# Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Aufgabe, eine gegebene binäre Form sechster Ordnung $f$ in die Gestalt $u^3 - v^2$ zu bringen, in welcher $u$ eine Form zweiten, $v$ eine Form dritten Grades, ist vollkommen bestimmt, gestattet aber eine grosse Anzahl von Auflösungen. Herr Cayley hat im 9. Bd. des Quarterly Journal, p. 215, die Gleichungen, von denen die Aufgabe abhängt, dadurch gegeben, dass er die Invarianten von $f$ durch die simultanen Invarianten von $u$ und $v$ ausgedrückt hat.

Aber diese Gleichungen haben Eigenschaften, welche sehr merkwürdig sind, und welche man leichter erkennt, indem man von der ursprünglichen Form des Problems ausgeht. Herr C. Jordan in Paris, welchem ich diese Eigenschaften mittheilte, bemerkte, dass sie genau mit denjenigen übereinstimmten, welche er bezüglich der Gleichungen für die Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) gefunden. In der That kann man leicht die völlige Uebereinstimmung beider Probleme nachweisen, wenn man sich der Anschauungen bedient, welche Herr Gordan und ich in unserer „Theorie der Abel'schen Functionen" zu Grunde gelegt haben. Die Untersuchung des in der Gleichung $f = u^3 - v^2$ enthaltenen Transformationsproblems ist daher zugleich ein algebraischer Commentar zu den allgemeinen Untersuchungen, durch welche Herr Jordan auf die Theorie dieser Classe von Gleichungen ein ganz neues Licht geworfen hat; sie ist nichts anderes, als die Behandlung der Modulargleichungen, auf welche die Dreitheilung der erwähnten Functionen führt.

Ich erlaube mir im Folgenden den Gang und die Resultate meiner algebraischen Untersuchung kurz mitzutheilen. Die ausführliche Darstellung ist in den Schriften der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen erschienen.

---

Denken wir uns, es sei eine Lösung $u$, $v$ des vorgelegten Problemes gefunden. Die Aufgabe, die anderen Lösungen zu finden, kommt das auf das Transformationsproblem zurück, welches in der Gleichung

(1) $$u^3 - v^2 = u'^3 - v'^2$$

ausgesprochen ist. Man sieht sofort, dass dieses Problem auf zwei Classen von Lösungen führt, welche völlig verschiedenen Charakter haben. Denn in Folge der Gleichung (1) sind entweder zwei der Factoren

$$u - u',\quad u - \varepsilon u',\quad u - \varepsilon^2 u',$$

in den beiden Factoren

$$v - v',\quad v + v'$$

ganz enthalten, oder jeder der drei ersten hat mit jedem der beiden letzten einen linearen Factor gemein. Im ersten Falle nenne ich die Lösung $u'$, $v'$ eine *Lösung erster Classe in Bezug auf* $u$, $v$, im anderen Falle eine *Lösung zweiter Classe.*

Es giebt, wie eine nähere Untersuchung lehrt, 27 Lösungen erster Classe, 12 Lösungen zweiter Classe in Bezug auf eine gegebene Lösung $u$, $v$. Das ursprüngliche Problem hat daher 40 Lösungen, und man hat den Satz:

*Eine gegebene binäre Form sechster Ordnung $f$ lässt sich auf vierzig Arten in die Gestalt $u^3 - v^2$ bringen.*

Aber es ist bemerkenswerth, *dass wenn eine dieser 40 Lösungen gegeben ist, die andern 39 sämmtlich durch Wurzelausziehen gefunden werden können.* Dass die Gleichung 39. Grades, von welcher sie abhängen, sich in eine Gleichung 27. und in eine Gleichung 12. Grades spaltet, folgt schon aus dem Obigen. Diese Gleichungen 27. und 12. Grades haben folgende weitere Eigenschaften.

Die 27 Lösungen erster Classe bilden 9 *Tripel,* welche vermöge einer Gleichung 9. Grades und darauf folgender reiner cubischer Gleichungen gefunden werden. In der That erhält man für $u'$, $v'$ folgende Ausdrücke:

(2) $$\begin{cases} u' = u - \xi^2 - \xi\eta - \eta^2 \\ 2v' = \varepsilon(\varepsilon - 1)\left\{(\xi + 2\eta)u - (\xi + \eta)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)\right\}, \end{cases}$$

in welchen $\varepsilon$ eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit ist, die linearen Functionen $\xi$, $\eta$ aber aus dem Transformationsproblem

(3) $$2v = 3u\xi - \xi^3 + \eta^3$$

gefunden werden. Die Gleichungen (2) geben die Lösungen eines Tripels, wenn man für $\eta$ die drei Cubikwurzeln aus $\eta^3$ setzt, auf welche die Gleichung (3) führt. Das Problem (3) aber führt auf folgenden Satz:

*Sind $u$, $v$ zwei gegebene binäre Formen zweiter und dritter Ordnung, so giebt es 9 lineare Functionen $\xi$, für welche der Ausdruck*

$$2v - 3u\xi + \xi^3$$

*ein vollständiger Cubus wird.*

*Die Gleichung* 9ten *Grades, auf welche das Problem* (3) *führt, ist eine Hesse'sche.* Hierdurch ist einerseits bewiesen, dass die 27 Lösungen erster Classe durch Wurzelausziehen gefunden werden. Aber die Untersuchung des Problems (3) ist an und für sich von Interesse. Man kann in dem vorliegenden Falle Alles vollständig aufstellen; erstens die Gleichung 9ten Grades selbst; zweitens das Problem 12ten Grades, von welchem die Lösung der Gleichung 9ten Grades abhängt; endlich die biquadratische und die cubischen Gleichungen, durch welche die Lösung beider Probleme erfolgt. Jede Lösung $\xi$, $\eta$ des Problems (3) ist dabei analog einem Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung; drei Lösungen, welche den Punkten einer Geraden entsprechen, will ich *conjugirt* nennen. Drei conjugirte Lösungen sind dann in den Formeln enthalten:

$$(4)\qquad \xi = \frac{m^3\,t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\nu}{1 - m^3}\,,\quad \eta = m\,\frac{t + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\nu}{1 - m^3}\,,$$

in welchen $t$, $\mu$, $\nu$ lineare Functionen, $m$ eine Constante ist. Und die zwölf conjugirten Systeme findet man durch das folgende Transformationsproblem:

$$(5)\qquad \begin{cases} (1 - m^3)\,u = \mu\,\nu - m^3\,t^2 \\ 2\,(1 - m^3)^2\,v = m^3\,(1 - 2m^3)\,t^3 + 3\,m^3\,t\mu\,\nu - \mu^3 - \nu^3. \end{cases}$$

Sucht man nun die Gleichung 12ten Grades, welche entsteht, wenn man das Product der 12 linearen Functionen $t$ gleich Null setzt, so findet man:

$$(6)\qquad \begin{aligned} 0 = &\left\{3\,pu - (\sigma_1 + \tfrac{3}{2}\,A)\,v\right\}\cdot\left\{3\,pu - (\sigma_2 + \tfrac{3}{2}\,A)\,v\right\} \\ &\left\{3\,pu - (\sigma_3 + \tfrac{3}{2}\,A)\,v\right\}\cdot\left\{3\,pu - (\sigma_4 + \tfrac{3}{2}\,A)\,v\right\}, \end{aligned}$$

wo $p$ die erste lineare Covariante von $u$ und $v$ ist, wo $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$(7)\qquad \begin{aligned} 0 = &\,\sigma^4 + 6\,(2B - \tfrac{1}{4}\,A^2)\,\sigma^2 \\ &+ 4\,(5\,AB - 2\,C - 4\,D + \tfrac{1}{4}\,A^3)\,\sigma - 3\,(2B - \tfrac{1}{4}\,A^2)^2, \end{aligned}$$

und $A$, $B$, $C$, $D$ die simultanen Invarianten von $u$ und $v$ sind. *Die biquadratische Gleichung* (7) *hat die besondere Eigenschaft, dass ihre erste Invariante verschwindet.* Die Lösung des Problems (3) erfolgt, indem man zuerst diese Gleichung, und sodann zwei der cubischen Gleichungen (6) löst, welche den Gleichungen für die Wendepunktsdreiecke einer Curve dritter Ordnung durchaus analog sind.

*Das Verhalten der Lösungen zweiter Classe wird am besten dadurch charakterisirt, dass sie in der obigen Vorstellungsweise den Ecken der Wendepunktsdreiecke entsprechen.* In der That liefert jedes conjugirte System, welches durch $m$, $\mu$, $\nu$, $t$ bestimmt ist, folgende zwei Lösungen zweiter Classe, die sich nur durch Vertauschung von $\mu$ und $\nu$ unterscheiden:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
u' &= -\frac{m}{1-m^3}(\mu^2 - \nu t)\\
v' &= \frac{1}{2(1-m^3)^2}\left\{\nu^3 - (1-2m^3)\mu^3 + m^3 t^3 - 3m^3 \mu \nu t\right\}\\
u'' &= -\frac{m}{1-m^3}(\nu^2 - \mu t)\\
v'' &= \frac{1}{2(1-m^3)^2}\left\{\mu^3 - (1-2m^3)\nu^3 + m^3 t^3 - 3m^3 \mu \nu t\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Jede dieser Lösungen kommt aber noch bei einem andern conjugirten System vor; und zwar führen immer zwei solche conjugirte Systeme auf eine gemeinschaftliche Lösung zweiter Classe, welche den Seiten eines und desselben Wendepunktsdreiecks entsprechen. Die behauptete Analogie dieser Lösungen mit den Ecken dieser Dreiecke ist dadurch gerechtfertigt. Auch sieht man, wie in Folge dieser Verhältnisse die Lösungen zweiter Classe auf keine neuen Gleichungen führen, welche zu lösen sind, sondern durch die Resolventen der Hesse'schen Gleichung mitgelöst werden.

Dieses sind die wesentlichsten Eigenschaften, welche 39 Lösungen des vorgelegten Problems der 40ten gegenüber besitzen. Es entsteht nun die Frage, welche Wandlungen mit diesen Eigenschaften vor sich gehen, wenn man statt der Lösung $u$, $v$ eine andere, $u'$, $v'$, zu Grunde legt, und dieser gegenüber die 39 anderen Lösungen gruppirt. Man erhält hierbei folgende Sätze:

1) *Ist $u'$, $v'$ erster Classe in Bezug auf $u$, $v$, so ist auch $u$, $v$ erster Classe für $u'$, $v'$.*

2) *Aus jedem frühern Tripel geht eine Lösung in die zweite über, so dass im Ganzen acht frühere Lösungen erster Classe jetzt zweiter Classe werden und umgekehrt.*

3) *Das früher $u'$, $v'$ enthaltende Tripel wird nun in sofern geändert, dass $u$, $v$ an Stelle von $u'$, $v'$ in denselben eintritt.*

4) *Aus zwei früher mit diesem conjugirten Tripeln entstehen zwei neue, welche dem neuen nach (3) entstandenen conjugirt sind; in jedes derselben tritt eine Lösung zweiter Classe ein; die zurückbleibenden Lösungen erster Classe ordnen sich in den neuen Tripeln so, dass die früher in einem Tripel vereinigten nicht mehr vereinigt bleiben.*

5) *Die in zwei solche Tripel (4) eintretenden Lösungen zweiter Classe entsprechen Ecken eines Wendepunktsdreiecks, deren Verbindungslinie dem conjugirten System entspricht, welchem die beiden alten Tripel angehören.*

6) *Vier Lösungen zweiter Classe bleiben zweiter Classe; sie entsprechen solchen Ecken von Wendepunktsdreiecken, welche in einer geraden Linie und den vier Wendepunktslinien gegenüber liegen, die den $u'$, $v'$ enthaltenden conjugirten Systemen entsprechen.*

7) *Die Wurzeln der neuen biquadratischen Gleichung* (7) *sind mit denen der früheren durch eine lineare Substitution mit rationalen Coefficienten verbunden.*

Es zeigt sich hierbei, dass gewisse Verbindungen der Lösungen zu vier sich durch besondere Eigenschaft auszeichnen. Ich nenne sie *Quadrupel.* Ein solches Quadrupel besteht aus irgend einer Lösung und drei anderen, welche in Bezug auf diese ein Tripel erster Classe bilden. Die Anzahl aller Quadrupel ist 90. *Sie besitzen die Eigenschaft, dass wenn man irgend eine Lösung eines Quadrupels zu Grunde legt, die übrigen in Bezug auf diese ein Tripel erster Classe bilden.* Und zu gleicher Zeit giebt es dann immer vier Lösungen, welche bei allen diesen Anordnungen zweiter Classe bleiben (6). Diese vier Lösungen bilden ebenfalls ein Quadrupel; beide Quadrupel sind einander reciprok zugeordnet und bilden ein *Quadrupelpaar.*

Es *giebt* 45 *Quadrupelpaare;* man findet daher die Quadrupel durch Lösung einer Gleichung $45^{\text{ten}}$ Grades, und darauf folgende Lösung quadratischer Gleichungen.

Aber endlich bemerkt man, dass die 40 Lösungen des ursprünglichen Problems sich auf mannigfache Weise in fünf Quadrupelpaare zerlegen lassen. Wenn man ein bestimmtes Quadrupelpaar herausgegriffen, so lassen sich aus den übrigen 32 Lösungen noch auf drei verschiedene Arten in vier Quadrupelpaare ordnen. Die Zahl aller solcher Anordnungen ist daher $\frac{45 \cdot 3}{5} = 27$; und *man findet also die Zerlegungen der* 40 *Lösungen in fünf Quadrupelpaare durch eine Gleichung* $27^{\text{ten}}$ *Grades.* Kennt man eine Wurzel derselben, so kann man die entsprechenden fünf Quadrupelpaare durch Lösung einer Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades erhalten, und die Bestimmung der Lösungen des gegebenen Problems kommt übrigens auf Wurzelausziehungen zurück.

Diese Reduction der Gleichung $40^{\text{ten}}$ Grades auf eine des $27^{\text{ten}}$ Grades stimmt genau mit derjenigen überein, welche Herr C. Jordan bezüglich der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen kennen gelehrt hat.

Göttingen, den 5. Juni 1869.