

SUL GRUPPO MONOMIO
INDIVIDUATO
DA UNA TRASFORMAZIONE INFINITESIMALE PROIETTIVA;
Nota di **Gabriele Torelli**, in Palermo.

Adunanza del 28 febbrajo 1894.

1. La presente breve Nota non è che un commento al § 4 del Cap. 2 dell'Opera: Lie e Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*. In tale paragrafo vi è in due modi dimostrato il teorema:

Il gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva del piano consta di trasformazioni tutte proiettive.

Io propongo qui una terza via, la quale perviene alla pruova del teorema su enunciato, giungendo alle equazioni finite del gruppo di trasformazioni in discorso.

Il germe della presente dimostrazione si trova nel § 4 del Cap. 4 dell'altra Opera dei medesimi autori: *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*.

La dimostrazione guadagna, quasi, ad essere esposta immaginando che le variabili del gruppo, anzi che due, siano n . Perciò adottato questa ipotesi riserbandomi in ultimo di ricapitolare i risultati pel caso di $n = 2$ ed aggiungere per esso qualche ulteriore sviluppo.

Rend. Circ. Matem., t. VIII, parte 1^a.—Stampato il 10 marzo 1894. 6

Eliminando x_1, \dots, x_n fra queste si deduce per λ l'equazione di grado $(n+1)^{\text{mo}}$

$$\begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Chiamiamo $\lambda^{(0)}, \lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ le radici di questa equazione, ad ognuno di questi valori di λ corrisponde per mezzo del sistema (5) un sistema di valori per le variabili x_1, \dots, x_n ; indichiamo con $\alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_n^{(s)}$ i valori delle variabili x_1, \dots, x_n corrispondenti a $\lambda^{(s)}$.

Sono $(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}), \dots, (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)})$ gli $n+1$ punti invarianti del gruppo.

Ciò posto nel sistema (1) cambiamo le variabili x_r nelle altre ξ_r legate alle prime dalle relazioni

$$(6) \quad \xi_r = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(r-1)} & \dots & \alpha_n^{(r-1)} \\ 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \alpha_1^{(r+1)} & \dots & \alpha_n^{(r+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \alpha_1' & \dots & \alpha_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (r=1, \dots, n).$$

Com'è facile verificare, queste risolte rispetto alle x_1, \dots, x_n danno

$$(7) \quad x_r = \frac{\alpha_r^{(0)} + \alpha_r' \xi_1 + \dots + \alpha_r^{(n)} \xi_n}{1 + \xi_1 + \dots + \xi_n}, \quad (r=1, \dots, n).$$

Differenziando queste si ottengono

$$(8) \quad dx_r = \frac{1}{(1 + \xi_1 + \dots + \xi_n)^2} \sum_{s=1}^{n+1} \begin{vmatrix} 1 + \xi_1 + \dots + \xi_n & \alpha_r^{(0)} + \alpha_r' \xi_1 + \dots + \alpha_r^{(n)} \xi_n \\ \dots & \alpha_r^{(s)} \end{vmatrix} d\xi_s, \\ (r=1, \dots, n).$$

D'altra parte sostituendo in

$$a_{r0} + a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n - x_r(a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n)$$

per le x_1, \dots, x_n i valori (7), e tenendo conto che le α verificano la (3) e le (4) si deduce

$$(9) \quad \frac{1}{(1 + \xi_1 + \dots + \xi_n)^2} \begin{vmatrix} \lambda^{(0)}\alpha_r^{(0)} + \lambda'\alpha_r'\xi_1 + \dots + \lambda^{(n)}\alpha_r^{(n)}\xi_n & \lambda^{(0)} + \lambda'\xi_1 + \dots + \lambda^{(n)}\xi_n \\ \alpha_r^{(0)} + \alpha_r'\xi_1 + \dots + \alpha_r^{(n)}\xi_n & 1 + \xi_1 + \dots + \xi_n \end{vmatrix}.$$

Sostituendo (8) e (9) in (i), sopprimendo il divisore comune ai due termini del fratto, e liberando dal denominatore, si ricava il sistema

$$(10) \quad \sum_{s=1}^{s=n} \begin{vmatrix} 1 + \xi_1 + \dots + \xi_n & \alpha_r^{(0)} + \alpha_r'\xi_1 + \dots + \alpha_r^{(n)}\xi_n \\ 1 & \alpha_r^{(s)} \end{vmatrix} d\xi_s = \begin{vmatrix} \lambda^{(0)}\alpha_r^{(0)} + \lambda'\alpha_r'\xi_1 + \dots + \lambda^{(n)}\alpha_r^{(n)}\xi_n & \lambda^{(0)} + \lambda'\xi_1 + \dots + \lambda^{(n)}\xi_n \\ \alpha_r^{(0)} + \alpha_r'\xi_1 + \dots + \alpha_r^{(n)}\xi_n & 1 + \xi_1 + \dots + \xi_n \end{vmatrix} dt.$$

($r = 1, \dots, n$).

Ora, posto

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ 1 & \alpha_1' & \dots & \alpha_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

e, considerando nel sistema (10) come ignote $d\xi_1, \dots, d\xi_n$, si vede dopo facili trasformazioni che il determinante del sistema vale

$$(1 + \xi_1 + \dots + \xi_n)^{n-1} D,$$

e che il numeratore del valore tratto dalle (10) per $d\xi_r$ eguaglia

$$(1 + \xi_1 + \dots + \xi_n)^{n-1} (\lambda^{(r)} - \lambda^{(0)}) \xi_r D dt;$$

in conseguenza, nelle nuove variabili, il sistema di equazioni differenziali simultanee (1) si riduce a

$$\frac{d\xi_r}{(\lambda^{(r)} - \lambda^{(0)}) \xi_r} = dt, \quad (r = 1, \dots, n).$$

Chiamando dunque con Ξ_r il valore di ξ_r corrispondente a $t = 0$, il sistema integrale è

$$\xi_r = \Xi_r e^{(\lambda^{(r)} - \lambda^{(0)})t}, \quad (r = 1, \dots, n).$$

Sostituendo nelle (7), e moltiplicando ambo i termini della frazione per $e^{\lambda^{(0)}t}$ si ha

$$(11) \quad x_r = \frac{e^{\lambda^{(0)}t} \alpha_r^{(0)} + e^{\lambda^{(1)}t} \alpha'_r \Xi_1 + \dots + e^{\lambda^{(n)}t} \alpha_r^{(n)} \Xi_n}{e^{\lambda^{(0)}t} + e^{\lambda^{(1)}t} \Xi_1 + \dots + e^{\lambda^{(n)}t} \Xi_n}.$$

Ora ricordando che X_1, \dots, X_n indicano i valori di x_1, \dots, x_n corrispondenti a $t = 0$, le (6) danno

$$\Xi_r = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(r-1)} & \dots & \alpha_n^{(r-1)} \\ 1 & X_1 & \dots & X_n \\ 1 & \alpha_1^{(r+1)} & \dots & \alpha_n^{(r+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_n \\ 1 & \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}}, \quad (r=1, \dots, n);$$

laonde sostituendo nelle (11) si ha il sistema integrale del si-

stema (1), e quindi le equazioni finite del gruppo monomio individuato dalla proposta trasformazione infinitesimale proiettiva sono

$$(12) \quad x_r = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & X_1 & \dots & X_n \\ e^{\lambda^{(0)}_1} \alpha_r^{(0)} & 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ e^{\lambda'^1_1} \alpha'_r & 1 & \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda^{(n)}_1} \alpha_r^{(n)} & 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & X_1 & \dots & X_n \\ e^{\lambda^{(0)}_1} & 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ e^{\lambda'^1_1} & 1 & \alpha'_1 & \dots & \alpha'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda^{(n)}_1} & 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}},$$

($r = 1, \dots, n$).

3. Posto che i coefficienti della trasformazione considerata sieno tutti reali, è facile vedere che reali possono ritenersi i coefficienti di X_1, \dots, X_n in (12), ad onta che fra le λ ve ne siano di complesse.

Infatti, se $\lambda^{(0)}, \lambda'$ sono una coppia di radici complesse conjugate, $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ risultano rispettivamente complessi conjugati di $\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}$. Opportunamente operando con somma e sottrazione fra le linee seconda e terza dei determinanti, che figurano in (12), si può mettere in ognuno a fattore $2i$ riducendo reali gli elementi delle due linee; sopprimendo in fine il fattore comune $2i$, e regolandosi nella stessa maniera per ogni coppia di valori conjugati di λ , si libereranno le (12) dall'immaginario.

4. Le (12) cadono in difetto quando fra le λ ve ne siano di eguali; poichè allora ambedue i determinanti, che figurano in (12), si annullano. È facile però dedurre da (12) le equazioni che le sostituiscono in questo caso particolare.

Supponiamo le radici $\lambda^{(0)}, \lambda', \dots, \lambda^{(n)}$ ancora tutte diverse fra loro, e poniamo i due determinanti, che figurano in (12), eguali rispettivamente ad $F(\lambda')$, $f(\lambda')$, e facciamo tendere λ' a $\lambda^{(0)}$; quando λ' ha raggiunto $\lambda^{(0)}$, la frazione $\frac{F(\lambda')}{f(\lambda')}$ ha assunto la forma $\frac{0}{0}$; perciò x_r eguaglia allora il valore di $\frac{F'(\lambda')}{f'(\lambda')}$ per $\lambda' = \lambda^{(0)}$; in conseguenza, nel caso di una coppia di radici eguali a $\lambda^{(0)}$ e le altre dif-

ferenti fra loro e da queste, le equazioni finite della trasformazione sono rappresentate da

$$x_r = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & X_1 & . & X_n & \\ e^{\lambda^{(0)}_1} \alpha_r^{(0)} & 1 & \alpha_1^{(0)} & . & \alpha_n^{(0)} & \\ \frac{d(e^{\lambda^{(0)}_1} \alpha_r^{(0)})}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha_1^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & . & \frac{d\alpha_n^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\lambda^{(n)}_1} \alpha_r^{(n)} & 1 & \alpha_1^{(n)} & . & \alpha_n^{(n)} & \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & X_1 & . & X_n & \\ e^{\lambda^{(0)}_1} & 1 & \alpha_1^{(0)} & . & \alpha_n^{(0)} & \\ \frac{de^{\lambda^{(0)}_1}}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha_1^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & . & \frac{d\alpha_n^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\lambda^{(n)}_1} & 1 & \alpha_1^{(n)} & . & \alpha_n^{(n)} & \end{array} \right| ,$$

($r = 1, \dots, n$).

Nel caso che la radice λ'' tendesse anche a $\lambda^{(0)}$ fino a raggiungerla, queste ultime formole diventerebbero pure illusorie, si applicherebbe il medesimo procedimento, ma occorrerebbero due derivazioni per fare sparire l'indeterminazione; si introdurrebbero così in ogni determinante nella linea dove figurano le α'' , che diverrebbero eguali alle $\alpha^{(0)}$, le seconde derivate di queste rispetto a $\lambda^{(0)}$. E così via seguitando.

Nelle (12) possono moltiplicarsi le orizzontali $(s+2)^{\text{esime}}$ di ambedue i determinanti, che vi figurano, ($s=0, 1, \dots, n$) pel denominatore comune dei valori di $\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \dots, \alpha_n^{(s)}$; anzi le formole, che così s'ottengono, converrà sostituire alle (12), quando i detti valori divengono ∞ .

Le (12), o le equazioni che le sostituiscono nei varii casi, pongono in evidenza il teorema enunciato.

5. Volendo calcolare il determinante Δ della trasformazione, cioè quello formato dai coefficienti della espressione lineare nelle X_1, \dots, X_n che funziona da denominatore comune delle x_1, \dots, x_n e di quelle che figurano come numeratori, indichiamo con

$$\left| \begin{array}{ccc} A_0^{(0)} & A_1^{(0)} & . & A_n^{(0)} \\ A'_0 & A'_1 & . & A'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0^{(n)} & A_1^{(n)} & . & A_n^{(n)} \end{array} \right|$$

il reciproco del determinante D . Un elemento qualunque (r, s) di Δ è espresso da

$$-(e^{\lambda^{(0)}t} \alpha_r^{(0)} A_s^{(0)} + e^{\lambda' t} \alpha_r' A_s' + \dots + e^{\lambda^{(n)}t} \alpha_r^{(n)} A_s^{(n)}),$$

intendendo che siano $\alpha_0^{(0)} = \alpha_0' = \dots = \alpha_0^{(n)} = 1$. Perciò

$$\Delta = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} e^{\lambda^{(0)}t} & e^{\lambda^{(0)}t} \alpha_1^{(0)} & \dots & e^{\lambda^{(0)}t} \alpha_n^{(0)} \\ e^{\lambda' t} & e^{\lambda' t} \alpha_1' & \dots & e^{\lambda' t} \alpha_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda^{(n)}t} & e^{\lambda^{(n)}t} \alpha_1^{(n)} & \dots & e^{\lambda^{(n)}t} \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_0^{(0)} A_1^{(0)} & \dots & A_n^{(0)} \\ A_0' A_1' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ A_0^{(n)} A_1^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

ossia

$$(13) \quad \Delta = (-1)^{n+1} e^{(\lambda^{(0)} + \lambda' + \dots + \lambda^{(n)})t} D^{n+1}.$$

Nel caso in cui $\lambda' = \lambda^{(0)}$, posto

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^{(0)} & \dots & \alpha_n^{(0)} \\ 0 & \frac{d\alpha_1^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \dots & \frac{d\alpha_n^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} = D_1,$$

s'avrebbe

$$\Delta = (-1)^{n+1} e^{(2\lambda^{(0)} + \lambda'' + \dots + \lambda^{(n)})t} D_1^{n+1},$$

e così continuando.

6. Riducendoci al caso di $n = 2$, e adoperando le notazioni della Opera in primo luogo citata di Lie e Scheffers, i risultati ottenuti vanno riassunti come segue:

Volendo le equazioni finite del gruppo monomio individuato dalla trasformazione infinitesimale proiettiva dei punti del piano

$$UF = (a + cx + dy + hx^2 + kxy) \frac{\partial F}{\partial x} + (b + fx + gy + hxy + ky^2) \frac{\partial F}{\partial y},$$

si risolva rispetto a λ l'equazione cubica

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \lambda & b & k \\ a & c - \lambda & d \\ b & f & g - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

e siano $\lambda^{(0)}$, λ' , λ'' le tre radici.—Siano in primo luogo queste differenti fra loro, e indichino $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)})$, (α', β') , (α'', β'') le soluzioni del sistema

$$(15) \quad \begin{aligned} \lambda + bx + ky &= 0 \\ a + (c - \lambda)x + dy &= 0 \\ b + fx + (g - \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

corrispondenti ai tre soprascritti valori di λ . Le cercate equazioni finite sono

$$(16) \quad \begin{aligned} x_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & \alpha^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} \beta^{(0)} \\ e^{\lambda't} & \alpha' & 1 & \alpha' \beta' \\ e^{\lambda''t} & \alpha'' & 1 & \alpha'' \beta'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\lambda't} & 1 & \alpha' & \beta' \\ e^{\lambda''t} & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \\ y_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & \beta^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} \beta^{(0)} \\ e^{\lambda't} & \beta' & 1 & \alpha' \beta' \\ e^{\lambda''t} & \beta'' & 1 & \alpha'' \beta'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\lambda't} & 1 & \alpha' & \beta' \\ e^{\lambda''t} & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Il determinante Δ della trasformazione, giusta la (13), è

$$-e^{(\lambda^{(0)} + \lambda' + \lambda'')t} \begin{vmatrix} 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix},$$

e, poichè risulta

$$\lambda^{(0)} + \lambda' + \lambda'' = c + g,$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} = \frac{(\lambda' - \lambda^{(0)})(\lambda'' - \lambda^{(0)})(\lambda'' - \lambda')}{T} = \frac{1}{T} \sqrt{-\frac{\Theta}{3}},$$

essendo Θ il discriminante della cubica (14), e T indicando il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & b & k \\ k & c & d \\ -b & f & g \end{vmatrix},$$

abbiamo dunque

$$(17) \quad \Delta = \frac{e^{(c+g)t}}{T^3} \sqrt{-\frac{\Theta^3}{27}}.$$

Le (16) e (17) sono specialmente applicabili nel caso quando le radici della (14) sono reali e diseguali, vale a dire quando Θ è negativo. Allorchè la (14) ha una sola radice reale $\lambda^{(0)}$ e due complesse $\lambda' = \mu + \nu i$, $\lambda'' = \mu - \nu i$, per evitare gl'immaginari, posto

$$\alpha' = \gamma + \delta i, \quad \beta' = s + \eta i, \quad \alpha'' = \gamma - \delta i, \quad \beta'' = s - \eta i,$$

rimpiazieremo le (16) con

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\mu t} (\gamma \cos \nu t - \delta \sin \nu t) & 1 & \gamma & \varepsilon \\ e^{\mu t} (\gamma \sin \nu t + \delta \cos \nu t) & 0 & \delta & \eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\mu t} \cos \nu t & 1 & \gamma & \varepsilon \\ e^{\mu t} \sin \nu t & 0 & \delta & \eta \end{vmatrix}, \\
 y_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\mu t} (\varepsilon \cos \nu t - \eta \sin \nu t) & 1 & \gamma & \varepsilon \\ e^{\mu t} (\varepsilon \sin \nu t + \delta \cos \nu t) & 0 & \delta & \eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ e^{\mu t} \cos \nu t & 1 & \gamma & \varepsilon \\ e^{\mu t} \sin \nu t & 0 & \delta & \eta \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

e la (17) con

$$\Delta = \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)t}}{8 T^3} \sqrt{\frac{\Theta^3}{27}}.$$

Quando la (14) ha radici eguali, cioè allorchè Θ è nullo le precedenti formole cadono in difetto.

Nel caso che $\lambda^{(0)} = \lambda' \neq \lambda''$ le (16) sono sostituite da

$$\begin{aligned}
 (16') \quad x_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d(e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)})}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ e^{\lambda''t} \alpha'' & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d e^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ -e^{\lambda''t} & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}, \\
 y_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d(e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)})}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ e^{\lambda''t} \beta'' & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d e^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ e^{\lambda''t} & 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

e la (17) da

$$\Delta = \frac{e^{(c+g)t}}{T^3} \Theta_1^3,$$

indicando Θ_1 il discriminante dell'equazione quadratica, che s'ottiene dalla (14) riducendo in questa la radice doppia a semplice.

Se infine $\lambda^{(0)} = \lambda' = \lambda''$ le (16) si mutano in

$$(16'') \quad \begin{aligned} x_1 &= \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d(e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)})}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ \frac{d^2(e^{\lambda^{(0)}t} \alpha^{(0)})}{d\lambda^{(0)2}} & 0 & \frac{d^2\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} & \frac{d^2\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{de^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ \frac{d^2e^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)2}} & 0 & \frac{d^2\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} & \frac{d^2\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} \end{array} \right|, \\ y_1 &= \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{d(e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)})}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ \frac{d^2(e^{\lambda^{(0)}t} \beta^{(0)})}{d\lambda^{(0)2}} & 0 & \frac{d^2\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} & \frac{d^2\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & x & y \\ e^{\lambda^{(0)}t} & 1 & \alpha^{(0)} & \beta^{(0)} \\ \frac{de^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)}} & 0 & \frac{d\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} & \frac{d\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)}} \\ \frac{d^2e^{\lambda^{(0)}t}}{d\lambda^{(0)2}} & 0 & \frac{d^2\alpha^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} & \frac{d^2\beta^{(0)}}{d\lambda^{(0)2}} \end{array} \right|, \end{aligned}$$

e la (17) in

$$\Delta = \frac{e^{(c+g)t}}{T^3}.$$

7. L'applicazione delle precedenti formole a casi speciali può diventar penosa, quando i coefficienti a, b, \dots, b, k abbiano tali valori che mandino all'infinito, o rendano indeterminati alcuni o tutti i punti invarianti.

Dedurremo perciò dalle (16) altre formole più comode in tali casi particolari.

Potremmo, prima di assegnar valori particolari alle a, b, \dots, h, k , operare sulle orizzontali $2^a, 3^a, 4^a$ dei determinanti, che stanno nei fratti (16) come in fine del § 4 abbiamo indicato.

In tal modo però può avvenire che per determinati valori di a, b, \dots, h, k le x_i, y_i si presentino sotto la forma $\frac{0 + 0x + 0y}{0 + 0x + 0y}$.

Se invece noi moltiplichiamo per T ambo i termini delle frazioni (16), ciò basta, come più sotto vedremo, a rendere interi nelle $a, b, \dots, h, k, \lambda^0, \lambda', \lambda''$, e quindi sempre finiti e determinati, i coefficienti delle espressioni lineari in x ed y , che funzionano come numeratori, e denominatore dei valori di x_i ed y_i .

In tal modo il secondo membro della (17) si viene a liberare dal denominatore T^3 senza che si introduca altro fattore al numeratore. Così il determinante Δ non può diventar zero: non v'è quindi a temere, che, così conducendo i calcoli, si annullino mai tutti i coefficienti di un medesimo numeratore, o del denominatore comune dei fratti esprimenti i valori di x_i ed y_i .

La deduzione delle nuove formole subito si esegue tenendo presenti le seguenti relazioni, che facilmente si ricavano dalla (14),

$$\begin{vmatrix} b & k \\ f & g - \lambda^{(0)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & k \\ f & g - \lambda' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & k \\ f & g - \lambda'' \end{vmatrix} = -T \begin{vmatrix} 0 & b & k \\ f & 0 & h \\ b & f & g \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b & k \\ c - \lambda^{(0)} & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & k \\ c - \lambda' & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & k \\ c - \lambda'' & d \end{vmatrix} = -T \begin{vmatrix} 0 & b & k \\ a & c & d \\ d & k & 0 \end{vmatrix};$$

e queste altre, che si traggono dal sistema (15),

$$(\beta' - \beta'') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} b & k \\ f & g - \lambda^{(0)} \end{vmatrix},$$

$$(\alpha' - \alpha'') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} b & k \\ c - \lambda^{(0)} & d \end{vmatrix},$$

$$(\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} c - \lambda^{(0)} & d \\ f & g - \lambda^{(0)} \end{vmatrix},$$

$$\alpha^{(0)} (\beta'' - \beta') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} \lambda^{(0)} & k \\ b & g - \lambda^{(0)} \end{vmatrix},$$

$$\alpha^{(0)} (\alpha'' - \alpha') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} \lambda^{(0)} & k \\ a & d \end{vmatrix}$$

$$\alpha^{(0)} (\alpha'' \beta' - \alpha' \beta'') T = (\lambda' - \lambda'') \begin{vmatrix} a & d \\ b & g - \lambda^{(0)} \end{vmatrix},$$

e le altre analoghe.

Mediante queste relazioni, posto

$$P_{0i} = \begin{vmatrix} -1 & b & k \\ x & c - \lambda^{(i)} & d \\ y & f & g - \lambda^{(i)} \end{vmatrix},$$

$$P_{1i} = \begin{vmatrix} \lambda^{(i)} & -1 & k \\ a & x & d \\ b & y & g - \lambda^{(i)} \end{vmatrix},$$

$$P_{2i} = \begin{vmatrix} \lambda^{(i)} & b & -1 \\ a & c - \lambda^{(i)} & x \\ b & f & y \end{vmatrix}$$

($i = 0, 1, 2$)

le (16) si trasformano in

$$(18) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{e^{\lambda^{(0)}}(\lambda' - \lambda'')P_{10} + e^{\lambda''}(\lambda'' - \lambda^{(0)})P_{11} + e^{\lambda^{(0)}}(\lambda^{(0)} - \lambda')P_{12}}{e^{\lambda^{(0)}}(\lambda' - \lambda'')P_{00} + e^{\lambda''}(\lambda'' - \lambda^{(0)})P_{01} + e^{\lambda^{(0)}}(\lambda^{(0)} - \lambda')P_{02}}, \\ y_1 &= \frac{e^{\lambda^{(0)}}(\lambda' - \lambda'')P_{20} + e^{\lambda''}(\lambda'' - \lambda^{(0)})P_{21} + e^{\lambda^{(0)}}(\lambda^{(0)} - \lambda')P_{22}}{e^{\lambda^{(0)}}(\lambda' - \lambda'')P_{00} + e^{\lambda''}(\lambda'' - \lambda^{(0)})P_{01} + e^{\lambda^{(0)}}(\lambda^{(0)} - \lambda')P_{02}}, \end{aligned}$$

comode per l'applicazione ai casi speciali.

8. Se $h = k = 0$, cioè se la proposta trasformazione infinitesimale UF è lineare, dal denominatore comune dei fratti (18) spariscono le x, y , e la trasformazione finita (18) diventa lineare. Possiamo quindi enunciare:

Il gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale lineare del piano costa di trasformazioni lineari. (Cfr. Lie e Scheffers, *Cont. Gruppen*, cap. 4, § 1).

9. Le formole corrispondenti ai casi $\lambda^{(0)} = \lambda' \neq \lambda''$, $\lambda^{(0)} = \lambda' = \lambda''$ si potrebbero ottenere dalle (16') e (16'') come le (18) sono state dedotte dalle (16); ma sarà forse meglio trarle dalle (18) come le (16') e (16'') sono state ricavate dalle (16).

E a tal proposito mettiamo in rilievo un'osservazione, che fin dal § 4 abbiamo applicata senza enunciarla esplicitamente, cioè che nel far le derivate rispetto alla radice λ , che varia accostandosi all'altra, basta soltanto derivare rispetto a tale radice in quanto che essa comparisce esplicitamente, senza tener conto che almeno una parte frai coefficienti a, b, \dots, h, k sono anch'essi funzioni di questa radice; giacchè i termini, che nella derivazione si otterrebbero per tale riguardo, si elidono allorchè le due radici divengono eguali.

10. Il valore del determinante Δ nei tre casi si riduce rispettivamente a

$$e^{(c+g)t} \sqrt{-\frac{\Theta^3}{27}}, \quad e^{(c+g)t} \Theta_1^3, \quad e^{(c+g)t}.$$

Esso non può dunque mai annullarsi; si verifica così che: *le trasformazioni dei punti del piano comprese nel gruppo monomio individuato da una trasformazione infinitesimale proiettiva non possono risultare degeneri.*

Palermo, 28 gennajo 1894.

GABRIELE TORELLI.
