnitt 8).

1) Deren Temperaturen unterscheiden sich dabei nicht wesentlich.

Betrag von 0,001 kcal/h für die Strahlung durch die Luftschicht zwischen  $K_1$  und  $K_2$  enthalten.

Tabelle 1.  
Wärmebilanz bei den Strahlungsmessungen.

$t_1$	$W - (U + I_1 + V_8 + V_9) = V_4$	$V_4$ nach Gl. (31)
34,3°	$0,235 - (0,019 + 0,002 + 0,003 + 0,000) = 0,211$	0,222
55,3°	$0,515 - (0,031 + 0,003 + 0,005 + 0,002) = 0,474$	0,499
76,2°	$0,896 - (0,033 + 0,003 + 0,005 + 0,000) = 0,855$	0,832

Die gemessenen Werte des Strahlungsverlustes lassen sich genügend genau ausdrücken durch die empirische Gleichung

$$(31) \quad F_1 = 0,0104 \left[ \left( \frac{T_I}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]$$

(vgl. letzte Spalte der Tab. 1). Durch Einsetzen der jeweils gemessenen Innen- und Außentemperaturen  $T_I$  und  $T_{II}$  in diese Formel ergab sich hiernach bei unseren Hauptversuchen (vgl. Tab. 2, S. 569) ein mit der Temperatur von 0,2 bis 5,3 Proz. der Gesamtwärme  $W$  ansteigender Strahlungsverlust  $F_1$ .

Aus Gleichung (31) läßt sich nebenbei das Reflexionsvermögen der versilberten Wände des Vakuummantelgefäßes mit guter Annäherung berechnen. Da dies für die Trennung der Wärmeverluste solcher Gefäße von Wichtigkeit ist, soll die Berechnung hier mitgeteilt werden. Die Gleichung (31) hat dieselbe Form wie die von Christiansen<sup>1)</sup> zuerst angegebene Gleichung

$$(32) \quad V_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} \left[ \left( \frac{T_I}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right],$$

statt deren man noch allgemeiner

$$(33) \quad F_4 = \frac{F_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot C}{A_2 + F_1/F_2 \cdot A_1 (1 - A_2)} [\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})]$$

schreiben kann. Dabei ist  $V_4$  die Strahlungsenergie, die von einem inneren überall konvexen Körper von der Oberfläche  $F_1$  und Temperatur  $T_I$  auf eine überall konkave Hülle von der Fläche  $F_2$  und der Temperatur  $T_{II}$  übergeht, wenn  $A_1$  und  $A_2$  das Absorptionsvermögen von Körper und Hülle bedeuten. Christiansen macht darauf aufmerksam, daß Formel (32) streng nur gilt,

1) C. Christiansen, Wied. Ann. 19. S. 267. 1883.

wenn eine der Flächen  $F_1$  und  $F_2$  unregelmäßig geformt oder diffus reflektierend sei. Bei konzentrischen, nicht diffus reflektierenden Kugeln falle in Gleichung (32) der Faktor  $F_1/F_2$  weg. (Das gleiche gilt für konzentrische unendlich lange Zylinder.) Gelten nun ferner für das Emissionsvermögen  $\epsilon$  des schwarzen Körpers,  $E_1$  der Fläche  $F_1$  und  $E_2$  der Fläche  $F_2$  gleichzeitig die Beziehungen

$$(34) \quad \begin{cases} \epsilon = C \cdot \varphi(T) \\ E_1 = C_1 \cdot \varphi(T) \\ E_2 = C_2 \cdot \varphi(T) \end{cases},$$

so folgt aus Gleichung (33)

$$(35) \quad V_4 = \frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2 (1/C_2 - 1/C)} [\varphi(T_I) - \varphi(T_{II})].$$

Hieraus<sup>1)</sup> und aus Gleichung (31) erhält man<sup>2)</sup> nun mit  $\frac{F_1}{1/C_1 + F_1/F_2 (1/C_2 - 1/C)} = 0,0104$ ,  $F_1 = 0,0764 \text{ qm}$ ,  $F_2 = 0,0887 \text{ qm}$ , sowie  $C = 4,9$  die Werte  $C_1 = C_2 = 0,2476$  und  $A_1 = \frac{C_1}{C} = 0,0505 = A_2$ , bei Weglassung des Faktors  $F_1/F_2$  aber  $C_1 = C_2 = 0,265$  und  $A_1 = A_2 = 0,0541$ . Da unsere Flächen  $F_1$  und  $F_2$  sich je aus den Zylinderflächen oberhalb  $L$  (vgl. Fig. 2) und den angeblasenen Halbkugeln zusammensetzen, dürfte das Absorptionsvermögen der Silberbelege gleich dem Mittel aus beiden Werten, also  $A_1 = 0,052$  sein, das Reflexionsvermögen somit  $R_1 = 0,95$ . Dieser Wert kann, solange nicht weitere Messungen vorliegen, für die Trennung der Wärmeverluste von Vakuummantelgefäßen benutzt werden.

1) Der in  $V_4$  enthaltene Anteil für Wärmeleitung ist bei dem hohen Vakuum guter Vakuummantelgefäße gegenüber dem Strahlungsanteil zu vernachlässigen.

2) Für Metallflächen gilt zwar die Beziehung (34) nicht in aller Strenge; denn wie E. Aschkinass (Ann. d. Phys. 17. S. 960. 1905), gestützt auf die bekannten Messungen von Hagen und Rubens ausführt, verhält sich die Gesamtstrahlung einer Metallfläche zu der einer gleich großen schwarzen Fläche wie  $c\sqrt{T}$  (mit  $c = 0,00087$  für Silber). Die Tatsache aber, daß die empirische Beziehung (31) die gleiche Funktion  $\varphi$  enthält wie das Stefan-Boltzmannsche Gesetz, zeigt, daß soweit im Ultraroten, wie bei uns das Strahlungsmaximum liegt, Gl. (34) jedenfalls genau genug ist.

7. Die Wärmeeinspeicherung  $V_5$ .

Während die Wärmeverluste  $V_1$  bis  $V_4$  nur durch die Versuchsanordnung bedingt sind, hängt die Größe von  $V_5$  wesentlich von der Geschicklichkeit des Experimentators ab. Zwar nimmt bei konstant gehaltener Temperatur  $t_2$  infolge der Verdampfung von Wasser aus der Lamelle bei unveränderter Heizung  $W$  die Temperatur  $t_1$  kontinuierlich zu, aber diese Änderung würde selbst bei der größten gemessenen Verdampfung nur eine Korrektur<sup>1)</sup>  $V_5 = 0,07$ , d. i. etwa 0,4 Proz. von  $W$  ergeben. Ehe aber ein Zustand der Wärmeströmung erreicht wäre, bei dem nur  $t_1$  in der oben erwähnten Weise<sup>1)</sup> anstiege, wäre bereits soviel Wasser aus der Lamelle verdampft, daß andere Grundlagen des Versuchs gestört und seine Ausführung damit gescheitert wäre. Es handelte sich also darum, durch Regulieren von  $H_1$  und  $H_2$  möglichst schnell einen nur annäherungsweise vollkommenen Dauerzustand zu erreichen und die kleinen Temperaturänderungen der einzelnen Teile dann in Rechnung zu setzen. Es gelang schließlich, die gesamte Versuchsdauer vom Einfüllen des Wassers bis zum Nachmessen der verdampften Wassermenge nach Abschluß der Beobachtungen auf  $3\frac{1}{2}$ –10, im Mittel auf 5 Stunden zu verringern. Es wurde dann ein am Ende dieser Zeit liegender Abschnitt (von 30–180, im Mittel 83 Minuten) als Zeit des Dauerzustandes den Berechnungen zugrundegelegt, zu dessen Anfang und Ende die Temperatur der einzelnen Teile  $H_1$ ,  $R$ ,  $K_1$ ,  $L$ ,  $K_2$  und  $J$  (oberhalb  $L$  genommen) möglichst genau, die von  $E$  völlig genau gleich war. Aus den Temperaturänderungen der eben genannten Teile und ihrer leicht zu berechnenden Wärmekapazität erhält man dann die Wärmeeinspeicherung  $V_5$  (im Fall von Temperaturabnahme einen negativen Betrag, also eine Wärmeabgabe der Apparatur).  $V_5$  schwankte zwischen  $-0,9$  und  $+2,3$  Proz. und betrug im Mittel (vom Vorzeichen abgesehen) 0,8 Proz. von  $W$ . Der oben erwähnte Idealbetrag von höchstens 0,4 Proz. ist also wesentlich überschritten worden. Bei weiterer Übung im Einregulieren des Dauerzustandes des

1) Es ist dabei angenommen, daß die Temperatur von  $H_1$ ,  $R$  und dem oberhalb  $L$  liegenden Teil von  $J$  um den gleichen Betrag zunehmen wie  $t_1$ .

Apparates dürfte man zu geringeren Korrekturwerten  $V_5$  gelangen.

#### 8. Messung des Gesamtverlustes $V$ .

Da die Summe der Einzelverluste  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = V$ , die bei  $8^\circ$  nur etwa  $2\frac{1}{2}$  Proz. der Gesamtheizung ausmacht, bei  $72^\circ$  bereits 10 Proz. von  $W$  betrug, schien es wünschenswert, wenigstens bei der Höchsttemperatur eine Kontrollmessung der Gesamtverluste vorzunehmen. Dies war mit großer Genauigkeit möglich, wenn in der Anordnung der Fig. 2 Luft statt Wasser sich zwischen den Kupferplatten befand und genau die gleichen Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  einreguliert wurden wie bei dem entsprechenden Versuch mit Wasser. Da auch hierbei keine Wasserverdampfung in Frage kam ( $V_2 = 0$  wie bei den Strahlungsmessungen), so ließ sich der Dauerzustand genau einstellen und  $V_5$  gering halten. Es ergab sich folgende Wärmebilanz:

$$W - U = V$$

$$1,696 - 0,676 = 1,020.$$

Dabei ist zur Berechnung von  $U$  die Wärmeleitfähigkeit der Luft  $\lambda_L = 0,0246$  (bei  $72,5^\circ$ ) angenommen und in  $U$  ein Betrag  $0,045$  kcal/h für den Strahlungsaustausch zwischen der oberen und unteren Kupferplatte enthalten, berechnet nach den Angaben von Wamsler.<sup>1)</sup> In  $V$  ist enthalten ein Betrag  $V_4 = 0,816$  und  $V_5 = -0,029$ . Es war somit  $V_1 + V_3 = V - V_4 - V_5 = 0,233$ , während bei den Versuchen Nr. 11 und 12 (der Tabelle 2, S. 569)  $V_1 + V_3 = 0,292$  gefunden wurde. Die Gesamtverlustmessung hat somit einen um  $0,06$  kcal/h kleineren Wert ergeben als die Einzelverlustmessung bei den Versuchen 11 und 12. Diese Differenz von weniger als 0,4 Proz. der Gesamtheizwärme könnte dadurch beseitigt werden, daß man die Innentemperatur  $t_1$  bei den Hauptversuchen etwas größer annähme als bei den Strahlungs- und Gesamtverlustmessungen, da bei der gleichen Temperatur  $t_1$  der oberen Kupferplatte  $H_1$  und  $R$  bei ersteren Versuchen etwas wärmer waren als bei letzteren. Doch soll hiervon (trotz vorhandener Versuchsunterlagen) abgesehen werden, da Fehler von einigen

1) F. Wamsler, Mitt. über Forschungsarb. auf d. Gebiete des Ingenieurwesens Heft 98 u. 99. S. 1. 1911.



Promille bei unseren Messungen nicht zu vermeiden waren und durch diese Korrektur der Anschein größerer Genauigkeit mit Unrecht erweckt würde.

#### IV. Versuchsergebnisse.

Die Durchführung der Hauptversuche bedarf nun keiner Beschreibung mehr, da alle Einzelheiten in den früheren Abschnitten genau geschildert sind.

Die wichtigsten Einzelergebnisse der Versuche sind in der Tabelle 2 zusammengestellt.  $t$  bezeichnet darin die mittlere

Tabelle 2.  
Einzelergebnisse der Versuche.

Vers.-Nr.	$t$	$W$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 V_i$	$U = W - V$	$t_1 - t_2$	$\frac{F(t_1 - t_2)}{d}$	$\lambda$
1	7,4 <sup>0</sup>	10,19	0,083	0,070	0,096	0,024	0,000	0,27	9,92	4,38 <sup>0</sup>	20,47	0,4846
2	8,3	10,21	0,079	0,035	0,096	0,041	-0,020	0,23	9,98	4,36	20,56	0,4854
3	12,6	15,89	0,136	0,093	0,155	0,104	-0,059	0,43	15,46	6,70	31,04	0,4981
4	12,7	16,07	0,139	0,100	0,155	0,105	-0,055	0,44	15,63	6,82	31,48	0,4965
5	26,5	15,93	0,148	0,137	0,156	0,192	-0,145	0,49	15,44	6,61	30,01	0,5145
6	27,3	15,85	0,133	0,066	0,161	0,191	-0,143	0,41	15,44	6,47	29,90	0,5164
7	38,4	15,92	0,148	0,162	0,149	0,325	-0,109	0,67 <sub>5</sub>	15,24 <sub>5</sub>	6,36	28,69	0,5314
8	44,4	15,87	0,140	0,197	0,143	0,400	-0,056	0,82	15,05	6,04	27,70	0,5433
9	52,1	15,85	0,132	0,173	0,133	0,514	0,279	1,23	14,62	5,80	26,49	0,5519
10	62,9	15,90	0,150	0,261	0,132	0,678	0,365	1,59	14,31	5,73	25,37	0,5641
11	72,2	15,87	0,160	0,323	0,136	0,819	0,046	1,48	14,39	5,76	24,98	0,5761
12	72,6	15,85	0,157	0,297	0,132	0,839	0,147	1,57	14,28	5,60	24,47	0,5836

Temperatur der Wasserlamelle. Die Bedeutung der folgenden Spalten ist auf S. 552 und 553 erklärt; die Werte  $W$  bis  $U$  sind dabei in kcal/h,  $F$  ist in qm,  $d$  in m ausgedrückt. Die letzte Spalte enthält die aus den Messungen nach Gl. (6) oder (7) sich ergebenden Werte der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Wassers in kcal. m<sup>-1</sup> Stde<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>.

#### D. Schlußfolgerungen.

Unsere Versuchsergebnisse lassen sich darstellen durch die lineare Gleichung:

$$(36) \quad \lambda = 0,4769(1 + 0,002984 t)$$

oder in cgs-Einheiten [cal.cm<sup>-1</sup> Sek<sup>-1</sup> Grad<sup>-1</sup>] durch die Gleichung

$$(37) \quad \lambda = 0,001325(1 + 0,002984 t).$$

Die nach diesen Gleichungen *berechneten* Werte  $\lambda_{\text{ber.}}$  sind mit den aus Tabelle 2 zu entnehmenden *gemessenen* Werten  $\lambda_{\text{gem.}}$  in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Abweichung  $\Delta$  der 4. De-

Tabelle 3.

Vergleich der gemessenen und berechneten Werte von  $\lambda$ .

Vers.-Nr.	Temp. $t$	Werte in technischem Maß			Werte in <i>cgs</i> -Einheiten		
		$\lambda$ gem.	$\lambda$ ber.	$\Delta$	$\lambda$ gem.	$\lambda$ ber.	$\delta$
1	7,4°	0,4846	0,4874	-28	0,001346	0,001354	-8
2	8,3	0,4854	0,4887	-33	1348	1358	-10
3	12,6	0,4981	0,4948	+33	1384	1374	+10
4	12,7	0,4965	0,4950	+15	1379	1375	+4
5	26,5	0,5145	0,5146	-1	1429	1429	0
6	27,3	0,5164	0,5157	+7	1434	1432	+2
7	38,4	0,5314	0,5315	-1	1476	1476	0
8	44,4	0,5433	0,5401	+32	1509	1500	+9
9	52,1	0,5519	0,5510	+9	1533	1531	+2
10	62,9	0,5641	0,5664	-23	1567	1573	-6
11	72,2	0,5761	0,5796	-35	1600	1610	-10
12	72,6	0,5836	0,5802	+34	1621	1612	+9

zimale (in technischem Maß),  $\delta$  der 6. Dezimale (in *cgs*-Einheiten) zwischen  $\lambda_{\text{gem.}}$  und  $\lambda_{\text{ber.}}$  beträgt höchstens  $\pm 0,7$  Proz., im Mittel  $\pm 0,4$  Proz.

Die gemessenen Werte sind als Punkte in die Fig. 1 eingetragen, die der Gl. (36) entsprechende Gerade ist dort ebenfalls eingezeichnet. Die mehr oder minder große Annäherung der Versuchspunkte früherer Beobachter an diese Gerade, auch des H. F. Weberschen Punktes aus dem Jahr 1885, ist ziemlich zufällig. Nur dem Versuchspunkt von Milner und Chattock ist eine etwa gleichgroße absolute Genauigkeit zuzuschreiben wie unseren Versuchswerten; dieser Punkt liegt knapp 2 Proz. über unserer Geraden.

Die Wärmeleitfähigkeit des Wassers ist durch unsere Versuche zwischen 0 und 80° auf etwa 1 Proz. genau bestimmt, ihre Zunahme mit der Temperatur außer Zweifel. Diese Zunahme erfolgt im Versuchsbereich linear; der Temperaturkoeffizient beträgt etwa 3 Promille pro Grad. Versuche an anderen Flüssigkeiten und festen Körpern nach der gleichen Methode sind in Aussicht genommen.

(Eingegangen 22. Mai 1920.)